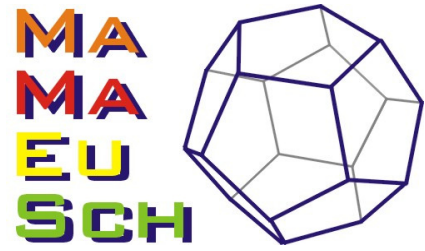


MaMaEuSch

**Management Mathematics for
European Schools**

[http://www.mathematik.uni-
kl.de/~mamaeusch/](http://www.mathematik.uni-kl.de/~mamaeusch/)



Aplicaciones - Simples del cálculo de matrices

Markus Buchtele¹

Univ.Prof. Dipl.Ing. Dr. Franz Rendl²

Este proyecto ha sido desarrollado con ayuda parcial de la Unión Europea dentro del programa Sócrates.

El contenido no refleja necesariamente la posición de la Unión Europea ni implica ninguna responsabilidad por parte de esta.

¹ Proyecto asistido por el departamento de matemáticas de la universidad de Klagenfurt

² Jefe del departamento de matemáticas de la universidad de Klagenfurt

Índice

1. Introducción.....	3
2. Introducción al cálculo de matrices.....	6
2.1. Veamos un ejemplo.....	6
2.2. Representación.....	7
2.3. Definición de matriz.....	8
2.3.1. Convenios.....	9
2.3.2. Tipo de matrices.....	8
2.4. Comparación de consumos.....	10
2.5. Operaciones aritméticas con matrices.....	11
2.5.1. Suma.....	11
2.5.2. Resta.....	12
2.5.3. Producto escalar.....	13
2.5.4. Producto de dos matrices.....	14
3. Ejemplos.....	17
3.1. Producto escalar.....	17
3.2. Multiplicación de dos matrices.....	18

1. Introducción

Las matrices, aunque parezcan al principio objetos extraños, son una herramienta muy importante para expresar y discutir problemas que surgen en la vida real. En los negocios a menudo es necesario calcular y combinar ciertos costes y cantidades de productos. Las tablas son una forma de representar estos datos. Sin embargo, agrupar los datos en un rectángulo nos muestra una representación más clara y fácil de los datos. Tal representación de los datos se denomina matriz.

En lugar de presentar los datos del consumo de materias primas de una empresa en una tabla (en nuestro ejemplo de una empresa que produce cerveza),

	levadura	malta	agua
1ª semana	8	4	12
2ª semana	10	6	5
3ª semana	7	8	5
4ª semana	11	7	9

Vamos a presentar estos datos de una forma más sencilla:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Además muchas de las relaciones en los negocios son proporcionales. Proporcional significa que los valores de las componentes de una variable y , se corresponden con k -veces los valores de las componentes de otra variable x , donde y es la variable dependiente. Por ejemplo, si una unidad de cantidad de levadura cuesta 8 € entonces dos unidades de cantidad costarán 16 €. Para esta clase de cálculo son necesarias sumas y productos de matrices.

Por lo tanto, la aplicación del cálculo de matrices en la escuela es posible y sensato, a pesar de su grado de dificultad. El cálculo de matrices presenta una clara y fácil

presentación de la coherencia lineal. Hay muchas diferencias entre el cálculo con números reales y el cálculo de matrices. Más adelante trataremos estos problemas.

¿Es este tema importante en los colegios? Para responder a esta pregunta debemos repasar el currículum austriaco.

En el currículum austriaco del sexto curso (niños de 12 a 13 años) nos encontramos en el capítulo “Básico” el siguiente párrafo:

Álgebra lineal y geometría analítica lineal³

Los requisitos para tratar con problemas geométricos 3-dimensionales, deberían ser las destrezas oportunas para trabajar con vectores y ecuaciones lineales con tres variables. Existen diversas técnicas para llevar a cabo un trabajo productivo y el desarrollo de un buen sentido espacial. Las matrices, así como los vectores, son un instrumento importante para presentar cálculos complejos, expresiones y relaciones de una forma más sencilla.

Otra ventaja de este tipo de representación es que se puede operar con matrices de la misma forma que con números reales.

Otro párrafo en el capítulo “Habilidades avanzadas; Reflejadas en matemáticas” (6º curso) dice:

Matrices y cálculo de matrices:

Son muchas las circunstancias, que se puedan describir usando matrices: suma de matrices, multiplicación escalar, multiplicación de una matriz por un vector, multiplicación de dos matrices. También podemos aplicar estos cálculos dentro y fuera del área matemática y probar la validez de las reglas de cálculo.

¿Dónde está la conexión con la economía? Como vimos en los ejemplos de la introducción, las matrices sirven para representar simples procesos de producción y flujos de producción.

Basándonos en el hecho de que la economía adquiere mucha importancia en la comprensión de los estudiantes en los procesos de producción simple y flujos de producción, y que los estudiantes ya han adquirido un sentido sobre la industria

³ véase en http://www.bmbwk.gv.at/medien/7045_MATHEMATIK_Oberstufe.pdf

antes de acabar el colegio, los ejemplos de economía-orientada deberían ser uno de los objetivos principales de los colegios. El objetivo del grupo-MaMaEuSch es el de proporcionar material didáctico y asesorar a los profesores en este campo.

Hoy día, el cálculo con matrices no es sólo importante en la economía, sino que alcanza también una gran importancia en las estadísticas, físicas y muchas otras áreas. La aplicación a los ordenadores contribuye positivamente a esto.

2. Introducción al cálculo de matrices

2.1. Veamos un ejemplo:

En 4 semanas, las dos compañías, Hirter y Zipfer, necesitan las siguientes cantidades de materia prima de levadura, malta y agua (unidades de cantidad: ME):

1ª semana:

Hirter: 8 ME levadura, 4 ME malta, 12 ME agua

Zipfer: 6 ME levadura, 3 ME malta, 12 ME agua.

2ª semana:

Hirter: 10 ME levadura, 6 ME malta, 5 ME agua

Zipfer: 9 ME levadura, 5 ME malta, 4 ME agua

3ª semana:

Hirter: 7 ME levadura, 8 ME malta, 5 ME agua

Zipfer: 7 ME levadura, 0 ME malta, 5 ME agua.

4ª semana:

Hirter: 11 ME levadura, 7 ME malta, 9 ME agua

Zipfer: 11 ME levadura, 6 ME malta, 5 ME agua.

2.2. Representación:

Los datos se representan de manera sencilla.

		levadura	malta	agua
Hirter	1 ^a semana	8	4	12
	2 ^a semana	10	6	5
	3 ^a semana	7	8	5
	4 ^a semana	11	7	9

resumiendo:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz de consumo de la compañía Hirter

		levadura	malta	agua
Zipfer	1 ^a semana	6	3	12
	2 ^a semana	9	5	4
	3 ^a semana	7	0	5
	4 ^a semana	11	6	5

resuminedo:

$$Z = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz de consumo de la compañía Zipfer.

2.3. Definición de matriz

Una matriz es un array rectangular de números.

Una matriz se compone de un determinado número de filas y columnas.

Los elementos horizontales, o elementos de las filas, indican el número de semanas del consumo de materias primas: filas = semanas.

Los elementos verticales, o los elementos de las columnas, indican la cantidad consumida de materia prima por cada semana: columnas = materias primas.

$$\text{semanas} \rightarrow \begin{pmatrix} & \text{materias - primas} & \\ \dots & . & \dots \end{pmatrix}$$

Normalmente, el primer elemento (número de filas) se nombra antes que el segundo elemento (numero de columnas). Por ejemplo la intersección de la 3ª fila y la 2ª columna en la matriz H representa la cantidad de malta necesitada en la 3ª semana.

Este elemento se denota como: $h_{32} = 8$ De la matriz de Hirter H: índice de la fila = 3, índice de la columna = 2.

$$\begin{array}{c} \text{Nombre} \\ \text{de la} \\ \text{matriz} \end{array} \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \\ \mathbf{a_{31}} & \mathbf{a_{32}} \end{pmatrix}$$

1ª columna

2ª columna

1ª fila

2ª fila

3ª fila

2.3.1. Convenios:

- Los elementos de las matrices se escriben entre paréntesis.
- Los nombres de las matrices se escriben con mayúsculas, mientras que los elementos interiores se escriben con letras minúsculas.

2.3.2. Tipo de matrices:

El tamaño de una matriz, como un bloque, se define mediante el número de filas y el número de columnas. En este caso, la siguiente matriz tiene cuatro filas y tres columnas. La matriz es de 4x3.

$$Z = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz de Hirter H tiene 4 filas (semanas) y 3 columnas (materia prima).

2.4. Comparación de consumos:

La representación de las dos compañías en forma de matrices nos permite una comparación más fácil:

$$H = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Ahora los elementos pueden ser comparados directamente y fácilmente. Para conseguir más información acerca de las dos compañías o compararlas, se requiere la suma y resta de matrices.

2.5. Operaciones aritméticas con matrices:

Indicación:

Estos tipos de sumas y restas, que se representan en el siguiente capítulo, son sólo factibles para matrices de igual tamaño. Dos matrices se pueden sumar sólo cuando el número de filas y columnas de las matrices son iguales.

2.5.1. Suma:

¿Qué cantidad de materia prima se necesita para ambas compañías en cada semana?

En la primera semana la compañía Hirter necesita 8 ME y la compañía Zipfer 6 ME de la materia prima levadura, lo que significa:

$8+6=14$ ME levadura,

lo mismo ocurre para la malta: $4+3=7$ ME malta,

y para el agua: $12+12=24$ ME agua.

Cuando las tablas están escritas en forma de array rectangulares de números, resulta más claro y rápido sumarlas.

Para sumar dos matrices del mismo tipo, por ejemplo las matrices de Hirter y Zipfer, simplemente se suman los elementos correspondientes.

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 24 \\ 19 & 11 & 9 \\ 14 & 8 & 10 \\ 22 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriz de
consumo de la
compañía
Hirter

Matriz de
consumo de
la compañía
Zipfer

Matriz de
consumo de
las dos
compañía

2.5.2. Resta:

¿Cuál es la diferencia de consumo de ambas compañías en cada semana?

En la primera semana la compañía Hirter necesita 8 ME y la compañía Zipfer 6 ME de la materia prima levadura, lo cual significa que la diferencia es de 2 ME:

$8-6=2$ ME levadura,

lo mismo ocurre para la malta: $4-3=1$ ME malta,

y para el agua: $12-12=0$ ME agua.

Cuando las tablas están escritas en forma de array rectangular de números, resulta más claro y rápido restarlas.

Para restar dos matrices del mismo tipo, por ejemplo las matrices de Hirter y Zipfer , simplemente se restan los elementos correspondientes.

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12 \\ 9 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 5 \\ 11 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

El resultado nos muestra que la compañía Zipfer nunca necesita más materia prima que la compañía Hirter. La demanda de materia prima para ambas compañías es la misma para cuatro periodos. Por lo tanto el valor de la diferencia es 0. Podría también darse el caso de obtener resultados negativos. Esto significaría que la compañía Zipfer necesita más materia prima que la compañía Hirter.

2.5.3. *Producto escalar:*

¿Cuánto es el consumo de materia prima por semana para 5 compañías como Hirter, suponiendo que necesitan la misma cantidad de materia prima que la compañía Hirter?

Para multiplicar una matriz por un número real es necesario multiplicar cada elemento por este número.

$$5 * \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 60 \\ 50 & 30 & 25 \\ 35 & 40 & 25 \\ 55 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

Conseguiríamos el mismo resultado si nos refiriésemos al consumo en 5 meses, suponiendo que cada mes tiene la misma cantidad de consumo.

$$5 * \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 60 \\ 50 & 30 & 25 \\ 35 & 40 & 25 \\ 55 & 35 & 45 \end{pmatrix}$$

Tales suposiciones de consumo constante son muy frecuentes. Ahora es posible multiplicarlas porque son **suposiciones proporcionales**, esto quiere decir que se multiplican los resultados de forma lineal.

2.5.4. Producto de dos matrices:

Consideremos que la compañía Hirter recibe materia prima de dos proveedores (Hop AG y Malt y co). Ahora la pregunta sería cuál de los dos proveedores es mejor. Teniendo en cuenta que los proveedores sólo pueden cambiar de una semana a otra.

	Hop AG	Malt y co.
Levadura	50	55
Malta	136	127
Agua	80	79

Esta tabla corresponde a la matriz de costes P, porque los elementos representan los costes de las tres materias primas para ambos proveedores

$$P = \begin{pmatrix} 50 & 55 \\ 136 & 127 \\ 80 & 79 \end{pmatrix}$$

A simple vista no es posible detectar cuál de los proveedores es el más barato. Con un simple cálculo obtendremos un resultado preciso.

De las suposiciones proporcionales obtenemos:

Costes de la compañía en Hop AG:

1ª semana: $8 \cdot 50 + 4 \cdot 136 + 12 \cdot 80 = 1904$

2ª semana: $10 \cdot 50 + 6 \cdot 136 + 5 \cdot 80 = 1716$

3ª semana: $7 \cdot 50 + 8 \cdot 136 + 5 \cdot 80 = 1838$

4ª semana: $11 \cdot 50 + 7 \cdot 136 + 9 \cdot 80 = 2222$

Costes de la compañía en Malt y co.:

1ª semana: $8 \cdot 55 + 4 \cdot 127 + 12 \cdot 79 = 1896$

2ª semana: $10 \cdot 55 + 6 \cdot 127 + 5 \cdot 79 = 1707$

3ª semana: $7 \cdot 55 + 8 \cdot 127 + 5 \cdot 79 = 1542$

4ª semana: $11 \cdot 55 + 7 \cdot 127 + 9 \cdot 79 = 2205$

Sumando, la tabla de costes resulta:

	Hop AG	Malt y co.
1ª semana	1904	1896
2ª semana	1716	1707
3ª semana	1838	1542
4ª semana	2222	2205

Lógicamente la matriz con los elementos de coste de los proveedores se denomina matriz de coste K.

$$K = \begin{pmatrix} 1904 & 1896 \\ 1716 & 1707 \\ 1838 & 1542 \\ 2222 & 2205 \end{pmatrix}$$

Podemos reconocer la siguiente regla para los elementos de la matriz K:

$k_{11}=1904$ = La primera fila de la matriz H (8,4,12) se multiplica por la primera columna de la matriz P (50,136,80) para cada elemento, (esto significa 1º con 1º : $8*50$, 2º con 2º : $4*136$ y 3º con 3º número: $12*80$) y sumarlos.

En otras palabras: La matriz de costes K resulta de la multiplicación de la matriz H (matriz de Hirter) y la matriz P (matriz de costes):

$$\begin{array}{c}
 i \left(\begin{array}{ccc} & & \\ - & - & - \\ & & \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} & & | \\ - & - & - \\ & & | \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ j \end{array} \\
 \mathbf{H} \qquad \mathbf{P} \qquad \mathbf{K}
 \end{array}$$

Este tipo de multiplicación se presenta muy a menudo. Veamos como se hace la multiplicación:

En nuestro ejemplo 50, 136, 80 y 55, 127, 79.

$$K = \begin{pmatrix} 8*50+4*136+12*80 & 8*55+4*127+12*79 \\ 10*50+6*136+5*80 & 10*55+6*127+5*79 \\ 7*50+8*136+5*80 & 7*55+8*127+5*79 \\ 11*50+7*136+9*80 & 11*55+7*127+9*79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 & 55 \\ 136 & 127 \\ 80 & 79 \end{pmatrix} = H * P$$

Recordemos que:

Este tipo de multiplicación, puede efectuarse sólo si el número de columnas de la primera matriz (en nuestro ejemplo 3) y el número de filas de la segunda matriz (en nuestro ejemplo también 3) es el mismo.

La matriz resultante tendrá las siguientes dimensiones:

$$\begin{matrix} (4 \times 3 \text{ matriz}) & * & (3 \times 2 \text{ matriz}) & = & 4 \times 2 \text{ matriz} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \uparrow \end{matrix}$$

Ej.:

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 12 \\ 10 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 5 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 50 & 55 \\ 136 & 127 \\ 80 & 79 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1904 & 1896 \\ 1716 & 1707 \\ 1838 & 1542 \\ 2222 & 2205 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo observamos que las dos matrices sólo pueden ser multiplicadas en una dirección. Porque: $(3 \times 2 \text{ Matriz}) * (4 \times 3 \text{ Matriz})$ **el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz!!!**

3. Ejemplos

3.1. Producto escalar:

Cinco estudiantes reciben las siguientes subvenciones (subvenciones para niños) por cada mes:

Nombres	Subvenciones para niños en € por mes	Becas en € por mes
<i>Maier</i>	200	423
<i>Huber</i>	168	378
<i>Pölzl</i>	193	564
<i>Belzik</i>	125	188
<i>Durchschlag</i>	219	297

a.) Calcula la cantidad de subvenciones para niños y la cantidad de becas, que recibe cada estudiante por año.

b.) ¿Cuál es el estudiante que recibe la subvención más alta?

$$a.) \quad 12 * \begin{pmatrix} 200 & 423 \\ 168 & 378 \\ 193 & 564 \\ 125 & 188 \\ 219 & 297 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 & 5076 \\ 2016 & 4536 \\ 1500 & 6768 \\ 2316 & 2256 \\ 2628 & 3564 \end{pmatrix}$$

$$b.) \quad G = \begin{pmatrix} 7476 \\ 6552 \\ 7268 \\ 4572 \\ 6192 \end{pmatrix}$$

El estudiante Maier recibe la subvención más alta; 7476 €.

3.2. Multiplicación de dos matrices:

La empresa VÖST Alpine en Linz quiere producir acero. Serán necesarias, entre otras materias primas, mineral hierro y carbón duro. La siguiente tabla nos muestra las demandas (en toneladas) de mineral hierro y carbón duro en un periodo de 3 semanas:

	mineral hierro	carbón duro
1ª semana	9t	8t
2ª semana	5t	7t
3ª semana	6t	4t

Existen tres proveedores diferentes que ofrecen estas materias primas. ¿Cuál es el proveedor que ofrece mayor beneficio?

En la siguiente tabla se muestran los costes por tonelada de materia prima para cada proveedor:

	<i>Ruhr AG</i>	<i>Iron Ore AG</i>	<i>Hard Coal and co.</i>
<i>mineral hierro</i>	540	630	530
<i>carbón duro</i>	420	410	440

Resultado:

$$\begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 5 & 7 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 540 & 630 & 530 \\ 420 & 410 & 440 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8220 & 8950 & 8290 \\ 5640 & 6020 & 5730 \\ 4920 & 5420 & 4940 \end{pmatrix}$$

Las sumas son:

	Sumas
<i>Ruhr AG</i>	18780
<i>Iron Ore AG</i>	20390
<i>Hard Coal and co.</i>	18960

Esto significa que la compañía Ruhr AG es el proveedor más económico y por lo tanto más rentable.