



# Mécanique des fluides

Tome 3 : Annales

*DEPARTEMENT DE MECANIQUE*

**Promotion 2014**  
**Année 2**  
**MEC432**

# **Mécanique des fluides**

## **Tome 3 : Annales**

*Laurent Jacquin*

30 novembre 2015

## **Couverture**

Libellule en vol stationnaire (photo : P. May LMCE - Hôpital Saint-Louis, Paris, 2005 ; effets graphiques : N. Planchard, 2013).

# Annales



## Table des matières

Contrôle classant X2011 .....	4
<b>L'éclatement d'une bulle à la surface de l'eau.</b> .....	5
<b>Dispersion de petites particules dans un écoulement turbulent</b> .....	11
<b>Réchauffement d'un fluide par frottement</b> .....	14
Contrôle classant X2012 .....	33
<b>La tornade</b> .....	34
<b>La vaporisation d'une goutte</b> .....	35
<b>Jets laminaires et jets turbulents</b> .....	48
Contrôle classant X2013 .....	67
<b>Le déversoir</b> .....	68
<b>Feuilles de thé dans une tasse</b> .....	71
<b>Panaches et thermiques</b> .....	78

## **Contrôle classant X2011**

# CONTRÔLE CLASSANT

## DE MECANIQUE DES FLUIDES

du 22 avril 2013

Sujet proposé par Christophe Josserand et Laurent Jacquin

\* \* \*

Durée : 3 heures

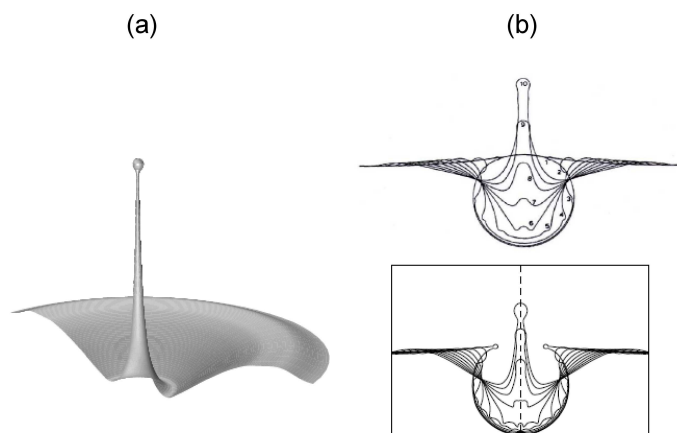
\* \* \*

- L'usage des cours polycopiés, des copies de transparent, des notes de cours et des notes de petites classes est autorisé.
- Les deux exercices et le problème sont tous indépendants
- Merci de rédiger, d'une part les deux exercices, et d'autre part le problème, sur des copies séparées.

### Exercice 1

#### L'éclatement d'une bulle à la surface de l'eau.

Les bulles formées par exemple par le déferlement des vagues ou la houle jouent un rôle important dans les échanges d'aérosols entre l'océan et l'atmosphère. En effet, ces bulles remontent ensuite à la surface et éclatent, éjectant des petites gouttelettes contenant des particules d'aérosols, qui peuvent être ainsi transportées sur de longues distances, voir figure 1.1 (a).



**Figure 1.1** - (a) Illustration de la formation d'une gouttelette lors de l'éclatement d'une bulle à la surface de l'eau (résultats obtenus par simulation numérique). (b) L'effondrement de la cavité laissée lorsque la bulle éclate donne naissance à un jet (comparaison entre une simulation numérique (bas) et la visualisation expérimentale de la forme de la cavité (haut)).

A l'aide de l'analyse dimensionnelle, nous allons chercher à déterminer la relation entre la vitesse d'éjection du jet créé par l'effondrement de la cavité formée lorsque la bulle éclate et son rayon caractéristique.

Pour cela, nous allons considérer que lorsque la bulle éclate, elle laisse une cavité hémisphérique de rayon  $R$ . L'effondrement de la cavité forme un jet sous l'action des forces capillaires et de la gravité. On notera la densité et la viscosité cinématique du liquide  $\rho_l$  et  $\nu_l$ , celles du gaz  $\rho_g$  et  $\nu_g$ , respectivement. La gravité est noté  $g$  et la tension de surface  $\gamma$ .

**1.1** - A l'aide de l'analyse dimensionnelle, déterminer la relation entre la vitesse du jet formé lors de l'éclatement de la bulle, que l'on note  $w_{jet}$ , et les sept paramètres du problème. On utilisera  $R$ ,  $\rho_l$  et  $\nu_l$  pour les grandeurs indépendantes constituant les unités fondamentales intrinsèques du problème.

### Réponse -

On a donc une relation entre 8 grandeurs :

$$\mathcal{F}(w_{jet}, R, \rho_l, \nu_l, \rho_g, \nu_g, g, \gamma) = 0$$

Le problème met en jeu 3 dimensions fondamentales (pas d'effet de température), donc il y a 5 paramètres indépendants. La matrice aux exposants aux dimensions vaut :

$$M \begin{matrix} & w_{jet} & R & \rho_l & \nu_l & \rho_g & \nu_g & g & \gamma \\ \begin{matrix} M \\ L \\ T \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Cette matrice est de rang 3. Comme suggéré dans l'énoncé, on choisit  $(R, \rho_l, \nu_l)$  pour les grandeurs indépendantes. On cherche donc 5 paramètres sans dimension de la forme :

$$\Pi_1 = \frac{w_{jet}}{R^{\alpha_1} \rho_l^{\beta_1} \nu_l^{\gamma_1}}, \Pi_2 = \frac{\rho_g}{R^{\alpha_2} \rho_l^{\beta_2} \nu_l^{\gamma_2}}, \Pi_3 = \frac{\nu_g}{R^{\alpha_3} \rho_l^{\beta_3} \nu_l^{\gamma_3}}, \Pi_4 = \frac{g}{R^{\alpha_4} \rho_l^{\beta_4} \nu_l^{\gamma_4}}, \Pi_5 = \frac{\gamma}{R^{\alpha_5} \rho_l^{\beta_5} \nu_l^{\gamma_5}}$$

On obtient sans difficulté :

$$\Pi_1 = \frac{w_{jet}}{\nu_l / R}, \Pi_2 = \frac{\rho_g}{\rho_l}, \Pi_3 = \frac{\nu_g}{\nu_l}, \Pi_4 = \frac{g}{\nu_l^2 / R^3}, \Pi_5 = \frac{\gamma}{\rho_l \nu_l^2 / R}$$



D'où la relation cherchée :

$$w_{jet} = \frac{v_l}{R} \overline{\mathcal{F}} \left( \Pi_2 = \frac{\rho_g}{\rho_l}, \Pi_3 = \frac{v_g}{v_l}, \Pi_4 = \frac{gR^3}{v_l^2}, \Pi_5 = \frac{\gamma R}{\rho_l v_l^2} \right)$$

**1.2** - On peut considérer que l'influence du gaz extérieur sur la formation du jet peut être négligée. Montrer alors que la vitesse du jet  $w_{jet}$ , dépend de deux nombres sans dimension, le nombre de Ohnesorge, que l'on notera Oh, et le nombre de Bond, noté Bo, définis par:

$$(1.1) \quad Oh = v_l \sqrt{\frac{\rho_l}{\gamma R}},$$

$$(1.2) \quad Bo = \frac{\rho_l R^2 g}{\gamma},$$

soit :

$$(1.3) \quad w_{jet} = \frac{v_l}{R} \overline{\mathcal{G}}(Oh, Bo)$$

### Réponse -

Par hypothèse, on élimine donc les paramètres sans dimensions dépendants des propriétés du gaz, soit :

$$w_{jet} = \frac{v_l}{R} \overline{\mathcal{F}} \left( \Pi_4 = \frac{gR^3}{v_l^2}, \Pi_5 = \frac{\gamma R}{\rho_l v_l^2} \right)$$

Les paramètres que l'on nous demande de faire apparaître sont :

$$\begin{cases} Oh = v_l \sqrt{\frac{\rho_l}{\gamma R}} = \frac{1}{\sqrt{\Pi_5}} \\ Bo = \frac{\rho_l R^2 g}{\gamma} = \frac{\Pi_4}{\Pi_5} \end{cases}$$

On peut donc écrire effectivement :

$$w_{jet} = \frac{v_l}{R} \overline{\mathcal{G}} \left( Oh = v_l \sqrt{\frac{\rho_l}{\gamma R}}, Bo = \frac{\rho_l R^2 g}{\gamma} \right)$$

**1.3** - La viscosité de l'eau étant relativement faible, on cherche la solution du problème dans la limite  $\nu_l \rightarrow 0$ . En supposant admis que dans cette limite la vitesse du jet  $w_{jet}$  reste finie et non nulle, montrer que :

$$(1.4) \quad w_{jet} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}} \bar{\mathcal{H}}(\text{Bo})$$

**Réponse -**

En remarquant que :

$$\frac{\nu_l}{R} = \text{Oh} \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}},$$

on peut écrire la relation obtenue dans la question précédente sous la forme :

$$w_{jet} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}} \text{Oh} \bar{\mathcal{G}} \left( \text{Oh} = \nu_l \sqrt{\frac{\rho_l}{\gamma R}}, \text{Bo} = \frac{\rho_l R^2 g}{\gamma} \right)$$

Soit :

$$w_{jet} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}} \bar{\mathcal{H}} \left( \text{Oh} = \nu_l \sqrt{\frac{\rho_l}{\gamma R}}, \text{Bo} = \frac{\rho_l R^2 g}{\gamma} \right)$$

En supposant, comme précisé dans l'énoncé, que  $\lim_{\text{Oh} \rightarrow 0} w_{jet} \sim \lim_{\text{Oh} \rightarrow 0} \bar{\mathcal{H}}(\text{Oh}, \text{Bo})$  reste finie et non nulle, en éliminant la dépendance vis-à-vis de Oh, on obtient la relation cherchée :

$$w_{jet} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}} \bar{\mathcal{H}} \left( \text{Bo} = \frac{\rho_l R^2 g}{\gamma} \right)$$

**1.4** - Déterminer la loi que l'on obtient dans la limite où l'on peut négliger la gravité par rapport aux forces capillaires, soit  $\text{Bo} \rightarrow 0$

**Réponse -**

Si l'on néglige la gravité dans la relation (1.4) :

$$w_{jet} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}} \times \lim_{Bo \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}(Bo)$$

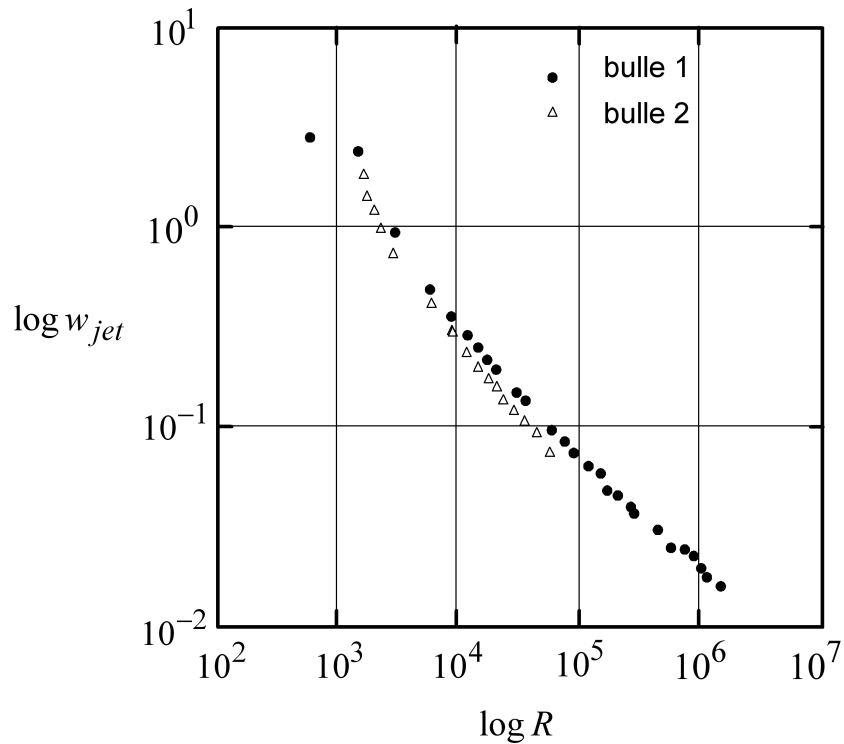
:  
Soit :

$$w_{jet} = A \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}}$$

où :

$$A = \lim_{Bo \rightarrow 0} \overline{\mathcal{H}}(Bo)$$

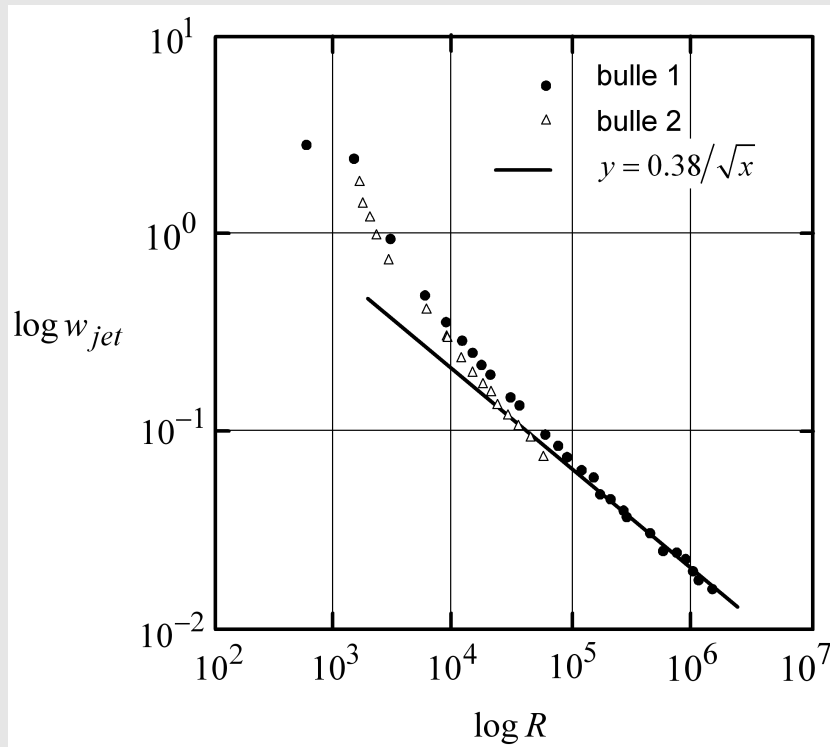
**1.5** - Testez la validité de votre dernier résultat sur la figure 1.2 ci-dessous qui montrent en échelle log-log (les unités sont arbitraires) la vitesse du jet en fonction du rayon de la bulle obtenue par simulation numérique dans le cas où la gravité est nulle.



**Figure 1.2** - Vitesse  $w_{jet}$  du jet en fonction du rayon  $R$  de la bulle en échelles log-log. Les résultats sont obtenus par simulations numériques réalisées en gravité nulle. Les unités sont arbitraires (l'une des bulles calculées est hémisphérique ; l'autre est de forme un peu différente).

**Réponse -**

Comme le prouve la figure ci-dessous, pour les grandes valeurs de  $R$ , donc les grands valeurs du nombre de Bond, on obtient une loi en  $1/\sqrt{R}$  ce qui est bien conforme au résultat obtenu dans la question précédente.



**Figure 1.2** - Vitesse  $w_{jet}$  du jet en fonction du rayon  $R$  de la bulle en échelles log-log. Les résultats sont obtenus par simulations numériques réalisées en gravité nulle. Les unités sont arbitraires (l'une des bulles calculées est hémisphérique ; l'autre est de forme un peu différente).

**1.6** - Dans l'autre limite, celle où l'on peut négliger la tension de surface  $\gamma$ , donc pour  $Bo \rightarrow \infty$ , montrer que l'on obtient :

$$(1.5) \quad w_{jet} = B\sqrt{Rg}$$

où  $B$  est une constante.

**Réponse -**

En repartant de la relation (1.4) :

$$w_{jet} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}} \overline{\mathcal{H}} \left( \text{Bo} = \frac{\rho_l R^2 g}{\gamma} \right),$$

on voit que l'élimination de l'influence de la tension de surface impose que :

$$\lim_{\text{Bo} \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{H}} \left( \text{Bo} = \frac{\rho_l R^2 g}{\gamma} \right) \sim \sqrt{\text{Bo}} = \sqrt{\frac{\rho_l R^2 g}{\gamma}}$$

On obtient dans ce cas :

$$w_{jet} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_l R}} \times \sqrt{\frac{\rho_l R^2 g}{\gamma}} \times \text{const.} = B \sqrt{R g}$$

## Exercice 2

### Dispersion de petites particules dans un écoulement turbulent

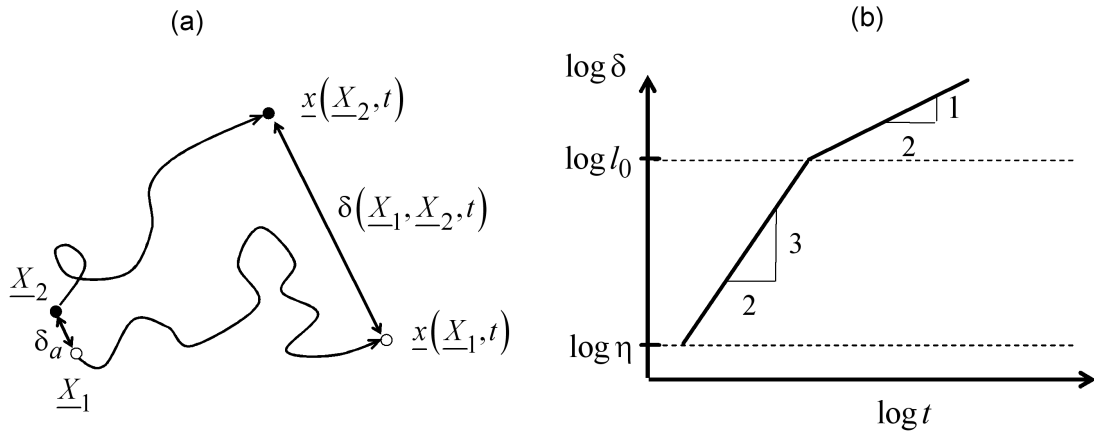
Il s'agit d'étudier la dispersion de petites particules dans un écoulement turbulent.

Conformément à la figure **2.1 (a)** ci-dessous, à l'instant  $t = 0$  on considère deux particules de très petites tailles localisées en  $\underline{X}_1, \underline{X}_2$  (par exemple, deux fines gouttelettes produites par le processus d'échange atmosphère-océan décrit dans l'exercice précédent). Ces particules sont plongées dans une turbulence que l'on supposera isotrope et sans vitesse moyenne. A l'instant  $t = 0$ , on suppose qu'elles sont séparées d'une distance  $\delta_a = \|\underline{X}_2 - \underline{X}_1\| \ll l_0$  où  $l_0$  désigne la taille des plus grandes structures du mouvement turbulent où s'effectue l'injection de l'énergie de cette turbulence.

On souhaite déterminer l'écart quadratique moyen :

$$(2.1) \quad \delta(t) = \langle \delta(\underline{X}_1, \underline{X}_2, t) \rangle = \langle \|\underline{x}(\underline{X}_2, t) - \underline{x}(\underline{X}_1, t)\| \rangle$$

de ces particules à tout instant  $t$ , où  $\langle . \rangle$  désigne une moyenne sur un grand ensemble de tels couples de particules.



**Figure 2.1** – Dispersion lagrangienne de deux petites particules dans un écoulement turbulent : (a) définitions, (b) résultats.

Les résultats de mesures de  $\delta(t)$  sont reportés sur la figure **2.1 (b)** sous forme schématique et en échelle log-log (les unités sont arbitraires). On observe que pour  $\eta \ll \delta(t) \ll l_0$ , où  $\eta$  désigne la plus petite échelle du mouvement turbulent (l'échelle de Kolmogorov), la loi obtenue est de la forme :

$$(2.2) \quad \delta(t) \sim t^{3/2}$$

Cette loi porte le nom de **loi de Richardson**. C'est une loi de dispersion dite « anormale » car elle diffère notablement de la loi « en racine carrée » ( $\sim t^{1/2}$ ) qui caractérise les processus usuels de dispersion et de diffusion moléculaire pilotés par les effets de marche aléatoire de molécules indépendantes.

**2.1** - En appliquant les principes de la théorie phénoménologique de Richardson-Kolmogorov, démontrer au moyen d'une analyse dimensionnelle la loi (2.2).

### Réponse -

Il faut introduire la quantité physique clef qui permet de décrire le processus interne dynamique qui caractérise la turbulence est le taux de dissipation par unité de masse  $\varepsilon_0$ .

Sa dimension est celle d'une vitesse au cube sur une longueur :

$$[\varepsilon_0] = \frac{L^2}{T^3}$$

Dans ce problème, il y a deux dimensions fondamentales, la longueur  $L$  et le temps  $T$ . On cherche une relation du type :

$$\mathcal{F}(\delta, t, \varepsilon_0) = 0$$

Soit pour la matrice des exposants aux dimensions :

$$\begin{matrix} & \delta & t & \varepsilon_0 \\ L & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ T & \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Le rang vaut 2, donc on trouve une relation du type :

$$\Pi = \frac{\delta}{\varepsilon_0^\alpha t^\beta} = \text{const.}$$

On obtient:

$$\begin{matrix} L \\ T \end{matrix} \begin{cases} 1 = 2\alpha \\ 0 = -3\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}.$$

Soit :

$$\delta = \text{const.} \times \varepsilon_0^{1/2} t^{3/2}$$

**2.2** - Expliquer pourquoi, comme tracé sur la figure **2.1 (b)**, on récupère une loi usuelle, du type  $\delta(t) \sim t^{1/2}$  lorsque  $\delta(t) \gg l_0$  ?

### Réponse -

Quand  $\delta(t) \gg l_0$ , les deux particules sont transportées par des mouvements turbulents dont les plus grandes échelles sont maintenant indépendantes. Elles sont donc soumises à une marche aléatoire correspondante à un mouvement Brownien, mais de nature macroscopique. On retrouve alors une loi de dispersion « normale », en  $\sqrt{t}$ , dont le coefficient est maintenant de nature macroscopique.

## Problème

### Réchauffement d'un fluide par frottement

Nous allons étudier dans ce problème le champ de température qui s'établit dans un fluide à cause de l'échauffement provenant du frottement visqueux.

#### 3.1. Formulation du problème

##### ➤ Enoncé

Conformément à la figure (3.1) ci-dessous on considère un fluide newtonien, incompressible homogène non pesant de masse volumique  $\rho$  dans un semi espace  $z \geq 0$  au dessus d'une plaque plane située en  $z=0$ , de très grande extension, en mouvement de translation uniforme de vitesse  $U_0 \underline{e}_x$ . La pression du fluide au repos est  $p_0$ . On supposera que la viscosité dynamique  $\nu = \eta/\rho$ , la conductibilité thermique  $K$  et la chaleur spécifique  $c$  du fluide sont des constantes et indépendantes de la température. On notera le coefficient de diffusion thermique  $\chi$  tel que  $K = \rho c \chi$ . On négligera les forces de volume ainsi que toute source volumique de chaleur.

On considérera l'écoulement **bidimensionnel** dans le plan  $Oxz$  créé par le déplacement horizontal de la plaque. On supposera la plaque infiniment longue et l'on supposera alors que les différents champs de l'écoulement sont invariants dans la direction  $\underline{e}_x$  :

$$(3.1.1) \quad \begin{cases} \underline{u}(\underline{x}, t) = u(z, t) \underline{e}_x \\ p(\underline{x}, t) = p(z, t) \\ T(\underline{x}, t) = T(z, t) \end{cases}$$

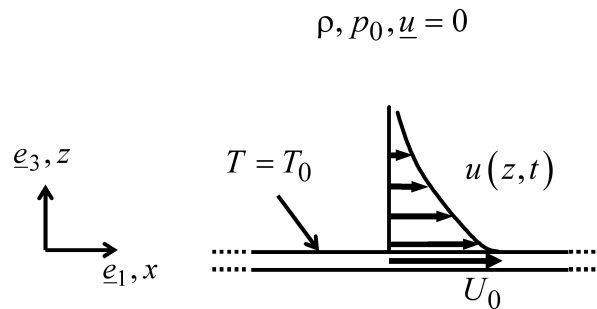
Par ailleurs, la plaque est supposée **isotherme**, maintenue à température constante  $T_0$  ; le fluide quant à lui est chauffé par le frottement visqueux induit par l'écoulement.

##### ➤ Equations

Ces champs sont solutions des équations suivantes :



$$(3.1.2) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \rho \frac{d\underline{u}}{dt} = \rho \left( \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} \right) = -\underline{\operatorname{grad}} p + \eta \Delta \underline{u} \\ \rho c \frac{dT}{dt} = \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T \right) = 2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} + K \Delta T \end{cases}$$



**Figure 3.1** - Ecoulement de fluide incompressible homogène au dessus d'une plaque plane en translation (premier problème de Stokes). La plaque est supposée isotherme.

**3.1** - Les champs dynamiques  $\underline{u}$  et  $p$  sont découplés du champ de température  $T$ . Expliquer pourquoi. L'inverse est-il vrai ?

#### Réponse -

La masse volumique  $\rho$  ainsi que la viscosité dynamique de cisaillement  $\eta$  étant constante, l'équation de la dynamique est indépendante de la température  $T$ . Par contre, le terme d'advection  $\underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} T$  et le terme  $2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}$  qui traduit la production de chaleur due au frottement visqueux rendent le champ de température dépendant du champ de vitesse.

**3.1** - Sauf contre indication, on utilisera dans la suite du problème le champ de variation de température :

$$(3.1.3) \quad T'(z, t) = T(z, t) - T_0$$

Ecrire les conditions aux limites que doivent satisfaire le champ de vitesse  $u(z, t)$  et le champ de variation de la température  $T'(z, t)$  sur la plaque ( $z = 0$ ).

**Réponse -**

Sur la plaque, on a les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u(z=0, t) = U_0 & \text{- adhérence} \\ T'(z=0, t) = 0 & \text{- plaque isotherme} \end{cases} ;$$

**3.3 -** Quelle équation du système (3.1.2) est alors automatiquement satisfaite ?

**Réponse -**

L'équation de continuité :

$$\operatorname{div} \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

avec  $u = u(z, t)$  et  $w = 0$ , est automatiquement satisfaite.

**3.4 -** Montrer que dans le cadre de ces hypothèses, le système (3.1.2) se ramène à :

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\nu}{c} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \chi \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \end{cases}$$

**Réponse -**

En remplaçant le champ de vitesse par sa formulation (3.1.1)  $\underline{u} = u(z, t) \underline{e}_x$  dans la première équation (3.1.2), on trouve que le terme d'advection  $\nabla \underline{u} \cdot \underline{u}$  s'annule exactement. En effet, on a :

$$\nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z) \cdot (u \underline{e}_x) = u \frac{\partial u}{\partial x} (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z) \cdot \underline{e}_x = 0$$

Après projection selon  $\underline{e}_x$  et  $\underline{e}_z$ , il reste :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

La pression étant invariante selon la direction  $z$  :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p(z \rightarrow \infty, t)}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x} = 0$$

D'où la première équation (3.1.4).

En remplaçant dans l'équation thermique (3.1.2) le champ de température par celui des écarts de température (3.1.3), on trouve aussi que le terme d'advection de  $T'$  s'annule exactement. En effet, on a :

$$\underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} T' = (u \underline{e}_x) \cdot \left( \frac{\partial T'}{\partial z} \underline{e}_z \right) = u \frac{\partial T'}{\partial z} \underline{e}_x \cdot \underline{e}_z = 0$$

Pour le terme de dissipation  $2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}}$ , le tenseur des taux de déformation s'écrit :

$$\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2} \frac{du}{dz} (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} &= \frac{1}{4} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) : (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 [ \underbrace{(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3) : (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3)}_{=0} + \underbrace{(\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1) : (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1)}_{=0} + 2 \underbrace{(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3) : (\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1)}_{=1} ] \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\epsilon = 2\eta \underline{\underline{d}} : \underline{\underline{d}} = \eta \left( \frac{du}{dz} \right)^2$$

L'équation de bilan thermique se ramène donc à :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{v}{c} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \chi \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2}$$

Au bilan on obtient :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \eta \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

D'où :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{v}{c} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

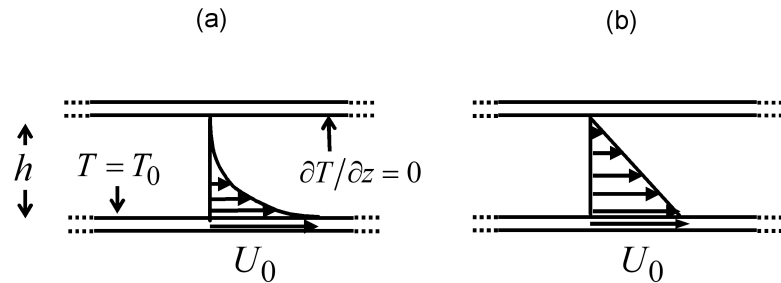
Cela correspond à la seconde équation (3.1.4).

Dans la suite, nous allons étudier tour à tour deux situations particulières : l'**écoulement permanent de Couette plan** obtenu lorsque l'on ajoute une plaque fixe au dessus de la plaque en mouvement, et l'**écoulement instationnaire de Stokes** obtenu lorsque rien de vient perturber le mouvement du fluide provoqué par celui de la plaque mobile (premier problème de Stokes).

### 3.2. Ecoulement permanent de Couette plan

Nous considérons ici que l'écoulement est confiné entre la plaque isotherme en translation située en  $z=0$  décrite ci-dessus et une seconde plaque maintenue au repos, située en  $z=h$ . Conformément à la figure 3.2, l'**écoulement de Couette plan** correspond à l'écoulement permanent obtenu sur des temps très grands devant le temps visqueux  $\tau = h^2/\nu$  nécessaire pour que le mouvement du fluide induit par le mouvement de la plaque mobile située en  $z=0$  se propage jusqu'à la plaque supérieure, située en  $z=h$ .

Comme indiqué sur la figure 3.2 (a) on fera l'hypothèse que la plaque située en  $z = h$  est **thermiquement isolante** c'est à dire que le flux de chaleur s'annule sur cette plaque.



**Figure 3.2** - Profils de vitesse dans un écoulement entre une plaque mobile et une plaque immobile parallèle : (a) régime instationnaire  $t \leq h^2/\nu$ , (b) régime stationnaire  $t \gg h^2/\nu$  : écoulement de Couette. La plaque inférieure est supposée isotherme ; la plaque supérieure est supposée isolante.

**3.5** - Ecrire les conditions aux limites que satisfont  $u$  et  $T'$  sur la plaque supérieure en  $z = h$ .

**Réponse -**

Ces conditions s'écrivent :

$$u(h, t) = 0, \quad \frac{\partial T'}{\partial z}(h, t) = 0$$

**3.6** - On cherche  $u(z)$  et  $T'(z)$  correspondant à l'écoulement de Couette permanent. On introduit pour cela les variables adimensionnées :

$$(3.2.1) \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_0}, \quad \bar{T} = \frac{cT'}{U_0^2}$$

Montrer que le système d'équations (3.1.4) s'écrit en variables adimensionnelles :

$$(3.2.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \\ \text{Pr} \left( \frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \end{cases}$$

où  $Pr = \nu/\chi$  est le nombre de Prandtl.

**Réponse -**

On introduit (3.2.1) dans les équations (3.1.4), dans lesquelles on aura supprimé au préalable les termes instationnaires. Pour l'équation de  $u$  on obtient immédiatement la première équation (3.2.2). Pour l'équation de  $T'$ , on obtient :

$$0 = \left( \frac{\nu U_0^2}{c h^2} \right) \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 + \left( \frac{\chi U_0^2}{c h^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2}$$

D'où, après simplification, la seconde équation (3.2.2).

**3.7 -** Ecrire l'ensemble des conditions aux limites pour les variables adimensionnées.

**Réponse -**

Ces conditions aux limites sont :

- Pour la vitesse :

$$\bar{u}(0) = 1, \bar{u}(1) = 0$$

- Pour la température :

$$\bar{T}(0) = 0, \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}(1) = 0$$

**3.8 -** Calculer le champ de vitesse et le champ des écarts de température.

**Réponse -**

Pour le champ de vitesse on doit résoudre :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0 \\ \bar{u}(0) = 1, \bar{u}(1) = 0 \end{cases}$$

Cela donne immédiatement :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = A \Rightarrow \bar{u}(\bar{z}) = A\bar{z} + B \\ \bar{u}(0) = 1 \Rightarrow B = 1 \\ \bar{u}(1) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B = -1 \end{cases}$$

Soit :

$$\bar{u}(\bar{z}) = 1 - \bar{z}$$

Pour le champ de température, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \text{Pr} \left( \frac{d\bar{u}}{d\bar{z}} \right)^2 + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \\ T(0) = 0, \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}}(1) = 0 \end{cases}$$

Soit compte tenu de la solution obtenue pour  $\bar{u}$  :

$$\begin{cases} \text{Pr} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = 0 \\ T(0) = 0, \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}}(1) = 0 \end{cases}$$

En intégrant :

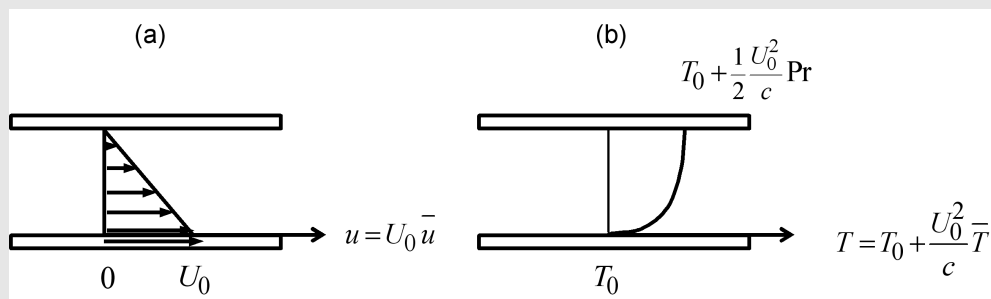
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} = -\text{Pr} \Rightarrow \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} = -\text{Pr} \bar{z} + A = \text{Pr}(1 - \bar{z}) \\ \Rightarrow \bar{T}(\bar{z}) = \text{Pr} \bar{z} - \frac{1}{2} \text{Pr} \bar{z}^2 + B \\ \bar{T}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}}(1) = 0 \Rightarrow A = \text{Pr} \end{cases}$$

Soit :

$$\bar{T}(\bar{z}) = \text{Pr} \bar{z} \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{z} \right)$$

**3.9** - Tracer sur une même figure les profils dimensionnels de la vitesse  $u(z)$  et de la température  $T(z)$ .

**Réponse :**



**3.10** - En déduire finalement que l'élévation de température sur la plaque située en  $z = h$  vaut :

$$(3.2.3) \quad T' = T(z=h) - T(z=0) = \frac{\text{Pr} U_0^2}{2c}$$

**Réponse -**

La solution précédente donne :

$$\bar{T}(1) = \frac{1}{2} \text{Pr}$$

Soit :

$$\frac{c}{U_0^2} T'(z=h) = \frac{c}{U_0^2} [T(z=h) - T(z=0)] = \frac{1}{2} \text{Pr}$$

D'où la relation (3.2.3)



**3.11** - Calculer cette élévation de température  $T'$  en degrés Celsius pour de l'air, tel que  $Pr \approx 0.7$   $c \approx 1000 J.kg^{-1}.K^{-1}$ . On considèrera deux valeurs de la vitesse  $U_0$  :

(a)  $U_0 = 10 m.s^{-1}$

(b)  $U_0 = 100 m.s^{-1}$

**Réponse -**

Pour la cas (a) :  $T' = \frac{0.7 \times 10^2}{210^3} = 0.035 K$

Pour la cas (b) :  $T' = \frac{0.7 \times 10^4}{210^3} = 3.5 K$

**3.12** - On rappelle que les critères de validité de l'approximation du fluide incompressible sont :

$$(3.2.4) \quad \begin{cases} M_0^2 \ll 1 \\ \alpha |\delta T| \ll 1 \end{cases}$$

où  $\alpha$  désigne le coefficient de dilatation thermique isobare. Vérifier que pour l'air dans les conditions ambiantes, où la vitesse du son vaut  $c_0 \approx 300 m.s^{-1}$  et où  $\alpha \approx 10^{-3} K^{-1}$ , ces deux critères sont respectés même pour le cas (b).

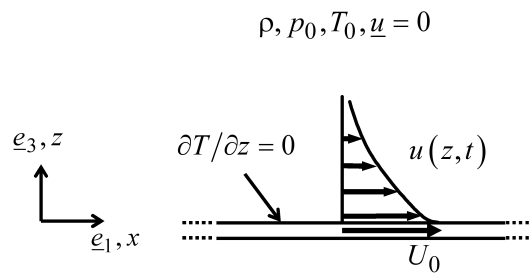
**Réponse -**

Pour  $c_0 \approx 300 m.s^{-1}$ ,  $U_0 = 100 m.s^{-1}$ , on obtient  $M_0^2 = U_0^2 / c_0^2 \approx 0.1$  ce qui correspond à la limite extrême du premier critère (3.2.4). Pour  $|\delta T| = 3.5 K$ ,  $\alpha \approx 10^{-3} K^{-1}$ , on obtient:  $\alpha |\delta T| = 3.5 \times 10^{-3} \ll 1$ . Les effets de dilatation volumique sont donc également négligeables. On en conclut que même dans ce cas extrême (b), le réchauffement du fluide par le frottement ne remet pas en question l'hypothèse du fluide incompressible.

### 3.3. Premier problème de Stokes : solution autosemblable pour la température

On revient ici au premier problème de Stokes en considérant de nouveau qu'à l'instant  $t=0$ , la plaque, située en  $z=0$  est mise en mouvement avec une vitesse  $U_0 \underline{e}_x$  dans un fluide initialement au repos. Le fluide situé dans le domaine semi-infini ( $0 \leq z < \infty$ ) est mis progressivement en mouvement par le frottement. L'écoulement et le champ de température sont donc maintenant instationnaires. Le champ de température est supposé initialement homogène, de valeur  $T_0$ . On supposera aussi que la température garde cette valeur à tout instant en  $z \rightarrow \infty$ .

Conformément à la figure 3.3 la plaque en mouvement en  $z=0$  est maintenant supposée **thermiquement isolante**, et non plus isotherme comme dans le paragraphe 3.1 du problème.



**Figure 3.3** – Premier problème de Stokes pour le cas d'une plaque plane isolante.

**3.13** - On recherche une solution autosemblable du système d'équations (3.1.4) que nous réécrivons de nouveau ci-dessous :

$$(3.3.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\nu}{c} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \end{cases}$$

#### Rappel

Le problème dynamique constitué par les équations :

$$(3.3.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ u(z, t=0) = 0 & \text{- condition initiale} \\ u(z=0, t) = U_0 & \text{- adhérence} \\ u(z=\infty, t) = 0 & \text{- repos} \end{cases}$$

a été traité au chapitre **10**, paragraphe **10.7**. Comme montré alors, la recherche d'une solution autosemblable aboutit à :

$$(3.3.3) \quad \frac{u}{U_0} = f\left(\eta = \frac{z}{\sqrt{\nu t}}\right),$$

qui met en lumière la variable de similitude :

$$(3.3.4) \quad \eta(z, t) \equiv \frac{z}{\sqrt{\nu t}}$$

En remplaçant (3.3.3) dans l'équation de la dynamique (3.3.2), on avait abouti à l'équation différentielle ordinaire :

$$(3.3.5) \quad \begin{cases} f'' + \frac{1}{2}\eta f' = 0 \\ f(0) = 1, f(\infty) = 0 \end{cases},$$

dont la solution est :

$$(3.3.6) \quad u = U_0 f(\eta),$$

où :

$$(3.3.7) \quad \begin{cases} f(\eta) = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\eta\right) \\ \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \end{cases}$$

**Fin du rappel**

En appliquant de nouveau la technique de recherche d'une solution autosemblable au problème thermique à sept paramètres  $(T', z, t, u, v, c, \chi)$  :

$$(3.3.8) \quad \begin{cases} \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{v}{c} \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \chi \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \\ T'(z, t=0) = 0 & \text{- condition initiale} \\ T'(z \rightarrow \infty, t) = 0 & \text{- fluide isotherme à l'∞} \\ \frac{\partial T'}{\partial z}(z=0, t) = 0 & \text{- paroi isolante} \end{cases}$$

avec  $u$  défini par la solution autosemblable (3.3.6), montrer que l'on aboutit à une solution de la forme :

$$(3.3.9) \quad T' = \frac{U_0^2}{c} h(\eta, \text{Pr})$$

où  $\eta = z/\sqrt{vt}$  désigne la variable de similitude dynamique (3.3.4).

### Réponse -

On considère le **problème thermique (3.3.8)**. On applique sur ce système la démarche vue en cours pour la recherche d'une solution autosemblable.

On procède selon 3 étapes :

**Etape 1 :** on applique à l'ensemble des variables et paramètres du problème, à savoir  $(T', z, t, u, v, c, \chi)$ , le changement de variables correspondant à la **transformation affine** suivante :

$$T' = a \tilde{T}, z = b \tilde{z}, t = c \tilde{t}, u = d \tilde{u}, v = e \tilde{v}, c = f \tilde{c}, \chi = g \tilde{\chi}$$

où  $(a, b, c, d, e, f, g)$  désignent sept facteurs multiplicatifs arbitraires. Le problème (3.3.8) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{c} \frac{\partial \tilde{T}'}{\partial \tilde{t}} = \frac{ed^2}{fb^2} \frac{\tilde{v}}{\tilde{c}} \left( \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} \right)^2 + \frac{ga}{b^2} \tilde{\chi} \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \\ aT'(z, t=0) = 0 \quad \text{- condition initiale} \\ aT'(z \rightarrow \infty, t) = 0 \quad \text{- fluide isotherme à } l^\infty \\ \frac{a}{b} \frac{\partial T'}{\partial z}(z=0, t) = 0 \quad \text{- paroi isolante} \end{array} \right.$$

**Étape 2** - En s'appuyant sur le **principe d'invariance dimensionnelle**, on cherche parmi les groupes de transformation multiplicatifs  $(a, b, c, d, e, f, g)$  ceux qui laissent le problème initial (3.3.8) invariant dans cette transformation. On voit immédiatement à partir du système d'équations précédent que cette classe de transformations est définie par les deux relations suivantes :

$$\frac{a}{c} = \frac{ed^2}{fb^2} = \frac{ga}{b^2}$$

**Remarque -**

On note que les conditions initiales ne procurent aucune condition sur les éléments du groupe de transformation.

De deux égalités ci-dessus on déduit deux conditions :

$$b^2 = gc, a = \frac{ed^2}{fg}$$

On a donc 5 facteurs libres et 2 facteurs liés par les deux relations ci-dessus.

**Étape 3** - Toujours selon le **principe d'invariance dimensionnelle**, si  $\mathcal{F}(T', z, t, u, v, c, \chi) = 0$  désigne la solution du problème initial, après application de cette transformation, alors :

$$\tilde{\mathcal{F}} \left( \tilde{u} = \frac{T'}{a}, \tilde{z} = \frac{z}{b}, \tilde{t} = \frac{t}{c}, \tilde{u} = \frac{u}{d}, \tilde{v} = \frac{v}{e}, \tilde{c} = \frac{c}{f}, \tilde{\chi} = \frac{\chi}{g} \right) = 0$$

Si l'on choisit alors pour les **cinq facteurs libres** :

$$c = t, d = u, e = v, f = c, g = \chi,$$

alors les deux facteurs liés restant,  $a$  et  $b$ , vérifient :

$$\begin{cases} b = \sqrt{\chi t} \\ a = \frac{v}{\chi} \frac{u^2}{c} = \text{Pr} \frac{u^2}{c}, \end{cases}$$

La solution obtenue après application du groupe de transformation vérifie donc :

$$\tilde{\mathcal{F}} \left( \frac{T'}{\text{Pr} u^2/c}, \frac{z}{\sqrt{\chi t}}, 1, 1, 1, 1, 1 \right) = 0.$$

Soit :

$$T' = \text{Pr} \frac{u^2}{c} g \left( \frac{z}{\sqrt{\chi t}} \right)$$

En remarquant que  $z/\sqrt{\chi t} = \sqrt{\text{Pr}} z/\sqrt{\nu t} = \sqrt{\text{Pr}} \eta$ , et tenant compte de la solution dynamique (3.3.6), on peut bien mettre cette solution sous la forme demandée :

$$T' = \frac{U_0^2}{c} h(\eta, \text{Pr})$$

avec

$$h(\eta, \text{Pr}) = \text{Pr} f'^2(\eta) g(\sqrt{\text{Pr}} \eta)$$

**3.14** - Montrer que l'on peut ramener ainsi le problème thermique (3.3.8) à l'équation différentielle ordinaire :

$$(3.3.10) \quad \begin{cases} h'' + \frac{1}{2} \text{Pr} \eta h' + \text{Pr} f'^2 = 0 \\ h(\infty, \text{Pr}) = 0 \\ h'(0, \text{Pr}) = 0 \end{cases}$$

**Réponse -**

On obtient successivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\eta}{t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{vt}} = \frac{\eta}{z} \\ \frac{\partial T'}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{U_0^2}{c} \frac{\eta}{t} h' \\ \frac{\partial T'}{\partial z} = \frac{U_0^2}{c} \frac{1}{\sqrt{vt}} h' \\ \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} = \frac{U_0^2}{c} \frac{1}{vt} h'' \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = U_0^2 \frac{1}{vt} f'^2 \end{array} \right.$$

En remplaçant cela dans le système (3.3.8), on obtient, après simplifications :

$$\left\{ \begin{array}{l} h'' + \frac{1}{2} \text{Pr} \eta h' + \text{Pr} f'^2 = 0 \\ h(\infty, \text{Pr}) = 0 \quad \text{- condition initiale et fluide isotherme à l'∞} \\ h'(0, \text{Pr}) = 0 \quad \text{- paroi isolante} \end{array} \right.$$

**3.15** - Intégrer cette équation en tenant compte de (3.3.7) et en déduire que le flux de chaleur admet pour expression :

$$(3.3.11) \quad h'(\eta) = -\frac{1}{\pi} \text{Pr} e^{-\text{Pr} \frac{\eta^2}{4}} \int_0^\eta e^{-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \text{Pr}\right) s^2} ds$$

**Réponse -**

La solution de l'équation homogène (3.3.10) est :

$$h'' + \frac{1}{2} \text{Pr} \eta h' = 0 \Rightarrow \frac{h''}{h'} = -\frac{1}{2} \text{Pr} \eta \Rightarrow \log h' = -\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2 + \text{const.} \Rightarrow h' = A e^{-\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2}$$

On cherche donc une solution de la forme (variation de la constante) :

$$h' = A(\eta) e^{-\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2}$$

Soit :

$$h'' = \left[ A'(\eta) - \frac{1}{2} \text{Pr} \eta A(\eta) \right] e^{-\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2}$$

Donc :

$$h'' + \frac{1}{2} \text{Pr} \eta h' + \text{Pr} f'^2 = A'(\eta) e^{-\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2} + \text{Pr} f'^2 = 0$$

Soit :

$$A'(\eta) = -\text{Pr} f'^2 e^{\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2}$$

D'où :

$$A(\eta) = -\text{Pr} \int f'^2 e^{\frac{1}{4} \text{Pr} s^2} ds + \text{const.}$$

La solution cherchée est donc de la forme :

$$h'(\eta) = -\text{Pr} e^{-\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2} \int_0^\eta f'^2 e^{\frac{1}{4} \text{Pr} s^2} ds + \text{const.},$$

Compte tenu de (3.3.7) :

$$f'(\eta) = -\frac{1}{2} \text{erf}'\left(\frac{1}{2} \eta\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{4} \eta^2}$$

Ainsi :

$$h'(\eta) = -\frac{1}{\pi} \text{Pr} e^{-\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2} \int_0^\eta e^{-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \text{Pr}\right) s^2} ds + \text{const}$$

La condition :  $h'(0) = 0$  implique  $\text{const.} = 0$ . Soit :

$$h'(\eta) = -\frac{1}{\pi} \text{Pr} e^{-\frac{1}{4} \text{Pr} \eta^2} \int_0^\eta e^{-\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \text{Pr}\right) s^2} ds$$



**3.16** – Si l'on rajoute à un instant donné une seconde plaque en  $z = h$ , peut-on envisager d'obtenir une solution autosemblable. Justifier votre réponse.

**Réponse -**

Si on introduit dans le problème une échelle de longueur extérieure, ici la hauteur  $h$  comme sur la figure **3.2 (a)**, on ne peut plus décrire l'écoulement seulement au moyen d'une combinaison des deux variables indépendantes  $z$  et  $t$ . Le comportement de l'écoulement  $\forall t, \forall z$  ne peut plus être autosemblable.

**Commentaire final**

On retiendra de cela que pour les fluides newtoniens, si le système n'est pas isolé, la production de chaleur par dissipation visqueuse induit en général **de faibles variations de la température**, ces variations étant compatibles avec l'hypothèse du fluide incompressible. Les écarts de température induits par les frottements peuvent devenir importants dans deux cas :

✓ dans le cas des liquides huileux, du fait de leurs grands nombres de Prandtl (d'où la nécessité d'une bonne régulation thermique dans les systèmes lubrifiants fortement sollicités) ;

✓ dans le cas des fluides newtoniens, dès lors que le nombre de Mach devient non négligeable. Dans ce dernier cas, les hypothèses de notre exercice (fluide incompressible homogène) ne sont, certes, plus applicables, mais le principe reste le même : l'énergie interne résultant de la transformation irréversible de l'énergie cinétique en chaleur par la dissipation visqueuse, doit être évacuée, sinon la température du fluide s'élève et les conditions d'un écoulement stationnaire ne sont plus vérifiées.

Une application classique est celui des souffleries : l'énergie produite par le moteur qui fait circuler le fluide d'une soufflerie en circuit fermé s'accumule dans le fluide. Elle doit être évacuée. Tant que la vitesse de l'air produite correspond à de faibles nombres de Mach, cela se fait naturellement par réchauffement de l'air de la pièce via la diffusion thermique à travers les parois de la soufflerie. Par contre, si la machine produit des écoulements de nombre de Mach non négligeables, comme dans les souffleries utilisées pour étudier les avions, une régulation thermique de l'air doit alors être intégrée dans le circuit. A titre d'exemple, une soufflerie en circuit fermé capable d'engendrer une circulation d'air stationnaire et de bonne qualité dans une conduite de 1 mètre de diamètre pour l'étude de maquette d'avions en vol de croisière (donc près de Mach 1) doit développer une

puissance d'environ 3MW ( !). La présence d'une régulation thermique capable d'évacuer l'énergie correspondante constitue alors l'un des organes essentiels de ce type de machine.

## **Contrôle classant X2012**

# **CONTRÔLE CLASSANT DE MECANIQUE DES FLUIDES**

**du 28 avril 2014**

**Sujet proposé par Carlo Cossu et Laurent Jacquin**

**\* \* \***

**Durée : 3 heures**

**\* \* \***

- L'usage des cours polycopiés, des copies des transparents, des notes de cours et des notes de petites classes est autorisé.
- Merci de rédiger la question de cours et le premier problème sur des copies colorées
- Merci de rédiger le second problème sur des copies blanches.

## **Une question de cours**

### **La tornade**



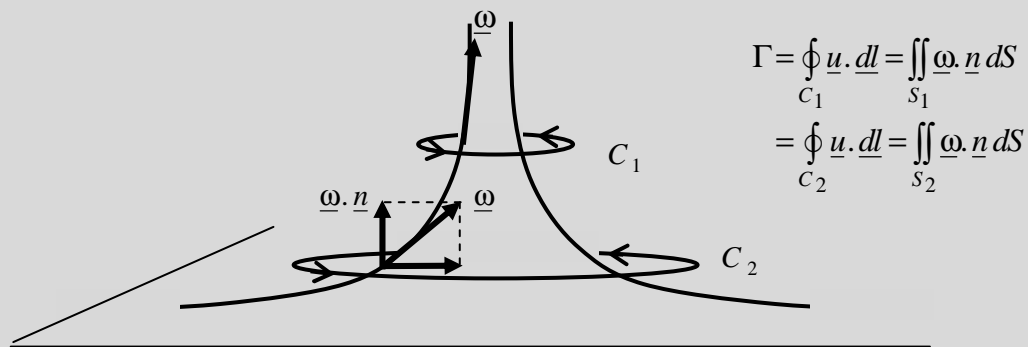
**Figure 1 – Une tornade.**

La figure ci-dessus reproduit une figure du chapitre 14 du cours polycopié introduite pour illustrer l'une des situations admissibles par les lois de Helmholtz pour les lignes de vorticité. Décrire au

moyen d'un schéma le comportement des lignes de vorticité constituant le tube de vorticité représentant cette tornade dans la région proche du sol et justifier ce schéma.

### Réponse -

La première loi de Helmholtz stipule que la circulation du tube de vorticité que constitue la tornade doit être identique quelle que soit l'altitude. Mais au contact du sol la condition d'adhérence annule la vitesse. Comme schématisé ci-dessous, le tube de vorticité doit donc s'évaser au fur et à mesure que l'on s'approche du sol, jusqu'à l'infini au contact de ce dernier.



## Problème 1

### La vaporisation d'une goutte

Les deux parties du problème sont indépendantes

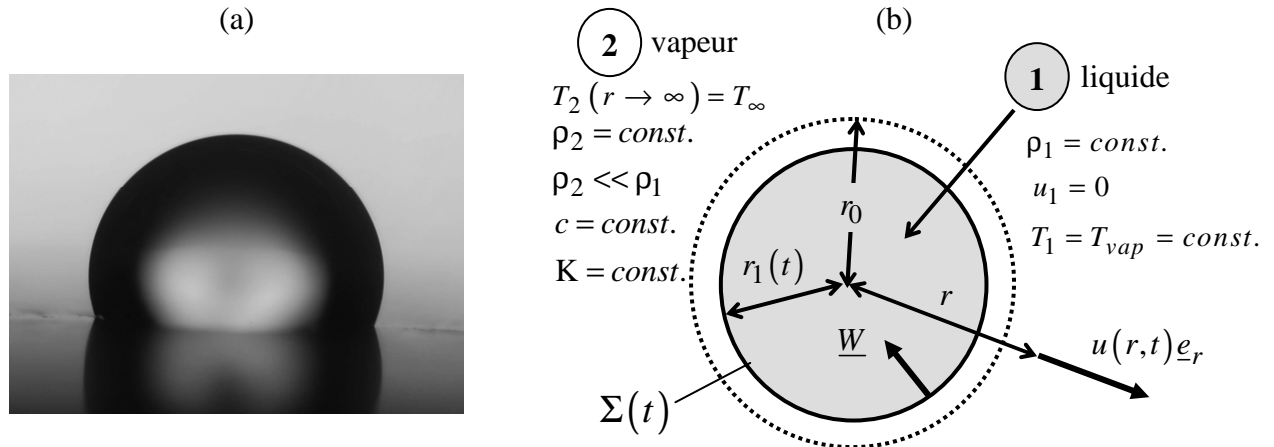
#### Avant-propos -

Une question pratique à laquelle ce problème veut apporter un élément de réponse est la suivante : est-ce que de l'eau liquide, sous forme de gouttes, peut atteindre le foyer d'un incendie sans être totalement vaporisée ? On considère alors le problème sous la forme énoncée ci-dessous, à savoir celui de la recherche du temps de vie d'une petite goutte sphérique plongée dans une atmosphère de température  $T_\infty$  supérieure à la température de vaporisation du liquide.

#### Fin de l'avant-propos

Conformément à la **figure 2** ci-dessous, on considère une goutte sphérique de liquide newtonien, de rayon initial  $r_0$  plongée à un instant initial dans de l'air sec, au repos, de température  $T_\infty$  supérieure à la température de vaporisation  $T_{vap}$  du liquide.

On cherche à caractériser au moyen de l'analyse dimensionnelle (partie 1 du problème) et de manière analytique (partie 2 du problème) le temps de vie  $t_{final}$  au bout duquel la goutte est complètement vaporisée.



**Figure 2** - (a) Une goutte posée, (b) vaporisation d'une goutte sphérique libre : définitions.

On effectue pour cela les hypothèses suivantes :

**H1** - On suppose que le liquide à l'intérieur de la goutte est au repos, soit  $u_1 = 0$ , que sa masse volumique  $\rho_1$  est constante et que sa température est égale à la température de vaporisation du liquide que l'on note  $T_{vap}$ , soit  $T_1 = T_{vap}$ .

**H2** - On admet que la vapeur forme avec l'air un gaz incompressible et homogène à pression constante, de masse volumique  $\rho_2$  constante, de capacité calorifique  $c$  et de conductivité  $K$  constantes. On suppose que la masse volumique de ce gaz est très petite devant celle du liquide, soit  $\rho_2 \ll \rho_1$ .

**H3** - On néglige les forces de volume, la production volumique de chaleur, les effets de la viscosité et les effets de tension interfaciale.

## Partie 1 - Analyse dimensionnelle

On peut considérer que le temps de vaporisation du liquide  $t_{final}$  ne dépend des températures du problème  $T_\infty$  et  $T_{vap}$  qu'à travers un paramètre sans dimension qui est le coefficient de transfert thermique défini par :

$$(1) \quad B_T = \frac{c(T_\infty - T_{vap})}{L_{vap}}$$

Ce nombre sans dimension représente la proportion de l'énergie spécifique apportée à la surface de la goutte par rapport à la chaleur latente de vaporisation, que l'on note  $L_{vap}$ , qui est nécessaire pour obtenir le changement de phase du liquide. Cette proposition sera démontrée dans la deuxième partie du problème.

**Question 1** - Montrer au moyen du théorème  $\Pi$  de Vaschy-Buckingham que le temps de vie  $t_{final}$  de la goutte et son rayon initial  $r_0$  vérifient une relation du type :

$$(2) \quad t_{final} = A r_0^2 f(B_T)$$

où  $A$  est une fonction des paramètres thermodynamiques autres que les températures, fonction que l'on déterminera.

### Réponse -

En listant les paramètres du problème on cherche une relation du type :

$$\mathcal{F}(t_{final}, r_0, \rho_1, c, K, B_T) = 0$$

Conformément à l'énoncé les températures sont prise en compte dans le dernier paramètre qui est sans dimension. On peut retenir aussi la masse volumique constante du gaz  $\rho_2$ . Mais cela ferait apparaître le rapport des masses volumiques  $\rho_2/\rho_1$  qui est supposé négligeable. Les dimensions de  $c$  et  $K$  sont respectivement :

$$[c] = J.kg^{-1}.K^{-1} = L^2.T^{-2}.K^{-1}$$

$$[K] = W.m^{-1}.K^{-1} = M.L.T^{-3}.K^{-1}$$

La matrice des exposants aux dimensions est donc :

	$t_{final}$	$r_0$	$\rho_1$	$c$	$K$
M	0	0	1	0	1
L	0	1	-3	2	1
T	1	0	0	-2	-3
K	0	0	0	-1	-1

C'est une matrice de rang 4. Il y a donc  $5 - 4 = 1$  paramètre sans dimension. Il vaut :

$$\Pi = \frac{t_{final}}{r_0^\alpha \rho_1^\beta c^\gamma K^\delta}$$

Soit :

$$\begin{cases} 0 = \beta + \delta \\ 0 = \alpha - 3\beta + 2\gamma + \delta \\ 1 = -2\gamma - 3\delta \\ 0 = -\gamma - \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = \gamma = -\delta = 1 \end{cases}$$

D'où :

$$t_{final} = \frac{\rho_1 c}{K} r_0^2 f(B_T)$$

La constante  $A$  vaut donc :

$$A = \frac{\rho_1 c}{K}$$

Sa dimension est  $m^{-2}.s$ .

## Question 2 - Application

La résolution analytique menée dans la deuxième partie du problème aboutit à la fonction  $f(B_T)$  suivante:

$$(3) \quad f(B_T) = \frac{1}{2 \log(1 + B_T)}$$

où  $B_T$  est défini en (1). On considère alors le cas d'une goutte d'eau de diamètre égal à  $2mm$  plongée dans de l'air à la pression atmosphérique dont la température vaut  $T_\infty = 1000K$  (situation typique pour un incendie). Les tables thermodynamiques donnent les valeurs suivantes :

✓ Pour l'eau à la pression atmosphérique :

$$T_{vap} = 373K$$

$$\rho_1(100^\circ C) = 958 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$L_{vap} = 2257 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

✓ Pour l'air à la pression atmosphérique et à une température de  $1000K$



$$c = 1142 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$K = 0.0675 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

Calculer le temps de vaporisation  $t_{final}$ . Commentez votre résultat en regard de l'objectif de l'exercice décrit dans l'avant-propos.

### Réponse -

L'énergie spécifique apportée à la surface de la goutte vaut :

$$c(T_{\infty} - T_{vap}) = 1142(1000 - 373) = 716 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Le coefficient de transfert thermique vaut donc :

$$B_T = \frac{c(T_{\infty} - T_{vap})}{L_{vap}} = \frac{716}{2257} = 0.317$$

Soit pour la fonction  $f(B_T)$

$$f(B_T) = \frac{1}{2 \log(1 + B_T)} = \frac{1}{2 \times \log(1.317)} = 4.18$$

Le temps de vaporisation vaut donc :

$$t_{final} = \frac{\rho_l c r_0^2}{K} f(B_T) = \frac{958 \times 1142 \times 10^{-6}}{0.0675} \times 4.18 = 68 \text{ s} \approx 1 \text{ mn}$$

On voit que ce temps caractéristique est relativement long, ce qui augure de l'efficacité de l'aspersion d'un incendie telle qu'on la pratique.

## Partie 2 - Résolution analytique

La solution analytique de ce problème s'obtient en résolvant les équations de bilan local de la masse et de l'énergie.

### Rappel -

On rappelle que la forme générale des équations de bilan local pour une quantité quelconque  $b$  caractérisant un écoulement en présence d'une discontinuité est :

$$(4) \quad \begin{cases} (a) \quad \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho b \otimes \underline{u}) = \rho f_b + \operatorname{div} \phi_b \\ (b) \quad \llbracket \rho b \otimes (\underline{u} - \underline{W}) - \phi_b \rrbracket = 0 \end{cases}$$

Dans la première équation  $f_b$  désigne la densité massique des sources volumiques de  $b$ , et  $\phi_b$ , le flux qui caractérise les sources surfaciques de la densité volumique  $\rho b$ . Dans la seconde équation,  $\llbracket (\cdot) \rrbracket$  désigne le saut de la quantité  $(\cdot)$  à travers la surface de discontinuité, et  $\underline{W}$  désigne la célérité de cette surface (cf. **figure 2b**).

**Fin du rappel**

### Question 3 – Conservation de la masse

Ecrire les deux équations de bilan de masse issues de (4)

**Réponse -**

On applique (4) pour  $b = 1$ ,  $f_b = \phi_b = 0$ . La première équation est l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0$$

La relation de saut devient quant à elle :

$$\llbracket \rho (\underline{u} - \underline{W}) \rrbracket = 0$$

### Question 4 - Vitesse du gaz

En se référant à la **figure 2(b)**, la discontinuité est l'interface sphérique liquide / vapeur  $\Sigma$  et cette dernière se contracte avec la vitesse radiale :

$$(5) \quad \underline{W} = W \underline{e}_r = \dot{r}_1 \underline{e}_r = \text{vitesse de propagation de l'interface}$$

Montrer que les deux équations de bilan de masse trouvées dans la question précédente aboutissent pour la vitesse du gaz  $u(r, t)$  à la relation :

$$(6) \quad u(r, t) = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \frac{r_1^2 \dot{r}_1}{r^2}$$

**Nota** - On rappelle qu'en coordonnées sphériques  $\text{div}(A(r)) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A}{\partial r}$ .

### Réponse -

En appliquant l'équation de continuité au gaz supposé homogène, cf. hypothèse **H2**, on obtient :

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \text{div}(\rho_2 u) = \rho_2 \text{div} u = \rho_2 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 u) = 0$$

Soit :

$$u(r, t) = \frac{\text{const.}(t)}{r^2}$$

Compte tenu des définitions de la **figure 2 (b)**, le saut en  $r = r_1$  vaut :

$$[\![ \rho(\underline{u} - \underline{W}) ]\!] = \rho_2 [ \underline{u}(r_1, t) - \underline{W} ] - \rho_1 [ 0 - \underline{W} ]$$

où l'on a tenu compte du fait que le liquide est au repos, cf. hypothèse **H1**, il reste :

$$[\![ \rho(\underline{u} - \underline{W}) ]\!] = \rho_2 \underline{u}(r_1, t) + (\rho_1 - \rho_2) \underline{W}$$

Soit, après projection selon  $\underline{e}_r$  :

$$\rho_2 u(r_1, t) + (\rho_1 - \rho_2) W = 0$$

D'où la relation :

$$u(r_1, t) = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) W = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) r_1^2 \dot{r}_1$$

Soit pour la constante apparaissant dans la solution de l'équation de continuité :

$$\frac{\text{const.}(t)}{r_1^2} = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \dot{r}_1 \Rightarrow \text{const.}(t) = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) r_1^2 \dot{r}_1$$

D'où la solution :

$$u(r,t) = \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \frac{r_1^2 \dot{r}_1}{r^2}$$

### Question 5 – Bilan d'énergie

La forme d'énergie qu'il convient de considérer dans ce problème est l'enthalpie d'arrêt spécifique que nous avons noté  $h_t$  dans le cours :

$$(7) \quad h_t \equiv h + \frac{1}{2} \underline{u}^2 = e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 = E + \frac{p}{\rho}$$

où  $h$  désigne l'enthalpie spécifique,  $e$  l'énergie interne spécifique et  $E$  l'énergie totale spécifique. L'équation de bilan local de l'enthalpie d'arrêt spécifique n'est pas donnée sous forme explicite dans le cours écrit, mais elle se ramène à celle de la charge totale  $H$  en l'absence de force de volume, comme c'est le cas ici, cf. hypothèse **H3**. On a donc :

$$(8) \quad \rho \frac{dh_t}{dt} = \rho \frac{dH}{dt} = r + \text{div}(\underline{\tau} \cdot \underline{u} - \underline{q}) + \frac{\partial p}{\partial t}$$

On identifie dans le second membre : la densité volumique de taux d'échange de chaleur  $r$ , le tenseur des contraintes visqueuses  $\underline{\tau}$ , le flux de chaleur  $\underline{q}$  et la pression  $p$ .

On effectue à ce stade une dernière hypothèse, dite **hypothèse quasi-statique** :

**H4** - On néglige les effets instationnaires dans le bilan d'énergie ci-dessus, soit  $\frac{\partial h_t}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0$

Dans la mesure où l'on néglige par ailleurs les sources volumiques de chaleur et les effets visqueux, cf. hypothèses **H3**, l'équation (8) se réduit à :

$$(9) \quad \rho \frac{dh_t}{dt} = - \text{div} \underline{q}$$

**5.1** - Que devient alors la relation de saut (4-b) pour  $b = h_t$  ?

**Réponse -**

On pose dans (4-b) :  $b = h_t$ ,  $\phi_b = \phi_{h_t} = -\underline{q}$ , soit :

$$\llbracket \rho h_t (\underline{u} - \underline{W}) + \underline{q} \rrbracket = 0$$

**5.2** - Déduire de la relation de saut obtenue ci-dessus que le flux de chaleur  $q_2(r_1)$  dans le gaz au contact du liquide vérifie :

$$(10) \quad q_2(r_1) = -K \frac{dT}{dr}(r_1) = \rho_1 \dot{r}_1 (h_{t2} - h_{t1})$$

où K désigne la conductivité du gaz.

**Remarque** - On note dorénavant  $T$  la température du gaz pour alléger le formalisme.

### Réponse -

La relation de saut obtenue ci-dessus mène à :

$$\llbracket \rho h_t (\underline{u} - \underline{W}) + \underline{q} \rrbracket = [\rho_2 h_{t2} [\underline{u}(r_1, t) - \underline{W}] + \underline{q}_2] - [\rho_1 h_{t1} (0 - \underline{W}) + \underline{q}_1] = 0$$

On a  $\underline{q}_1 \sim \underline{\text{grad}} T = 0$  puisque le liquide newtonien est supposé de température constante, cf. Hypothèse **H1**. Soit :

$$\rho_2 h_{t2} [\underline{u}(r_1, t) - \underline{W}] + q_2(r_1) + \rho_1 h_{t1} \underline{W} = 0$$

En projetant cette relation selon  $\underline{e}_r$  et en remplaçant  $u$  par son expression (6) et  $W$  par  $\dot{r}_1$ , il vient :

$$\begin{aligned} q_2(r_1) &= -\rho_2 h_{t2} u(r_1, t) - (\rho_1 h_{t1} - \rho_2 h_{t2}) \dot{r}_1 \\ &= -\rho_2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) h_{t2} \dot{r}_1 - (\rho_1 h_{t1} - \rho_2 h_{t2}) \dot{r}_1 \\ &= -\rho_1 (h_{t1} - h_{t2}) \dot{r}_1 \end{aligned}$$

Donc en définitive, puisque le gaz est un fluide newtonien :

$$q_2(r_1) = -K \frac{dT}{dr}(r_1) = \rho_1 \dot{r}_1 (h_{t2} - h_{t1})$$

### Question 6 – Solution

En toute généralité, la différence d'enthalpies  $h_{t2} - h_{t1}$  doit assurer le réchauffement du liquide, de sa température initiale  $T_1$  à sa température de vaporisation  $T_{vap}$ , ainsi que le changement de phase qui absorbe la chaleur latente de vaporisation  $L_{vap}$ . Ayant supposé que  $T_1 = T_{vap}$ , cf. hypothèse **H1**, il reste donc :

$$(11) \quad h_{t2} - h_{t1} = L_{vap}$$

En posant  $h_t = cT$  où  $c$  désigne la capacité calorifique du gaz supposée constante, compte tenu des équations (9), (10) et (11), nous sommes donc amenés à résoudre, dans le gaz :

$$(12) \quad \begin{cases} \rho_2 u c \frac{dT}{dr} = -\text{div} (q_2) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr^2 q_2}{dr} \\ q_2(r_1) = -K \frac{dT}{dr} = \rho_1 \dot{r}_1 L_{vap} \\ T(r \rightarrow \infty) = T_\infty \\ T(r = r_1) = T_{vap} \end{cases}$$

où l'on a tenu compte de l'hypothèse quasi-statique **H4** et des conditions aux limites sur la température dans le gaz.

#### 6.1 Calcul intermédiaire

Montrer que la première équation du système ci-dessus se ramène à l'équation :

$$(13) \quad r^2 q_2 + \rho_2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) r_1^2 \dot{r}_1 c T = \text{const.}$$

avec, en exploitant la condition  $\rho_2/\rho_1 \ll 1$  :

$$(14) \quad \text{const.} = \rho_1 \dot{r}_1 r_1^2 (L_{vap} - c T_{vap})$$

#### Réponse -

En remplaçant dans la première équation (12)  $u$  par son expression (6), il vient :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \rho_2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) r^2 \dot{r}_1 c T \right] = - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q_2)$$

Soit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 q_2 + \rho_2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) r^2 \dot{r}_1 c T \right] = 0$$

D'où :

$$r^2 q_2 + \rho_2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) r^2 \dot{r}_1 c T = \text{const.}$$

qui est l'expression demandée en (13). La constante doit être évaluée sur la surface de la goutte, en  $r = r_1$ . Soit, en tenant compte de la deuxième équation (11) qui définit le flux à l'interface :

$$r^2 \rho_1 \dot{r}_1 L_{vap} + \rho_2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) r^2 \dot{r}_1 c T_{vap} = \text{const.}$$

$$\rho_1 r_1^2 \dot{r}_1 \left[ L_{vap} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) c T_{vap} \right] = \text{const.}$$

Soit pour  $\rho_2/\rho_1 \ll 1$  :

$$\text{const.} = \rho_1 r_1^2 \dot{r}_1 (L_{vap} - c T_{vap})$$

qui est l'expression demandée en (14).

## 6.2 Loi d'échelle « en $r^2$ »

Montrer que l'intégration de (13) mène à la loi :

$$(15) \quad r_1^2 = r_0^2 - A t$$

connue sous le nom de loi « en  $r^2$  », où la constante  $A$  vaut :

$$(16) \quad A = \frac{2K}{\rho_1 c} \log \left[ 1 + \underbrace{\frac{c(T_\infty - T_{vap})}{L_{vap}}}_{B_T} \right]$$

et où l'on retrouve le **coefficient de transfert thermique**  $B_T$  introduit dans la première partie, cf. (1).

### Réponse -

En posant dans l'équation (13)  $q_2 = -K dT/dr$  et en remplaçant la constante par son expression (14), on obtient successivement :

$$-r^2 K \frac{dT}{dr} + \rho_2 \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) r_1^2 \dot{r}_1 c T = \rho_1 r_1^2 \dot{r}_1 (L_{vap} - c T_{vap})$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{K} \rho_1 \frac{r_1^2 \dot{r}_1}{r^2} \left[ \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) c T - (L_{vap} - c T_{vap}) \right]$$

Soit, puisque  $\rho_2/\rho_1 \ll 1$  :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{K} \rho_1 \frac{r_1^2 \dot{r}_1}{r^2} c \left( T + \underbrace{\frac{L_{vap}}{c} - T_{vap}}_{T^*} \right)$$

En posant, comme indiqué :

$$T^* = \frac{L_{vap}}{c} - T_{vap},$$

On doit donc intégrer :

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{1}{K} \rho_1 r_1^2 \dot{r}_1 c \frac{T + T^*}{r^2}$$

Soit :

$$\frac{dT}{T + T^*} = -\frac{1}{K} \rho_1 r_1^2 \dot{r}_1 c \frac{dr}{r^2}$$

$$K d \log(T + T^*) = \rho_1 r_1^2 \dot{r}_1 c d \left( \frac{1}{r} \right)$$



$$K \log \left( \frac{T(r) + T^*}{T_{vap} + T^*} \right) = \rho_1 r_1^2 \dot{r}_1 c \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)$$

Pour  $r \rightarrow \infty$ ,  $T = T_\infty$ , on obtient :

$$K \log \left( \frac{T_\infty + T^*}{T_{vap} + T^*} \right) = -\rho_1 r_1^2 \dot{r}_1 c$$

On a ainsi :

$$\dot{r}_1^2 = 2 r_1 \dot{r}_1 = -\frac{2K}{\rho_1 c} \log \left( \frac{T_\infty + T^*}{T_{vap} + T^*} \right)$$

En remplaçant  $T^*$  par son expression  $T^* = \frac{L_{vap}}{c} - T_{vap}$ , cela donne :

$$\dot{r}_1^2 = 2 r_1 \dot{r}_1 = -\frac{2K}{\rho_1 c} \log \left( \frac{T_\infty + \frac{L_{vap}}{c} - T_{vap}}{\frac{L_{vap}}{c}} \right) = -\frac{2K}{\rho_1 c} \log \left[ 1 + \frac{c(T_\infty - T_{vap})}{L_{vap}} \right]$$

D'où la loi demandée :

$$r_1^2 = r_0^2 - \overbrace{\frac{2K}{\rho_1 c} \log \left[ 1 + \frac{c(T_\infty - T_{vap})}{L_{vap}} \right]}^A t$$

$\underbrace{L_{vap}}_{B_T}$

### 6.3 Temps de vaporisation

Vérifiez que l'on retrouve bien le temps de vie  $t_{final}$  de la goutte tel qu'il est donnée dans la première partie du problème, cf. relations (1), (2) et (3).

#### Réponse -

En posant  $r_1(t_{final}) = 0$  dans la relation (15), tenant compte de (16), on obtient bien :

$$t_{final} = \frac{\rho_1 c}{K} r_0^2 \frac{1}{2 \log(1 + B_T)}$$

## Problème 2

### Jets laminaires et jets turbulents

Les trois parties du problème sont indépendantes

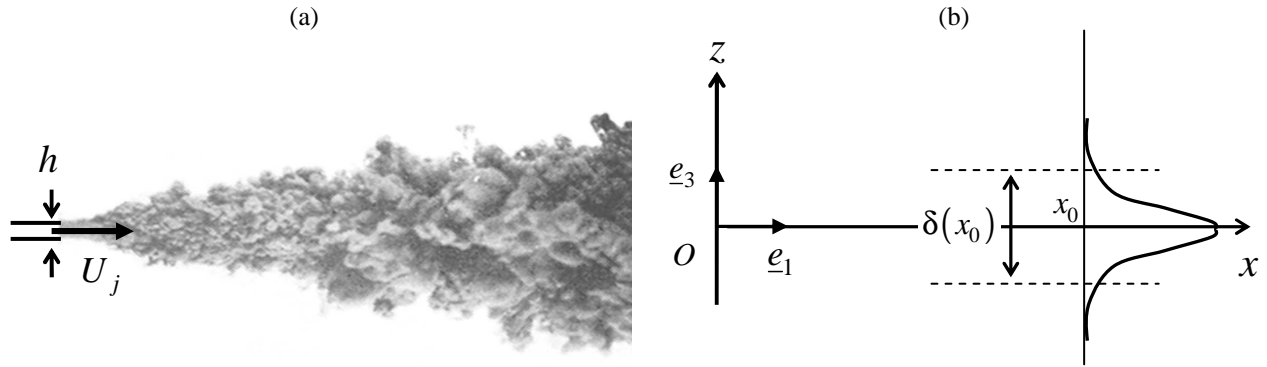
#### Avant-propos -

Les écoulements de jet interviennent dans de nombreuses situations d'intérêt pratique, notamment aux grands nombres de Reynolds, dans les propulseurs d'avion ou de fusée. Il existe aussi des jets en régime laminaire que l'on rencontre dans des applications microfluidiques où le nombre de Reynolds est très petit. Au-delà de ces applications, les jets constituent une famille d'écoulements génériques pour l'étude des mécanismes fondamentaux qui fixent l'évolution des écoulements visqueux cisailés libres, c.-à-d. exempts de toute contrainte locale imposée par la présence d'une paroi solide. Les objectifs de ce problème sont : (1) d'établir la solution théorique d'un écoulement de jet laminaire, (2) d'analyser ce qu'il advient de cet écoulement quand il devient turbulent.

#### Fin de l'avant-propos

Les jets sont associés à une source localisée de quantité de mouvement qui induit un écoulement quasi-unidirectionnel. La **figure 3** ci-dessous illustre le cas d'un jet plan produit par une injection horizontale de quantité de mouvement à partir d'un canal plan de hauteur  $h$  dans un fluide au repos. Soit  $Re_j = U_j h / \nu$  le nombre de Reynolds qui caractérise l'injection au niveau de l'orifice du jet où  $U_j$  désigne la vitesse d'éjection. Si  $Re_j$  est très petit, le jet est laminaire. Dans ce cas il est stationnaire. Si  $Re_j$  dépasse une certaine valeur, le jet devient turbulent. Dans ce cas l'écoulement est instationnaire. Mais la turbulence étant statistiquement stationnaire, l'écoulement moyen caractérisé par une moyenne temporelle des variables (équivalente à une moyenne d'ensemble) est stationnaire. Tel est le cas pour l'exemple de la **figure 3**. La partie gauche de cette figure montre une visualisation par injection de fumée d'un jet en régime turbulent. La partie droite montre l'allure du profil de la vitesse moyenne longitudinale  $\langle u \rangle(x_0 \gg h, y = 0, z)$  mesurée dans le plan  $y = 0$  de ce jet, loin de l'orifice du canal d'injection.

Dans ce problème nous allons analyser tour à tour chacun de ces deux régimes : le régime laminaire et le régime turbulent.



**Figure 3** - Jet plan produit par l'injection de quantité de mouvement à partir d'un canal plan de hauteur  $h$  dans un fluide au repos. La figure de gauche montre une visualisation à l'aide de fumée du jet en régime turbulent (adapté de Dimotakis et al., Phys. Fluids, 1983). La figure de droite montre l'allure typique d'un profil de la vitesse moyenne longitudinale  $\langle u \rangle(x_0, 0, z)$  mesuré dans le plan  $y = 0$  de ce jet en fonction de la coordonnée transversale  $z$ , à une position  $x_0$  donnée.

Quel que soit le régime de l'écoulement, on constate que l'extension transversale de la région visqueuse cisailée reste petite devant l'extension longitudinale de l'écoulement. Conformément aux définitions introduites dans la partie droite de la figure 3, cette condition se traduit par la relation :

$$(1) \quad \frac{\delta(x_0 \gg h)}{x_0} \ll 1$$

Dans ce cas le principe de séparation d'échelles utilisé dans le modèle de la couche limite s'applique aussi pour ces écoulements.

Sauf indication contraire, nous supposons que :

**H1** - L'écoulement est celui d'un fluide newtonien, incompressible homogène.

**H2** - L'écoulement moyen est stationnaire bidimensionnel, invariant selon l'axe  $Oy$ , son champ de vitesse possédant deux composantes :

$$(2) \quad \langle \underline{u} \rangle(x, z) = \langle u \rangle \underline{e}_1 + \langle w \rangle \underline{e}_3$$

La notation  $\langle (\cdot) \rangle$  indique une moyenne d'ensemble.

**H3** - Le fluide est injecté dans un fluide au repos

**H4** - Conformément au schéma de la **figure 3 (b)**, le profil de la vitesse horizontale  $\langle u \rangle$  est symétrique, tel que  $\langle u \rangle(x, z) = \langle u \rangle(x, -z)$ .

## Partie 1 - Cas du jet laminaire : solution autosimilaire

Dans le cas où le jet est laminaire, l'opérateur moyenne  $\langle (\cdot) \rangle$  devient inutile car l'écoulement est stationnaire. Le champ de vitesse vérifie, en lieu et place de **(2)** :

$$(3) \quad \underline{u}(x, z) = u \underline{e}_1 + w \underline{e}_3$$

Nous ferons l'hypothèse que les équations de la couche limite de Prandtl s'appliquent à l'intérieur du jet :

$$(4) \quad \begin{cases} (a) & \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ (b) & u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{cases}$$

Ces équations sont complétées par deux conditions de raccord avec l'écoulement extérieur qui est au repos, soit :

$$(5) \quad \forall x, \underline{u}(x, z \rightarrow \pm\infty) = 0$$

### Question 1 - Justifier l'absence de la pression dans la loi de la dynamique **(4-b)**

Le terme de pression dans la loi de la dynamique **(4-b)** est  $-1/\rho \times \partial p_e / \partial x$  où  $p_e$  désigne la pression extérieure. Ici, comme dans le cas d'une couche limite sur une plaque plane, la pression extérieure est constante puisque l'écoulement de fluide parfait autour du jet est au repos. Donc ce terme est nul.

**Question 2** - Nous définissons la grandeur suivante :

$$(6) \quad \mathcal{P} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dz$$

qui est calculée par intégration sur une ligne verticale à  $x$  positif constant et qui caractérise le flux de la quantité de mouvement horizontale par unité de masse et d'envergure de l'écoulement. Montrer à partir des deux équations (4) et des conditions aux limites (5) que :

$$(7) \quad \mathcal{P} = \text{const.}$$

**Réponse -**

Compte tenu de la continuité, le premier membre de la loi de la dynamique (4-b) on peut s'écrire :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - u \frac{\partial w}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z}$$

D'où :

$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} = v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

Notons qu'il s'agit de la forme conservative de l'équation (4-a). En l'intégrant selon  $z$ , il vient :

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dz = -[uw]_{-\infty}^{\infty} + v \left[ \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{-\infty}^{\infty} = 0$$

où nous avons utilisé la condition de raccord (5) pour annuler le second membre. D'où le résultat demandé.

**Question 3** - Compte tenu du caractère bidimensionnel et incompressible de l'écoulement, nous introduisons la fonction de courant  $\psi$  telle que :

$$(8) \quad \begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ w = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

L'équation de continuité **(4-a)** est alors automatiquement vérifiée et le problème se ramène à la résolution du système suivant :

$$(9) \quad \begin{cases} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \psi}{\partial z} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} \\ \mathcal{P} = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 dz \\ \frac{\partial \psi}{\partial z}(x, z \rightarrow \pm\infty) = 0 \text{ - raccord à un écoulement au repos} \end{cases}$$

On cherche une forme autosemblable de la solution de ce système. En appliquant la technique de la recherche d'une solution autosemblable, montrer que la solution du problème **(9)** est de la forme :

$$(10) \quad \begin{cases} \psi = A(x) f(\eta) \\ \eta = \frac{z}{\delta(x)} \end{cases}$$

où :

$$(11) \quad \begin{cases} A(x) = (\nu x \mathcal{P})^{1/3} \\ \delta(x) = \left( \frac{\nu^2 x^2}{\mathcal{P}} \right)^{1/3} \end{cases}$$

Par suite, le jet s'épaissit donc en suivant une loi :

$$(12) \quad \begin{cases} \delta(x) \sim x^{\alpha_{lam}} \\ \alpha_{lam} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

### Réponse -

Nous procédons à la recherche de solutions autosemblables selon la méthode décrite en amphi et dans le polycopié. La méthode est identique à celle utilisée pour obtenir la solution de Blasius. On procède en trois étapes.

**Étape 1** - On effectue sur les **variables et paramètres** du problème initial, ici  $(\psi, x, z, \mathcal{P}, v)$ , le changement de variables correspondant à la transformation affine suivante :

$$\psi = a \hat{\psi}, x = b \hat{x}, z = c \hat{z}, \mathcal{P} = d \hat{\mathcal{P}}, v = e \hat{v}$$

où  $(a, b, c, d, e)$  désignent cinq facteurs multiplicatifs arbitraires. Le problème devient :

$$\begin{cases} \frac{a^2}{bc^2} \left[ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \right] \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{z}} = \frac{a e}{c^3} \hat{v} \frac{\partial^3 \hat{\psi}}{\partial \hat{z}^3} \\ d \hat{\mathcal{P}} = \frac{a^2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} ( )^2 d\hat{z} \\ \frac{a}{c} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{z}} (\hat{x}, \hat{z} \rightarrow \pm\infty) = 0 \text{ - raccord à un écoulement au repos} \end{cases}$$

**Étape 2** - Les groupes de transformation multiplicatifs  $(a, b, c, d, e)$  qui laissent le problème invariant doivent ainsi vérifier les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{e}{c} \\ d = \frac{a^2}{c} \end{cases}$$

Il y a donc 2 facteurs libres parmi les cinq qui définissent les groupes de transformation  $(a, b, c, d, e)$  admissibles.

**Étape 3** - Toujours selon le principe d'invariance dimensionnelle, si  $\mathcal{F}(\psi, x, z, \mathcal{P}, v) = 0$  désigne la solution du problème initial, après application de la transformation affine, on doit avoir aussi  $\tilde{\mathcal{F}}(\hat{\psi}, \hat{x}, \hat{z}, \hat{\mathcal{P}}, \hat{v}) = 0$ . La solution cherchée vérifie donc :

$$\hat{\mathcal{F}}\left(\hat{\psi} = \frac{\psi}{a}, \hat{x} = \frac{x}{b}, \hat{z} = \frac{z}{c}, \hat{\mathcal{P}} = \frac{\mathcal{P}}{d}, \hat{v} = \frac{v}{e}\right) = 0$$

Si l'on choisit par exemple pour les trois facteurs libres :

$$\begin{cases} b = x \\ d = \mathcal{P}, \\ e = v \end{cases}$$

il reste à déterminer  $a$  et  $c$ . À partir des deux contraintes  $a/b = e/c$  et  $d = a^2/c$  trouvées ci-dessus, on obtient :

$$\begin{cases} a = v x / c \\ P = (v x)^2 / c^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = (v x P)^{1/3} \\ c = (v^2 x^2 / P)^{1/3} \end{cases}$$

La solution vérifie donc :

$$\hat{\mathcal{F}} \left( \hat{\psi} = \frac{\Psi}{(v x P)^{1/3}}, 1, \hat{z} = \frac{z}{(v^2 x^2 / P)^{1/3}}, 1, 1 \right) = 0$$

D'où la forme autosemblable demandée en (10) et (11).

**Question 4** - Démontrer à partir de (10) et (11) que la vitesse horizontale  $u$  est de la forme :

$$(13) \quad u = u_0(x) f'(\eta)$$

où :

$$(14) \quad u_0(x) = \left( \frac{P^2}{v x} \right)^{1/3}$$

Ainsi, la vitesse caractéristique du jet décroît selon une loi du type :

$$(15) \quad \begin{cases} u(x, 0) \sim x^{\beta_{lam}} \\ \beta_{lam} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

**Réponse -**

Il s'agit d'exprimer les composantes de vitesse  $u$  en fonction de la fonction de courant  $\psi = (v x P)^{1/3} f(\eta)$  où  $\eta = z/\delta$ ,  $\delta = (v^2 x^2 / P)^{1/3}$ . Pour la composante longitudinale  $u$ , on obtient :  $u = \partial\psi/\partial z = (v x P)^{1/3} f' \partial\eta/\partial z$  avec :



$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{\delta} = \left( \frac{\mathcal{P}}{v^2 x^2} \right)^{1/3}$$

D'où :

$$\begin{cases} u = u_0(x) f'(\eta) \\ u_0(x) = \left( \frac{\mathcal{P}^2}{v x} \right)^{1/3} \end{cases}$$

D'où la loi proposée dans l'énoncé en (15).

**Question 5** - Démontrer à partir de (10) et (11) que la vitesse verticale  $w$  est de la forme :

$$(16) \quad w = \frac{1}{3} w_0(x) [2\eta f' - f](\eta)$$

où :

$$(17) \quad w_0(x) = \frac{u_0 \delta}{x} = \left( \frac{v \mathcal{P}}{x^2} \right)^{1/3}$$

**Réponse -**

Pour la composante verticale  $w$  on obtient :  $w = -\partial \psi / \partial x = -\partial (v x \mathcal{P})^{1/3} / \partial x \times f - (v x \mathcal{P})^{1/3} \times f' \times \partial \eta / \partial x$  avec  $\partial \eta / \partial x = z \times \partial (v^2 x^2 / \mathcal{P})^{-1/3} / \partial x = -\frac{2}{3} z \times (v^2 / \mathcal{P})^{-1/3} \times x^{-5/3} = -\frac{2}{3} \eta / x$

Soit :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{2}{3} \frac{\eta}{x}$$

D'où :

$$\begin{cases} w = \frac{1}{3} w_0(x) [2\eta f' - f](\eta) \\ w_0(x) = \frac{u_0 \delta}{x} = \left( \frac{v \mathcal{P}}{x^2} \right)^{1/3} \end{cases}$$

**Question 6** - Quelle relation doit vérifier  $f'(\eta)$  pour respecter la condition

$\mathcal{P} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dz = \text{const.}$  ? Déterminer par ailleurs l'expression des deux autres intégrales suivantes en fonction de  $x$  et de  $f'(\eta)$  :

- Débit volumique :  $\dot{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} u \, dz,$
- Flux d'énergie cinétique :  $\dot{\mathcal{E}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^3 \, dz,$

En déduire que les variations de ces deux quantités selon  $x$  sont telles que :

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{Q} \sim x^{\gamma_{lam}} \\ \dot{\mathcal{E}} \sim x^{\delta_{lam}} \end{cases}$$

et donner le valeur des exposants  $\gamma_{lam}$  et  $\delta_{lam}$ .

**Réponse -**

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dz = u_0^2(x) \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} f'^2(\eta) \, d\eta \\ &= \left( \frac{\mathcal{P}^2}{v x} \right)^{2/3} \left( \frac{v^2 x^2}{\mathcal{P}} \right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} f'^2(\eta) \, d\eta \\ &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} f'^2(\eta) \, d\eta \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'^2(\eta) \, d\eta = 1$$

Pour le débit volumique on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \int_{-\infty}^{\infty} u \, dz = u_0(x) \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta) \, d\eta \\ &= \left( \frac{\mathcal{P}^2}{v x} \right)^{1/3} \left( \frac{v^2 x^2}{\mathcal{P}} \right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta) \, d\eta \\ &= (\mathcal{P} v x)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\eta) \, d\eta \end{aligned}$$

Le débit volumique augmente donc selon la loi :

$$\begin{cases} \dot{Q} \sim x^{\gamma_{lam}} \\ \gamma_{lam} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Pour le flux d'énergie cinétique, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} u^3 dz = \frac{1}{2} u_0^3(x) \delta(x) \int_{-\infty}^{\infty} f'^3(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{P}^2}{\nu x} \right) \left( \frac{\nu^2 x^2}{\mathcal{P}} \right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} f'^3(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\mathcal{P}^5}{\nu x} \right)^{1/3} \int_{-\infty}^{\infty} f'^3(\eta) d\eta \end{aligned}$$

Le flux d'énergie volumique décroît donc selon la loi :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{E}} \sim x^{\delta_{lam}} \\ \delta_{lam} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

**Question 7** - Proposer une interprétation physique des comportements de la masse et de l'énergie obtenus dans la question précédente.

### Réponse -

Le flux d'énergie cinétique décroît consécutivement à l'action du frottement moléculaire qui transforme cette forme de l'énergie en énergie interne. Il faut alors que la masse de fluide déplacée par le jet augmente de manière à conserver le flux de quantité de mouvement constant.

On peut traduire cela à partir des formules obtenues ci-dessus dans lesquelles les intégrales sans dimension (selon  $\eta$ ) sont des constantes. On doit combiner les deux comportements déduits de la conservation de la quantité de mouvement et du second principe de la thermodynamique, soit ici :

$$\begin{cases} u_0^2(x) \delta(x) = const. \\ \frac{d}{dx} [u_0^3(x) \delta(x)] < 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\frac{d}{dx}u_0(x) < 0$$

Puisque la conservation de la quantité de mouvement implique que  $\delta(x) = \text{const.}/u_0^2(x)$ , on en déduit que :

$$\frac{d}{dx}[u_0(x)\delta(x)] = \text{const.} \times \frac{d}{dx}[u_0^{-1}(x)] > 0$$

Tout cela traduit le fait que dans un jet l'énergie dissipée par le frottement est égale au travail développé par ce dernier pour entraîner la masse de fluide extérieur qui est initialement au repos.

## Partie 2 - Cas du jet turbulent : analyse dimensionnelle

### Avant- propos -

Nous terminerons la résolution du problème laminaire traité ci-dessus dans la dernière partie du problème cela afin de nous concentrer maintenant sur le régime turbulent qui est riche en enseignements physiques.

### Fin de l'avant- propos

Pour des nombres de Reynolds suffisamment grands le jet étudié dans la première partie du problème devient turbulent. Comme schématisé sur la partie droite de la figure 3 on s'appuie alors sur une description statistique reposant sur l'utilisation de l'opérateur de moyenne d'ensemble. On constate alors que le champ moyen de l'écoulement conserve les mêmes symétries que celles de l'écoulement laminaire. On revient ainsi à la forme (2) du champ des vitesses moyennes.

On constate par ailleurs que cet écoulement moyen est entièrement déterminé par le mélange macroscopique turbulent et qu'il peut être ainsi considéré **comme indépendant de la viscosité moléculaire du fluide**. Aux quatre hypothèses effectuées au début du problème on en rajoute donc une cinquième, qui est :

**H5** – En régime turbulent, l'écoulement peut être considéré comme indépendant de la viscosité moléculaire.

On peut alors caractériser le champ des vitesses moyennes du jet plan par :

$$(19) \quad U_0(x) = \langle u \rangle(x, 0),$$

qui est la vitesse maximale moyenne obtenue dans le plan de symétrie du jet en une position  $x$  donnée, et par  $\delta(x)$  l'épaisseur caractéristique de la couche turbulente formant le jet. Il est possible alors de se faire une idée de l'évolution des jets plans turbulents à l'aide d'une simple analyse dimensionnelle en supposant que les profils moyens de ces jets sont autosimilaires et qu'ils sont donc caractérisés par les deux seules quantités  $U_0(x)$  et  $\delta(x)$ .

Le flux de quantité de mouvement de l'écoulement moyen par unité de masse et d'envergure vaut maintenant :

$$(20) \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u \rangle^2 dz = \text{const.}$$

Comme indiqué, on peut démontrer (au moyen des équations de Reynolds) que cette quantité est une constante (comme dans le cas laminaire). Nous supposons donc que tel est le cas.

**Question 8** - Déterminer au moyen du théorème  $\Pi$  de Vaschy-Buckingham les exposants  $\alpha_{turb}$  et  $\beta_{turb}$  qui caractérisent respectivement la loi d'épaississement du jet et celle de la décroissance de sa vitesse :

$$(21) \quad \delta(x) \sim x^{\alpha_{turb}}$$

$$(22) \quad U_0(x) \sim x^{\beta_{turb}}$$

### Réponse -

Conformément à l'hypothèse **H4** ci-dessus dans le régime turbulent pleinement développé les solutions ne dépendent pas de  $\nu$ . Les deux relations cherchées s'écrivent donc

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U_0, x, \langle \mathcal{P} \rangle) &= 0 \\ \mathcal{G}(\delta, x, \langle \mathcal{P} \rangle) &= 0 \end{aligned}$$

Toutes les quantités étant considérées pour une unité de masse, cette dernière n'intervient pas. Seules deux dimensions fondamentales subsistent : la longueur et le temps. La quantité  $\langle \mathcal{P} \rangle$  ayant pour dimension  $[\langle \mathcal{P} \rangle] = L^3 T^{-2}$ , les matrices des exposants aux dimensions sont :

$$\begin{array}{ccccc} & U_0 & x & \langle \mathcal{P} \rangle & \\ L & 1 & 1 & 3 & \\ T & -1 & 0 & -2 & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & \delta & x & \langle \mathcal{P} \rangle & \\ L & 1 & 1 & 3 & \\ T & 0 & 0 & -2 & \end{array}$$

Leur rang est égal à 2. Chaque relation admet un seul paramètre sans dimension, qui est donc constant :

$$\Pi_1 = \frac{U_0}{x^{\alpha_1} \langle \mathcal{P} \rangle^{\beta_1}} \qquad \Pi_2 = \frac{\delta}{x^{\alpha_2} \langle \mathcal{P} \rangle^{\beta_2}}$$

Soit :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + 3\beta_1 \\ -1 = -2\beta_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{1}{2}, \beta_1 = \frac{1}{2} \qquad \begin{cases} 1 = \alpha_2 + 3\beta_2 \\ 0 = -2\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 1, \beta_2 = 0$$

Donc :

$$U_0 = \text{const.} \times \left( \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{x} \right)^{1/2} \qquad \delta = \text{const.} \times x$$

Donc, pour la loi d'épaississement du jet on trouve :

$$\begin{cases} \delta(x) \sim x^{\alpha_{turb}} \\ \alpha_{turb} = 1 \end{cases},$$

et pour sa vitesse :

$$\begin{cases} U_0 \sim x^{\beta_{turb}} \\ \beta_{turb} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

**Question 9** - Comparer ces deux lois d'évolution selon  $x$  avec celles obtenues en régime laminaire dans la première partie du problème (données respectivement en (12) et (15)). Commenter.

**Réponse -**

En régime laminaire le jet s'évase en suivant une loi  $\delta \sim x^{2/3}$ . En régime turbulent, on obtient  $\delta \sim x$ , soit un évasement plus rapide du fait de l'accroissement du mélange par le transport macroscopique turbulent. Parallèlement, la vitesse qui décroissait suivant la loi  $u_0 \sim x^{-1/3}$  en régime laminaire décroît plus rapidement en régime turbulent, suivant la loi  $U_0 \sim x^{-1/2}$ .

**Question 10** - Répétez l'analyse dimensionnelle dans le cas d'un jet axisymétrique après avoir donné une définition de  $\langle \mathcal{P} \rangle$  adaptée à ce cas. Déterminer alors les analogues des relations (21), (22). Commenter.

**Réponse -**

En géométrie cylindrique le flux de quantité de mouvement par unité de masse est défini par :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = 2\pi \int_0^\infty \langle u \rangle^2 r dr$$

Sa dimension n'est plus  $[\langle \mathcal{P} \rangle] = L^3 T^{-2}$  comme dans le cas plan précédent, mais  $[\langle \mathcal{P} \rangle] = L^4 T^{-2}$ . En reprenant l'analyse ci-dessus on a maintenant :

$$\Pi_1 = \frac{U_0}{x^{\alpha_1} \langle \mathcal{P} \rangle^{\beta_1}} \quad \Pi_2 = \frac{\delta}{x^{\alpha_2} \langle \mathcal{P} \rangle^{\beta_2}}$$

Soit :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + 4\beta_1 \\ -1 = -2\beta_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = -1, \beta_1 = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} 1 = \alpha_2 + 4\beta_2 \\ 0 = -2\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 1, \beta_2 = 0$$

La loi d'évasement du jet reste identique, soit :

$$\delta = \text{const.} \times x$$

Mais la vitesse décroît plus vite que dans le cas plan :

$$U_0 = \text{const.} \times \frac{\langle \mathcal{P} \rangle^{1/2}}{x}$$

Ceci peut intuitivement s'expliquer par le fait que dans le cas axisymétrique l'augmentation relative selon  $x$  de la section  $S$  du jet est proportionnelle à  $\delta^2$  et donc à  $x^2$ , tandis qu'elle est proportionnelle à  $\delta$  et donc à  $x$  dans le cas plan. Afin de garder  $\langle \mathcal{P} \rangle \sim U_0^2 S$  constant, la vitesse dans le cas axisymétrique doit donc décroître plus vite que dans le cas plan.

Notons que dans ce cas, le débit du jet augmente comme  $\dot{Q} = \iint \langle u \rangle dS \sim U_0 \delta^2 \sim x$ .

**Question 11** - Connaissez-vous l'un des principaux mécanismes responsable de l'apparition des instationnarités qui aboutissent à la turbulence dans un jet quand le nombre de Reynolds est suffisant ?

**Réponse -**

C'est le mécanisme de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz que nous avons vu en détail en amphi et dans le polycopié. Ce mécanisme se développe dans chacune des deux couches de mélange qui constituent le jet lorsqu'il débouche de la conduite d'injection.

## Partie 3 - Cas du jet laminaire : solution complète

**Avant-propos -**

Dans cette dernière partie nous achevons la résolution du cas laminaire qui est le seul cas pour lequel nous pouvons déterminer une solution exacte (!).

**Fin de l'avant-propos**

**Question 12** - Montrer à partir de la définition de la variable de similitude  $\eta$  du problème laminaire, cf. (10), (11), et des expressions obtenues pour les vitesses  $u$  et, cf. (13), (14), (16), (17), que l'équation de Prandtl (4-b) se ramène à l'équation différentielle ordinaire suivante pour la fonction  $f(\eta)$  :



(23)  $3f''' + ff'' + f'^2 = 0$

### Réponse -

Pour obtenir tous les termes de la loi de la dynamique **(4-b)** il faut déterminer certaines dérivées de  $u$ . Pour la dérivée selon  $x$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} f' + u_0 f'' \frac{\partial \eta}{\partial x}, \text{ avec } \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{3} \frac{u_0}{x}$$

Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{3} \frac{u_0}{x} [f' + 2\eta f'']$$

Pour les dérivées selon  $z$  on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_0}{\partial z} f' + u_0 f'' \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_0}{\delta} f'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{u_0}{\delta^2} f'''$$

Au total, on obtient successivement pour l'équation **(4-b)** :

$$u_0 f' \times \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{u_0}{x} [f' + 2\eta f''] + \left(\frac{1}{3}\right) \frac{u_0 \delta}{x} [2\eta f' - f] \times \frac{u_0}{\delta} f'' = v \frac{u_0}{\delta^2} f'''$$

$$\Rightarrow -f' [f' + 2\eta f''] + [2\eta f' - f] f'' = 3 \frac{vx}{\delta^2 u_0} f'''$$

$$\Rightarrow -f'^2 - \cancel{2\eta f' f''} + \cancel{2\eta f' f''} - ff'' = 3 \frac{vx}{\delta^2 u_0} f'''$$

$$\Rightarrow 3 \frac{vx}{\delta^2 u_0} f''' + ff'' + f'^2 = 0$$

Or :

$$\frac{vx}{\delta^2 u_0} = v \times \frac{1}{\delta} \times \frac{x}{\delta u_0} = v \times \left( \frac{P}{v^2 x^2} \right)^{1/3} \times \left( \frac{x^2}{v P} \right)^{1/3} = 1.$$

D'où l'équation demandée.

**Question 13** - A partir de : **(i)** l'équation **(23)** obtenue dans la question précédente, **(ii)** de la condition de symétrie  $u(x, z) = u(x, -z)$  et **(iii)** de la condition sur l'axe  $w(x, 0) = 0$ , montrer que la fonction  $f(\eta)$  vérifie :

$$(24) \quad f' + \frac{1}{6} f^2 = \text{const.}$$

**Réponse -**

En remarquant que  $(f^2)'' = (2ff')' = 2f''^2 + 2ff''$ , on peut écrire l'équation **(23)** sous la forme :

$$3f''' + \frac{1}{2} f^2'' = (3f' + \frac{1}{2} f^2)' = 0,$$

Soit :

$$f' + \frac{1}{6} f^2 = A + B\eta$$

Comme nous l'avons vu en **(13)**, la fonction  $f'$  est proportionnelle à  $u$  et elle est donc symétrique. D'après **(16)**, en  $\eta = 0$ ,  $w \sim f(0) = 0$ . On déduit de ces deux constats que la primitive  $f$  est antisymétrique. Mais son carré est symétrique. Ainsi la somme  $f' + \frac{1}{6} f^2$  est symétrique. Cela implique que  $B = 0$ . D'où l'équation demandée.

**Question 14** - L'équation **(24)** admet pour solution :

$$(25) \quad f(\eta) = 6\sqrt{A} \tanh(\sqrt{A} \eta)$$

où  $A$  est une constante. Déterminer  $A$  et en déduire l'expression analytique de  $u$ .

**Remarque** – On rappelle que  $(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x$  et on donne le résultat suivant :  $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 x \, dx = \frac{4}{3}$ .

### Réponse -

La constante  $A$  dans la relation (25) doit être déterminée à partir de l'expression du flux de quantité de mouvement  $\mathcal{P}$ , cf. (6).

On part de l'expression de  $u$  :

$$u = u_0 f', u_0 = \left( \frac{\mathcal{P}^2}{\nu x} \right)^{1/3}.$$

avec  $f$  définie en (25). Sachant que :

$$(\tanh x)' = \operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

On a donc :

$$f'(\eta) = 6\sqrt{A} [\tanh(\sqrt{A} \eta)]' = 6A \operatorname{sech}^2(\sqrt{A} \eta)$$

On obtient ainsi pour le flux de quantité de mouvement (6) :

$$\mathcal{P} = 36 \frac{A^2}{\sqrt{A}} u_0^2 \delta \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(\sqrt{A} \eta) d(\sqrt{A} \eta)$$

Pour l'intégrale on nous donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4 x \, dx = \frac{4}{3}$$

Donc :

$$\mathcal{P} = 48 A^{3/2} u_0^2 \delta$$

D'où :

$$A^{3/2} = \frac{1}{48} \frac{\mathcal{P}}{u_0^2 \delta}$$

avec :

$$\frac{P}{u_0^2 \delta} = \mathcal{P} \left( \frac{\mathcal{P}^2}{\nu x} \right)^{-2/3} \left( \frac{\nu^2 x^2}{\mathcal{P}} \right)^{-1/3} = 1$$

Soit :

$$A^{3/2} = 1/48.$$

Donc :

$$A = 48^{-2/3}.$$

La vitesse  $u$  vaut donc :

$$\begin{cases} u = u_0 f', u_0 = \left( \frac{\mathcal{P}^2}{\nu x} \right)^{1/3} \\ f' = 6A \operatorname{sech}^2(\sqrt{A} \eta) \\ A = 48^{-2/3} \end{cases}.$$

Donc :

$$u = 6 \times 48^{-2/3} \left( \frac{\mathcal{P}^2}{\nu x} \right)^{1/3} \operatorname{sech}^2(48^{-1/3} \eta)$$

Soit encore :

$$u = 6 \times \left( \frac{(\mathcal{P}/48)^2}{\nu x} \right)^{1/3} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{z}{\left( \frac{\nu^2 x^2}{\mathcal{P}/48} \right)^{1/3}} \right)$$

## **Contrôle classant X2013**

# CONTRÔLE CLASSANT DE MECANIQUE DES FLUIDES

du 1 avril 2015

Sujet proposé par Riwal Plougonven et Laurent Jacquin

\* \* \*

Durée : 3 heures -

\* \* \*

- L'usage des cours polycopiés, des copies des transparents, des notes de cours et des notes de petites classes est autorisé.
- Merci de rédiger les exercices sur des copies roses et le problème sur des copies bleues

## Exercice 1 Le déversoir

Un déversoir est un dénivelé local placé sur le lit d'une rivière ou d'un canal. On veut caractériser comment varient les propriétés de l'écoulement de part et d'autre de cette région au moyen du principe du tube de Pitot. Comme schématisé sur la **figure 1** ci-dessous, on plonge deux longs tubes de Pitot dans le lit de l'écoulement. L'embouchure de ces tubes, localisée en  $z_1$  à l'amont et en  $z_2$  à l'aval, fait face à l'écoulement. On observe que du fluide remonte dans la partie verticale de ces tubes jusqu'à une hauteur notée  $Z_1$  à l'amont et  $Z_2$  à l'aval.

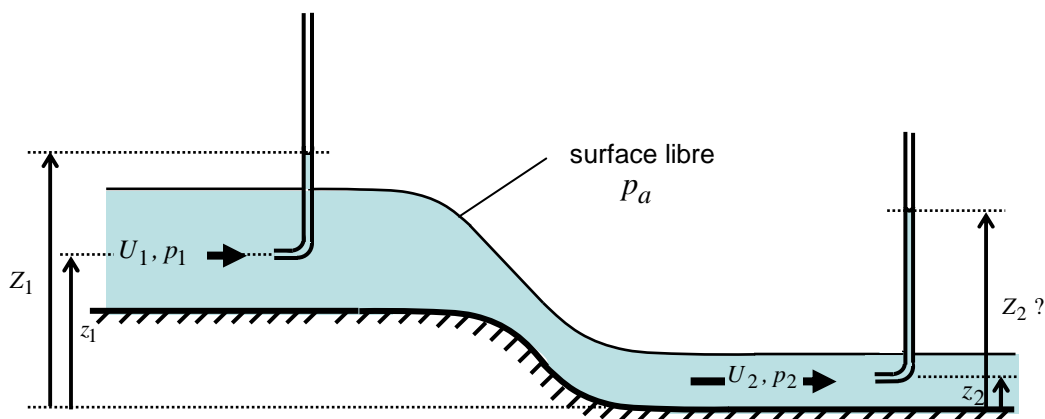


Figure 1 – Un déversoir.

**Question 1** - Dans le cas où l'écoulement peut être considéré partout comme un écoulement permanent, irrotationnel, de fluide parfait incompressible homogène pesant, comparer les hauteurs des colonnes d'eau  $Z_1$  et  $Z_2$ .

**Réponse** - On applique le **deuxième théorème de Bernoulli** (cas des écoulement irrotationnels, de fluide parfait, forces de volume dérivant d'un potentiel

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int \frac{dp}{\rho(p)} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + \phi = C(t)$$

Dans le cas d'un écoulement permanent de fluide incompressible homogène cela devient :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \underline{u}^2 + gz = C$$

où la constante  $C$  est la même dans tout l'écoulement. D'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2} U_1^2 + gz_1}^{p_{t1}} \\ = \underbrace{\frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2} U_2^2 + gz_2}_{p_{t1}} \end{array} \right. \quad (1)$$

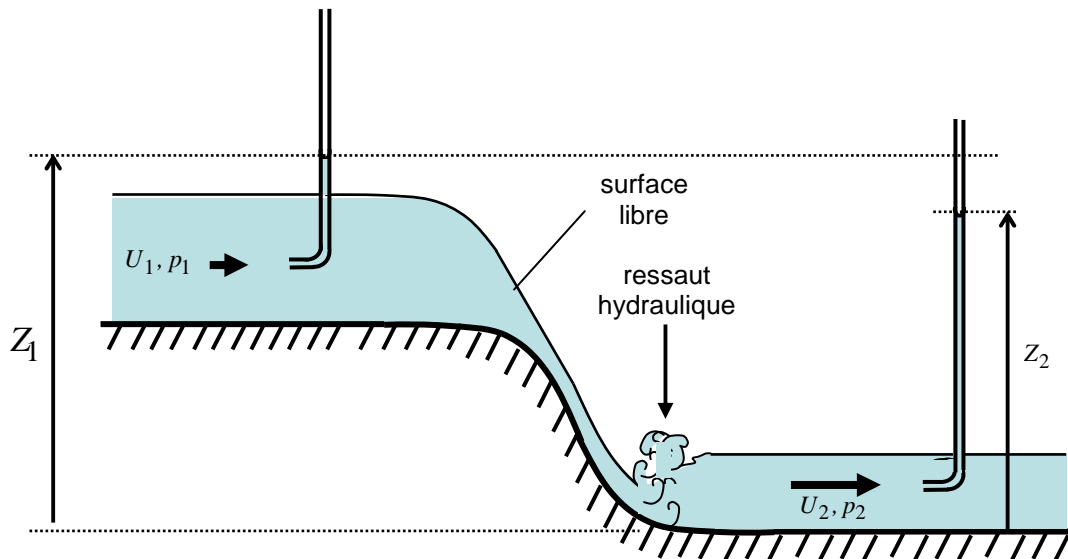
Comme indiqué on identifie les pressions d'arrêt  $p_{t1}$  et  $p_{t2}$  mesurées par les deux tubes de Pitot. En traduisant alors l'équilibre statique du fluide dans les tubes de Pitot, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{t,1} = p_a + \rho g (Z_1 - z_1) \\ p_{t,2} = p_a + \rho g (Z_2 - z_2) \end{array} \right. \quad (2)$$

On déduit de (1) et (2) que :

$$Z_1 = Z_2$$

**Question 2** - Pour un dénivelé plus accentué, comme schématisé ci-dessous, apparaît au pied du déversoir une zone de bouillonnement de l'écoulement, appelé ressaut hydraulique. A l'aval de ce phénomène se rétablit un écoulement de fluide permanent de mêmes propriétés qu'à l'amont (écoulement permanent irrotationnel). Dans ce cas on constate que  $Z_2 < Z_1$ . Pourquoi ?



**Figure 2** – Un déversoir avec ressaut.

**Réponse** - L'écoulement n'est plus un écoulement permanent de fluide parfait dans le ressaut. Le ressaut est une région de frottement qui réduit de manière irréversible l'énergie mécanique au bénéfice de l'énergie interne. La hauteur  $Z$  qui caractérise l'énergie mécanique est donc réduite après la traversée de cette région.



## Exercice 2

### Feuilles de thé dans une tasse

Comme illustré sur la photo de la **figure 3** ci-dessous, il est courant d'observer au fond d'une tasse de thé les débris de feuilles de thé qui se rassemblent vers le centre. Le but de cet exercice est d'expliquer qualitativement cette observation. On considère pour cela une tasse cylindrique, à fond plat, de diamètre  $D$ , remplie de thé jusqu'à une hauteur  $D$ . On prendra  $D = 8$  cm. La viscosité cinématique  $\nu = \eta/\rho$  de l'eau à  $80^\circ \text{C}$  (on supposera que le thé est à cette température) est  $\nu = 0.365 \times 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .



**Figure 3** – La tasse de thé.

**Question 1 (cours)** - La viscosité cinématique de l'eau à une température de  $20^\circ$  vaut environ  $\nu = 1.0 \cdot 10^{-6} \times \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . Expliquer qualitativement pourquoi cette valeur est supérieure à celle donnée ci-dessus pour une température de  $80^\circ \text{C}$  ?

#### Réponse -

L'augmentation de la température correspond à un accroissement de l'énergie d'agitation moléculaire. Comme précisé sous le **tableau 2.2** du chapitre 2 (cf. §2.3), l'élévation de la température amoindrit alors le caractère cohésif des forces d'interactions moléculaires qui dominent

ce type de fluide (on obtient l'effet inverse pour un gaz où la viscosité résulte directement des échanges de molécules entre les « particules de fluide »).

**Question 2** - On met le thé en mouvement à l'aide d'une cuillère. On se place loin des parois de la tasse. On suppose que l'écoulement ainsi obtenu vérifie les hypothèses suivantes :

**H1** - le fluide est newtonien, incompressible et homogène, de masse volumique  $\rho$  ;

**H2** - la viscosité cinématique  $\nu = \eta/\rho$  est constante ;

**H3** - l'écoulement est permanent ;

**H4** - le fluide est pesant ;

**H5** - l'écoulement est supposé bidimensionnel et axisymétrique, de vitesse :

$$\underline{u} = u_\theta(r) \underline{e}_\theta \quad (1)$$

dans un repère cylindrique  $(O, \underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$  où les coordonnées d'espace sont notées  $(r, \theta, z)$ . La coordonnée verticale  $z$  est orientée vers le haut.

Montrer que dans le cadre de ces hypothèses, la loi de la dynamique qui s'écrit :

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = -g \underline{e}_z - \frac{1}{\rho} \underline{\text{grad}} p + \nu \Delta \underline{u} \quad (2)$$

aboutit au système :

$$\begin{cases} \text{selon } \underline{e}_r : \rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \\ \text{selon } \underline{e}_\theta : 0 = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} \right) \\ \text{selon } \underline{e}_z : 0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (3)$$

où la première équation caractérise « l'équilibre cyclostrophique » vu en cours. On donne pour ce faire l'expression du gradient des vitesses et celle du Laplacien vectoriel du champ de vitesse (1) qui interviennent dans (2), telles qu'on les obtient par application du formulaire de l'Annexe A2.1 du cours photocopié :

$$\nabla \underline{u} = -\frac{u_\theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{du_\theta}{dr} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \quad (4)$$

$$\Delta \underline{u} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial ru_\theta}{\partial r} \right) \underline{e}_\theta \quad (5)$$

**Réponse** - Dans l'équation (2) on doit éliminer la dérivée temporelle (écoulement permanent).

Compte tenu de (1) et (4), la dérivée convective vaut :

$$\begin{aligned} \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} &= \left( -\frac{u_\theta}{r} \underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \frac{du_\theta}{dr} \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r \right) \cdot u_\theta \underline{e}_\theta \\ &= -\frac{u_\theta^2}{r} \underbrace{(\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta) \cdot \underline{e}_\theta}_{=1} + \frac{du_\theta}{dr} \underbrace{(\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) \cdot \underline{e}_\theta}_{=0} \\ &= -\frac{u_\theta^2}{r} \underline{e}_r \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'écoulement étant supposé axisymétrique, la pression ne dépend que de  $r$  et de  $z$ .

Quant au terme de frottement, conformément à (5) il ne comporte qu'une composante selon  $\underline{e}_\theta$ .

Soit en définitive :

$$\begin{cases} \text{selon } \underline{e}_r : \rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \\ \text{selon } \underline{e}_\theta : 0 = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial ru_\theta}{\partial r} \right) \\ \text{selon } \underline{e}_z : 0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

**Question 3** - Montrer à partir de l'équation du mouvement tangential que cet écoulement ne peut être qu'une rotation de corps solide, de la forme :

$$u_\theta(r) = \Omega r \quad (6)$$

où  $\Omega$  désigne le taux de rotation

**Réponse -** L'équation du mouvement tangential donne :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} = A(z) \Rightarrow \frac{\partial r u_\theta}{\partial r} = A(z) r \Rightarrow u_\theta(r) = A(z) \frac{r}{2} + \frac{B(z)}{r}$$

On doit avoir  $B(z) = 0$  pour que la vitesse reste finie en  $r = 0$ . On pose  $A(z) = 2\Omega$  où  $\Omega$  définit le taux de rotation. Notons que  $A(z)$  correspond à la vorticité  $\underline{\omega} = \underline{rot} \underline{u} = 2\underline{\Omega}$  avec ici  $\underline{\Omega} = \Omega \underline{e}_z$ .

**Question 4 -** Montrer à partir de l'équation du mouvement radial que le champ de pression vérifie :

$$p = p_0(z) + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 \quad (7)$$

où  $p_0(z)$  désigne la pression sur l'axe de rotation.

**Réponse -** L'équilibre radial donne quant à lui :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} = \rho \Omega^2 r \Rightarrow p = p_0(z) + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2$$

**Question 5 -** On choisit l'origine de l'axe des  $z$  sur la surface libre au centre de la tasse (en  $r = 0$ ). Cette surface est courbe du fait des effets de la rotation. On notera alors  $h(r)$  la hauteur de la surface libre. Quelle condition aux limites s'applique pour la pression en  $z = h(r)$  si l'on néglige les effets de viscosité sur cette surface (du fait de la très faible valeur de la viscosité de l'air) ?

**Réponse -** Si l'on néglige le frottement sur la surface  $z = h(r)$ , la condition dynamique qui traduit la continuité de la contrainte à la traversée d'une surface séparant deux fluides non-miscibles est la continuité de la pression. Soit

$$p_0(z = h(r)) = p_a$$

**Question 6** - Intégrer la relation de l'équilibre hydrostatique (dernière équation de la loi de la dynamique (3)) et en déduire la relation entre la pression  $p(r, z)$  en un point du fluide, la pression  $p_a$  et la hauteur de fluide au-dessus,  $h(r) - z$ . En déduire alors l'expression de la pression  $p_0(z)$  et l'équation de la surface libre  $z = h(r)$ . Faire un schéma de l'écoulement obtenu dans un plan contenant l'axe de rotation du fluide.

**Réponse** - L'intégration de

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

donne la pression hydrostatique sous la forme :

$$p(r, z) = A(r) - \rho g z$$

En  $z = h(r)$ , on doit avoir :

$$p(r, h) = p_a = A(r) - \rho g h(r)$$

Donc la première relation demandée est :

$$p(r, z) = p_a - \rho g [z - h(r)]$$

On a vu par ailleurs que d'après (7) :

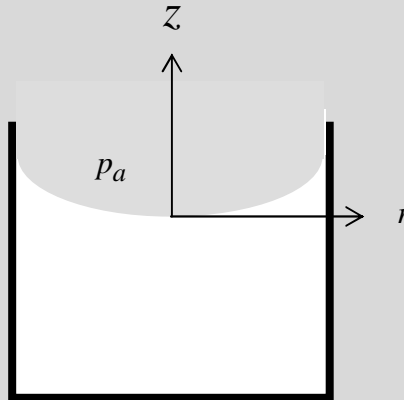
$$p(r, z) = p_0(z) + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2$$

On en déduit alors par identification que :

$$\begin{cases} p_0(z) = p_a - \rho g z \\ h(r) = \frac{\Omega^2}{2g} r^2 \end{cases}$$

La seconde relation définit la forme de la surface libre.

On a le schéma suivant :



**Question 7** – On suppose maintenant que, contrairement à ce qui se passe au niveau de la surface libre, la viscosité modifie l'écoulement à proximité de la paroi de la tasse. Estimer au moyen d'un raisonnement dimensionnel l'échelle de temps  $\tau_v$  sur laquelle la viscosité va finir par freiner et arrêter le mouvement de rotation consécutivement à la diffusion de la quantité de mouvement à partir des régions en contact avec les parois fixes de la tasse. Donner une valeur approchée (en heures) pour le cas considéré en utilisant les valeurs des paramètres données plus haut.

**Réponse** – On construit un temps visqueux à partir de l'échelle du problème, qui est le diamètre  $D$ , et à partir de la viscosité cinématique  $\nu$  :

$$\tau_v = \frac{D^2}{\nu}$$

L'application numérique donne, pour  $D = 8 \text{ cm}$  et  $\nu = 0.365 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  :

$$\tau_v (s) = \frac{64 \cdot 10^{-4}}{0.365 \cdot 10^{-6}} = 17534$$

Soit :

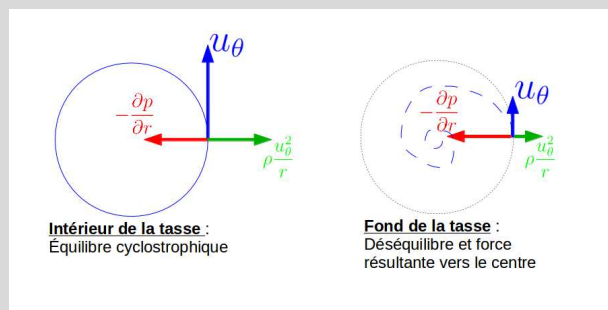
$$\tau_v \approx 5 \text{ heures}$$

**Question 8** – Sur des temps plus petits que  $\tau_v$ , l'effet du frottement dû à la viscosité reste confiné dans la couche limite de la tasse. Rappeler comment se comporte la pression à travers cette couche.

**Réponse** - D'après les équations de Prandtl, la pression se conserve à travers une couche limite.

**Question 9** - En dehors de cette couche limite le mouvement du fluide est le mouvement circulaire fixé par « l'équilibre cyclostrophique » de la rotation de corps solide étudiée plus haut. Si l'on considère maintenant le fond de la tasse, comment se comportent les lignes de courant compte tenu du ralentissement du fluide par le frottement ? Faire un schéma.

**Réponse** – Dans la couche limite au fond de la tasse, la viscosité ralentit l'écoulement. Dans ce cas « l'équilibre cyclostrophique » est rompu car le gradient de pression, qui reste égal à celui qui règne dans la région non visqueuse de l'écoulement (fluide parfait) devient supérieur à la force centrifuge locale  $\rho u_\theta^2/r$  où  $u_\theta(r) < \Omega r$ . Cela pousse le fluide vers le centre de la tasse.



**Question 10** – L'écoulement de cette couche limite peut-il rester bidimensionnel, c.-à-d. parallèle au fond de la tasse ? Pourquoi ?

**Réponse** - Non. Le fluide qui converge vers l'axe de rotation doit s'échapper vers le haut par continuité.

**Question 11** - Qu'advient-il alors des particules plus lourdes que l'eau, tel que les débris de feuille de thé ?

**Réponse** – Elles se regroupent au fond, dans la région centrale – voir la **figure 3**.

## Problème

### Panaches et thermiques

Nous nous intéressons ici à des écoulements se produisant en raison de petites différences de masse volumique, celles-ci étant dues à des différences de température. Il s'agit de décrire par exemple le panache s'élevant au-dessus du bout incandescent d'une cigarette, ou au-dessus d'une cheminée d'usine.

Pour commencer, nous allons construire un modèle issu des équations de Navier-Stokes, le **modèle de Boussinesq**, qui retient les effets nécessaires à la description de ces phénomènes. Ce modèle sera ensuite utilisé pour décrire un panache laminaire puis un panache turbulent.

### Première partie - Le modèle de Boussinesq (cas d'une source de chaleur localisée)

#### I.1. L'état statique

Décrivons tout d'abord l'état de repos qui servira d'état de référence que les mouvements résultants des petites variations de la masse volumique viendront perturber. On rappelle que pour un fluide pesant de masse volumique  $\rho_0$ , soumis à l'accélération de la pesanteur  $\underline{g} = -g \underline{e}_z$ , la relation d'équilibre qui caractérise l'état statique du fluide est :



$$0 = -\rho_0 g - \frac{dp_0}{dz} \quad (1)$$

On supposera ici que le fluide est homogène, tel que  $\rho_0 = \text{const.}$  Comme vu en cours, la pression  $p_0(z)$  résultant de l'intégration de cette loi d'équilibre vaut alors :

$$p_0(z) = p_{0,ref} - \rho_0 g z \quad (2)$$

C'est la pression hydrostatique, où  $p_{0,ref} = p_0(z=0)$  désigne une pression de référence mesurée à l'altitude de référence  $z=0$ .

On suppose par ailleurs que le fluide est un gaz thermiquement et calorifiquement parfait. On rappelle que l'équation d'état calorique d'un tel gaz est :

$$p = r \rho T \quad (3)$$

**Question 1** - Montrer que la température de cet état au repos vérifie :

$$T_0(z) = T_{0,ref} - \frac{g z}{r} \quad (4)$$

où l'on précisera l'expression de la température de référence  $T_{0,ref}$  en fonction de  $p_{0,ref}$  et  $\rho_0$ .

**Réponse** - Compte tenu de (3) et de (2) :

$$T_0(z) = \frac{p_0(z)}{r\rho_0} = \frac{p_{0,ref}}{\underbrace{r\rho_0}_{T_{0,ref}}} - \frac{g z}{r}$$

**Question 2** - On introduit maintenant des petites variations de la masse volumique imposées par une source de chaleur localisée dans le fluide. On décompose alors la masse volumique et la

pression en un état de base, qui correspond à l'état hydrostatique décrit ci-dessus, et une perturbation. On traduit cela par les relations :

$$\begin{cases} \rho(\underline{x}, t) = \rho_0 + \delta\rho \bar{\rho}(\underline{x}, t) \\ p(\underline{x}, t) = p_0(z) + \delta p \bar{p}(\underline{x}, t) \\ T(\underline{x}, t) = T_0(z) + \delta T \bar{T}(\underline{x}, t) \end{cases} \quad (5)$$

où  $p_0(z)$  et  $T_0(z)$  sont définis en (2) et (4) et où  $\delta\rho$ ,  $\delta p$  et  $\delta T$  sont les ordres de grandeur des perturbations de masse volumique, de pression et de température. Par définition, les variables sans dimension  $\bar{\rho}(\underline{x}, t)$ ,  $\bar{p}(\underline{x}, t)$  et  $\bar{T}(\underline{x}, t)$  sont supposées d'ordre 1. On supposera que  $\delta\rho$  et  $\delta T$  sont petits devant  $\rho_0$  et  $T_0$ , en posant :

$$\begin{cases} \frac{\delta\rho}{\rho_0} = \epsilon_\rho \ll 1 \\ \frac{\delta T}{T_0(z)} = \epsilon_T \ll 1 \end{cases} \quad (6)$$

En introduisant (5) dans l'équation d'état thermique (3) montrer que l'équilibre des termes d'indice « zéro », qui sont d'ordre dominant dans cette équation, mène à :

$$p_0(z) = r \rho_0 T_0(z) \quad (7)$$

et que celui des termes d'ordre supérieur, fonction de  $\delta p$ , de  $\delta\rho$  ou de  $\delta T$ , aboutit alors à la relation :

$$\frac{\delta p}{p_0(z)} \bar{p}(\underline{x}, t) = \frac{\delta\rho}{\rho_0} \bar{\rho}(\underline{x}, t) + \frac{\delta T}{T_0(z)} \bar{T}(\underline{x}, t) \quad (8)$$

**Réponse -** En introduisant (5) dans (3) on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
p_0(z) + \delta p \bar{p}(\underline{x}, t) &= r [\rho_0 + \delta \rho \bar{\rho}(\underline{x}, t)] [T_0(z) + \delta T \bar{T}(\underline{x}, t)] \\
&= r \rho_0 T_0(z) + r T_0(z) \delta \rho \bar{\rho}(\underline{x}, t) + r \rho_0 \delta T \bar{T}(\underline{x}, t) + \\
&\quad \underbrace{r \delta \rho \delta T \bar{\rho}(\underline{x}, t) \bar{T}(\underline{x}, t)}_{O(\delta \rho \delta T)}
\end{aligned}$$

Soit à l'ordre dominant :

$$p_0(z) = r \rho_0 T_0(z)$$

A l'ordre suivant :

$$\delta p \bar{p}(\underline{x}, t) = r \rho_0 \delta T \bar{T}(\underline{x}, t) + r T_0(z) \delta \rho \bar{\rho}(\underline{x}, t)$$

En divisant cette relation par la relation précédente on obtient :

$$\frac{\delta p}{p_0(z)} \bar{p}(\underline{x}, t) = \frac{\delta \rho}{\rho_0} \bar{\rho}(\underline{x}, t) + \frac{\delta T}{T_0(z)} \bar{T}(\underline{x}, t)$$

D'où la relation demandée.

## I.2. Le mouvement

**Question 3** - On suppose alors que les composantes de la vitesse, qui sont nulles dans l'état au repos, ont pour ordres de grandeur :

$$\begin{cases} u(\underline{x}, t) = U_h \bar{u}(\underline{x}, t) \\ v(\underline{x}, t) = U_h \bar{v}(\underline{x}, t) \\ w(\underline{x}, t) = W \bar{w}(\underline{x}, t) \end{cases} \quad (9)$$

où  $U_h$  caractérise le mouvement horizontal et  $W$ , le mouvement vertical. Les variables sans dimension  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$  sont supposées d'ordre 1.

On posera pour les variables indépendantes du problème :

$$x = L \bar{x}, y = L \bar{y}, z = H \bar{z}, t = \frac{H}{W} \bar{t} \quad (10)$$

où le choix effectué pour adimensionnaliser le temps tient compte du fait que les variations de masse volumique impliquent en premier lieu un mouvement ascendant vertical. On supposera alors aussi que :

$$\frac{L}{H} = \varepsilon \ll 1 \quad (11)$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre, différent des paramètres  $\varepsilon_p, \varepsilon_T$  définis en (6).

Rappeler quelle est l'équation générale de bilan local de la masse (équation de continuité). Donner la forme conservative de cette équation.

**Réponse -** La forme conservative de l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \underline{u}) = 0$$

**Question 4 -** Montrer à partir d'une analyse des ordres de grandeur de cette équation que dans le cadre des hypothèses effectuées ci-dessus les échelles de vitesse  $U_h, W$ , et les échelles d'espace  $L, H$ , vérifient la relation :

$$\frac{U_h}{W} = \frac{L}{H} \quad (12)$$

On déduira aussi de cette analyse que l'équation de continuité, sous sa forme dimensionnelle, se réduit finalement à celle d'un écoulement de fluide incompressible, soit :

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad (13)$$

**Réponse -** D'après l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = 0$$

En introduisant les relations dimensionnelles (5), (9) et (10) on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{W}{H} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 + \delta \rho \bar{\rho}) + \left( \frac{U_h}{L} \right) \frac{\partial}{\partial x} [(\rho_0 + \delta \rho \bar{\rho}) \bar{u}] + \left( \frac{U_h}{L} \right) \frac{\partial}{\partial y} [(\rho_0 + \delta \rho \bar{\rho}) \bar{v}] \\ & + \left( \frac{W}{H} \right) \frac{\partial}{\partial z} [(\rho_0 + \delta \rho \bar{\rho}) \bar{w}] = 0 \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\delta \rho W}{H} \right) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \left( \frac{\rho_0 U_h}{L} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \left( \frac{\rho_0 W}{H} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ & + \left( \frac{\delta \rho U_h}{L} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v}) \right] + \left( \frac{\delta \rho W}{H} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w}) = 0 \end{aligned}$$

Soit, en divisant par  $\rho_0$  et en regroupant les termes fonction de  $\varepsilon_\rho = \frac{\delta \rho}{\rho_0}$  :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{U_h}{L} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W}{H} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \varepsilon_\rho \left\{ \left( \frac{W}{H} \right) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} \right. \\ & \left. + \left( \frac{U_h}{L} \right) \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \bar{v}) \right] + \left( \frac{W}{H} \right) \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \bar{w}) \right\} = 0 \end{aligned}$$

Les termes « barrés » étant tous d'ordre 1, compte tenu de (6) on doit négliger les termes dans le crochet multiplié par  $\varepsilon_\rho$ , soit :

$$\left( \frac{U_h}{L} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W}{H} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

L'équilibre entre ces deux groupes de termes aboutit bien à la relation (12). Après retour aux variables dimensionnelles, on obtient bien la forme incompressible (13) pour cette équation.

**Question 5** - On considère maintenant l'équation de la dynamique dans la direction verticale :

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \nabla \underline{u} \cdot \underline{u} = -\rho g \underline{e}_3 - \underline{\text{grad}} p + \eta \Delta \underline{u} \quad (14)$$

Dans le cadre des hypothèses effectuées plus haut on peut montrer que le problème dynamique se concentre sur l'équation de la composante verticale de la vitesse. Après division par la masse volumique cette équation s'écrit :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \boxed{-g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

L'analyse détaillée des ordres de grandeur de l'équation (14) aboutit à (15) dans la mesure où les dimensions du problème vérifient les relations suivantes :

$$\begin{cases} \epsilon_\rho = \frac{\delta \rho}{\rho_0} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{Fr^2} = \frac{gH}{W^2} \\ \delta p = \rho_0 W^2 \\ Re = \frac{\rho_0 W H}{\eta} = \frac{1}{\epsilon^2} \end{cases} \quad (16)$$

On propose d'admettre (15) et (16) pour l'instant. Leur démonstration pourra être effectuée à la fin du problème si le temps le permet (voir la cinquième partie).

On voit dans l'équation (15) apparaître une source de quantité de mouvement verticale (le terme encadré) qui est due aux écarts de masse volumique. Ce terme est appelé « flottabilité ». On le notera  $b$  :

$$B = -g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (17)$$

La présence de ce terme explique pourquoi une région de fluide plus légère que son environnement, telle que  $\rho < \rho_0$ , tend à s'élever (puisque  $B > 0$ ), ou le contraire. On note aussi dans l'équation (15) que compte tenu de l'hypothèse (11) le terme de diffusion se réduit aux dérivées secondes dans les directions transversales (ici horizontales) de l'écoulement, comme dans une couche limite.

On veut maintenant établir une équation pour la flottabilité  $B$  en faisant appel à l'équation de l'énergie. Pour ce faire, il faut exprimer cette quantité  $B$  définie en (17) en fonction de la température. On introduit pour cela le nombre de Mach :

$$M = \frac{W}{c_0} \quad (18)$$

où  $c_0$  est la célérité du son d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait dans le milieu au repos, telle que :

$$c_0 = c_0(z) = \sqrt{\gamma r T_0(z)} \quad (19)$$

avec  $\gamma = c_p / c_v = \text{const.}$  et  $r = c_p - c_v = \text{const.}$ .

En considérant d'une part l'équation d'état thermique (7) qui caractérise l'état au repos et d'autre part l'échelle des variations de pression  $\delta p$  donnée en (16), quelle relation a-t-on entre les variations relatives  $\frac{\delta p}{p_0(z)}$  de la pression et le nombre de Mach  $M$  ? Que peut-on en déduire comme relation d'ordre de grandeur entre  $M$  et les amplitudes de variation relative de la masse volumique  $\frac{\delta \rho}{\rho_0}$  et de la température  $\frac{\delta T}{T_0(z)}$  ?

**Réponse -** Le rapport entre l'échelle  $\delta p = \rho_0 W^2$  donnée en (16) et  $c_0^2 = \gamma r T_0$  donné en (19) mène à :

$$\frac{\delta p}{p_0(z)} = \frac{W^2}{r T_0(z)} = \gamma M^2$$

Compte tenu de (8) on a :

$$\gamma M^2 \sim \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \frac{\delta T}{T_0(z)}$$

**Question 6** - On suppose dorénavant que les variations de la masse volumique ne sont dues qu'aux variations de la température, la contribution des variations de pression étant négligeable :

$$\frac{\delta p}{p_0(z)} \ll \frac{\delta \rho}{\rho_0} \sim \frac{\delta T}{T_0(z)} \quad (20)$$

Quelle relation d'échelle le nombre de Mach (18) doit-il vérifier d'après le résultat de la question précédente ? D'après le cours, cette relation est-elle compatible avec l'équation (13) trouvée dans la question 4 ? Compte tenu de (8), en déduire que,  $\frac{\delta \rho}{\rho_0} \bar{\rho} \approx -\frac{\delta T}{T_0(z)} \bar{T}$ .

**Réponse** – D'après (20), le coefficient adiabatique  $\gamma$  étant d'ordre 1, le nombre de Mach vérifie la relation d'échelle :

$$\gamma M^2 \ll \frac{\delta \rho}{\rho_0} \sim \frac{\delta T}{T_0(z)} \ll 1$$

Ce résultat est compatible avec l'hypothèse de base du modèle des écoulements de fluide incompressible pour laquelle  $\text{div } \underline{u} = 0$ . En effet, comme montré dans le cours, cette équation est valable quand  $M^2 \ll 1$ . A partir de (8), pour  $\frac{\delta p}{p_0(z)} \bar{p} \ll 1$  on obtient :

$$\frac{\delta \rho}{\rho_0} \bar{\rho} \approx -\frac{\delta T}{T_0(z)} \bar{T}$$

**Question 7** - Dans les conditions stipulées dans la question précédente, la flottabilité  $B$  définie en (17) n'est due qu'aux variations de température. Montrer qu'elle devient :

$$B = g \frac{T - T_0(z)}{T_0(z)} \quad (21)$$



Dans cette relation  $T_0(z) = T_{0,ref} - \frac{g}{r} z$  comme trouvé dans la **question 1**, cf (4). Soit, sous forme adimensionnelle :

$$\frac{T_0(z)}{T_{0,ref}} = 1 - \frac{g}{r T_{0,ref}} \frac{z}{H} \quad (22)$$

En utilisant le résultat de la question précédente montrer que l'on peut négliger le dernier terme dans la relation ci-dessus.

**Réponse -** En introduisant la vitesse verticale, cela revient à montrer que :

$$\frac{W^2}{r T_{0,ref}} \frac{g}{W^2} = \frac{\gamma M^2(z=0)}{Fr^2} \ll 1$$

Comme vu en (16) :  $\frac{1}{Fr^2} = \epsilon_p$  et comme trouvé dans la question précédente:  $\gamma M^2 \ll \epsilon_p \sim \epsilon_T$ .

Donc cette condition est bien vérifiée puisque:

$$\frac{\gamma M^2}{Fr^2} \ll \epsilon_p^2 \ll 1$$

## Conclusion

Donc, finalement, la flottabilité définie en (21) peut être considérée sous la forme :

$$B = g \frac{T - T_0(z)}{T_{0,ref}} \quad (23)$$

Une équation pour cette quantité peut alors être déduite de l'équation de l'énergie interne d'un gaz thermiquement et calorifiquement parfait (donc vérifiant  $e(T) = c_V T$ ,  $c_V = \text{const.}$ ) à quoi l'on rajoute l'hypothèse que la conductivité  $K$  est aussi une constante. On rappelle que la forme

générale de cette équation, vue en cours (cf. poly., éqt. (7.4.10)), s'écrit en l'absence de rayonnement :

$$\rho c_V \frac{dT}{dt} = -p \operatorname{div} \underline{u} + \epsilon + K \Delta T \quad (24)$$

où  $c_V$  désigne la chaleur spécifique à volume constant,  $K$ , la conductivité thermique et  $\epsilon = 2\eta \underline{d} : \underline{d}$  la fonction de dissipation. Par ailleurs, compte tenu de (13), la puissance développée par les forces de volume  $-p \operatorname{div} \underline{u}$  est nulle. Enfin on peut montrer que dans le cadre des hypothèses de ce problème, la puissance  $\epsilon$  développée par le frottement visqueux est également négligeable. Ce point de cours est proposé en question à la fin du problème (cinquième partie).

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \chi \Delta T \\ \chi = \frac{K}{\rho_0 c_V} \end{cases} \quad \text{- diffusivité thermique} \quad (25)$$

En introduisant (23) dans (25) on obtient donc pour l'équation de la flottabilité  $B$  :

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} B = \chi \Delta B \quad (26)$$

Dans l'obtention de (26) se cache une difficulté qui fait l'objet d'une question à la fin du problème (cinquième partie).

Le modèle final, dit **modèle de Boussinesq**, est constitué des équations (13), (15) et (26) qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \underline{u} = 0 \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} w = B + \nu \Delta_h w \\ \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\operatorname{grad}} B = \chi \Delta_h B \end{cases} \quad (27)$$

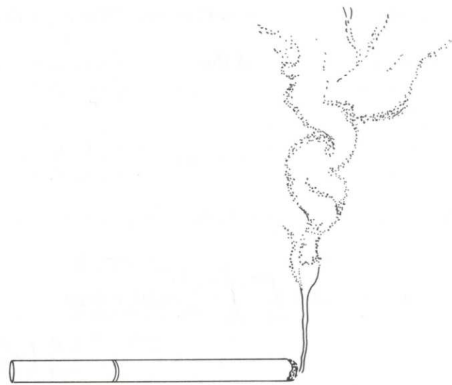
$$\text{où } \Delta_h = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

**Remarque -**

Dans le cadre de l'hypothèse (11), une analyse des ordres de grandeur de  $B$  conduit logiquement à la même simplification du laplacien que pour l'équation de  $w$ .

## Deuxième partie - Le panache stationnaire

On considère le panache qui se développe au-dessus d'une source de flottabilité de petite dimension. Cette source peut être une source de chaleur comme dans le cas d'une cheminée ou celui de l'écoulement près du bout d'une cigarette schématisé sur la **figure 4** ci-dessous.



**Figure 4 -** Le panache d'une cigarette

Dans ce cas, l'écoulement qui se met en place est tout d'abord **stationnaire** et cylindrique sur quelques centimètres. Puis on observe qu'il se déstabilise en volutes de fumée turbulentes. Nous allons montrer pourquoi cela est inévitable.

On se place dans un système de **coordonnées cylindriques**  $(r, \theta, z)$  dans la base orthonormée  $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ . On va supposer que l'écoulement issu d'une source ponctuelle située en  $z = 0$  et  $r = 0$  est axisymétrique de vitesse  $(u_r, u_\theta = 0, w)$  dans un repère cylindrique. L'analyse des ordres de grandeur des termes de l'équation (27) appliquée à  $B$  (non demandée ici) mène à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B u_r) + \frac{\partial}{\partial z} (B w) = \chi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B}{\partial r} \right) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} (r B u_r) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \chi r \frac{\partial B}{\partial r} \right) = 0 \\ B(0,0) = B_0 \end{array} \right. \quad (28)$$

Pour l'accélération convective on a utilisé l'identité vectorielle  $\text{div} (B \underline{u}) = B \cancel{\text{div} \underline{u}} + \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} B$ ,

ainsi que  $\text{div} \underline{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$  appliqué ici au vecteur  $\underline{A} = B \underline{u}$ . Dans le second membre, seul le

premier terme du laplacien  $\Delta A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$  a été retenu compte tenu de l'hypothèse (11).

Enfin, les deux premières conditions aux limites sur la flottabilité traduisent le fait que les flux horizontaux de cette quantité, le flux convectif et le flux diffusif, sont nuls à l'infini.

**Question 8** - Soit :

$$F = \iint B w \, dS = 2\pi \int_0^\infty B w r \, dr \quad (29)$$

le flux vertical de la flottaison  $B$  à travers une surface horizontale. Montrer à partir de (28) que :

$$F = \text{const.} \quad (30)$$

**Réponse** – En intégrant la première équation (28), on obtient :

$$2\pi \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B u_r) r \, dr + 2\pi \frac{d}{dz} \int_0^\infty B w r \, dr = 2\pi \chi \int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial B}{\partial r} \right) r \, dr$$

Soit :

$$2\pi[rBu_r]_0^\infty + 2\pi\frac{dF}{dz} = 2\pi\chi[r\frac{\partial B}{\partial r}]_0^\infty$$

Compte tenu des deux conditions aux limites données en (28) :

$$\frac{dF}{dz} = 0$$

D'où (30).

**Question 9** - On s'attend à ce que la solution du problème (28) soit autosemblable. Sans entreprendre la recherche d'une telle solution, on anticipe le résultat en supposant que la solution vérifie :

$$\begin{cases} w = F^{\alpha_w} v^{\beta_w} z^{\gamma_w} f\left(\frac{r}{\delta(z)}, \text{Pr}\right) \\ B = F^{\alpha_B} v^{\beta_B} z^{\gamma_B} g\left(\frac{r}{\delta(z)}, \text{Pr}\right) \\ \delta = F^{\alpha_\delta} v^{\beta_\delta} z^{\gamma_\delta} h(\text{Pr}) \end{cases} \quad (31)$$

où  $\delta(z)$  définit l'épaisseur caractéristique du panache et où  $\text{Pr} = \nu/\chi$  est le nombre de Prandtl. On se concentre ici sur la dépendance de ces quantités vis-à-vis de  $z$ .

**9(a)** - Montrer que la conservation du flux de flottabilité (29), cf. (30), fournit pour les trois exposants  $\gamma_\delta, \gamma_w, \gamma_B$  de la variable  $z$  qui interviennent dans (31), la relation suivante :

$$2\gamma_\delta + \gamma_w + \gamma_B = 0 \quad (32)$$

**9(b)** - Montrer que l'équation de la dynamique verticale (27) fournit quant à elle les deux relations supplémentaires suivantes :

$$\begin{cases} 2\gamma_w - 1 = \gamma_B \\ \gamma_B = \gamma_w - 2\gamma_\delta \end{cases} \quad (33)$$

**9(c)** - Déterminer alors  $\gamma_\delta, \gamma_w$  et  $\gamma_B$  et décrire comment évoluent selon  $z$  la vitesse ascendante  $w$  du panache et son épaisseur  $\delta(z)$ .

**9(d)** - Que peut-on dire du comportement de la flottabilité  $B$  dans ce problème où l'on a supposé que la source était ponctuelle ?

### Réponses -

**9(a)** - Les relations (29) et (30) impliquent :

$$F = 2\pi\delta^2(z) \int_0^\infty B w \frac{r}{\delta} d\frac{r}{\delta} = \text{const.}$$

Les exposants de  $z$  doivent donc vérifier :

$$2\gamma_\delta + \gamma_w + \gamma_B = 0$$

**9(b)** - En développant l'équation de la dynamique (27) on obtient :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = B + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

L'équilibre de cette équation implique l'équilibre des trois termes, soit :

$$w \frac{\partial w}{\partial z} \sim B \sim \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

donc les dépendances en  $z$  sont respectivement :  $z^{2\gamma_w-1}$ ,  $z^{\gamma_B}$ ,  $z^{\gamma_w-2\gamma_\delta}$ . D'où les deux relations (33).

**9(c)** - Au total on a :

$$\begin{cases} 2\gamma_\delta + \gamma_w + \gamma_B = 0 \\ 2\gamma_w - 1 = \gamma_B \\ \gamma_B = \gamma_w - 2\gamma_\delta \end{cases}$$

On en tire :

$$\begin{cases} \gamma_w = 0 \\ \gamma_B = -1 \\ \gamma_\delta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On constate donc que la vitesse caractéristique  $w$  dans le panache est constante et que l'épaisseur du panache croît comme  $\sqrt{z}$ .

**9(d)** - Dans ce modèle, puisque la source est ponctuelle,  $B$  tend de façon singulière vers l'infini à l'origine.

## Question 10 -

**10(a)** - Comment évolue le nombre de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{w \delta}{\nu} \quad (34)$$

avec  $z$  ?

**10(b)** - Expliquer alors l'allure générale du panache tel qu'il est dessiné sur la **figure 4** ci-dessus.

## Réponse -

**10(a)** - Le nombre de Reynolds augmente avec  $z$  comme  $\sqrt{z}$ .

**10(b)** - Au-delà d'une certaine altitude le panache devient turbulent.

**Question 11** - Déterminer les exposants  $(\alpha_\delta, \alpha_w, \alpha_B)$  et  $(\beta_\delta, \beta_w, \beta_B)$  qui fixent la dépendance de  $\delta(z)$ , de  $w$  et de  $B$  vis-à-vis de  $F$  et de  $v$  dans les relations (31) et expliciter ces lois.

**Réponse** - On raisonne dimensionnellement avec :

- D'après (17) ou (21) :  $[B] = [g] = \frac{L}{T^2}$

- D'après (29) :  $[F] = [B w r^2] = \frac{L^4}{T^3}$

- On sait par ailleurs que :  $[v] = \frac{L^2}{T}$

Donc, si l'on tient compte de la dépendance en  $z$  demandée dans la question 9(c) :

- Pour la vitesse  $w$  : 
$$\begin{cases} L: & 1 = 4\alpha_w + 2\beta_w \\ T: & -1 = -3\alpha_w - \beta_w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -2\alpha_w \\ 0 = \alpha_w + \beta_w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_w = \frac{1}{2} \\ \beta_w = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Pour la flottabilité  $B$  : 
$$\begin{cases} L: & 1 = 4\alpha_B + 2\beta_B - 1 \\ T: & -2 = -3\alpha_B - \beta_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = -2\alpha_B - 1 \\ -1 = \alpha_B + \beta_B - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_B = 1 \\ \beta_B = -1 \end{cases}$$

- Pour l'épaisseur :  $\delta(z)$  
$$\begin{cases} L: & 1 = 4\alpha_\delta + 2\beta_\delta + \frac{1}{2} \\ T: & 0 = -3\alpha_\delta - \beta_\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = -2\alpha_\delta + \frac{1}{2} \\ 1 = \alpha_\delta + \beta_\delta + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_\delta = -\frac{1}{4} \\ \beta_\delta = \frac{3}{4} \end{cases}$$

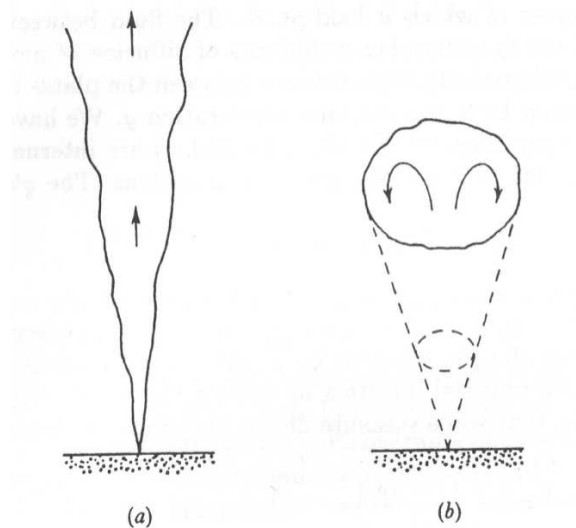
Donc au total, tenant compte on obtient :



$$\begin{cases} w = F^{1/2} \nu^{-1/2} f\left(\frac{r}{\delta(z)}, \text{Pr}\right) \\ B = F \nu^{-1} z^{-1} g\left(\frac{r}{\delta(z)}, \text{Pr}\right) \\ \delta(z) = F^{-1/4} \nu^{3/4} z^{1/2} h(\text{Pr}) \end{cases}$$

### Troisième partie - Le panache turbulent

On considère dans cette troisième partie les cas de panaches turbulents dans un fluide de masse volumique homogène. Dans le cas d'un panache, voir **figure 5 (a)** ci-dessous, on a une source de flottabilité qui alimente constamment l'écoulement.



**Figure 5** - Schéma d'un panache provenant d'une source ponctuelle, et d'une thermique provenant d'une source ponctuelle qui ne dure qu'un temps fini.

**Question 12** - On considère alors qu'on est en présence d'une source de flottabilité constante caractérisée par le flux  $F$  de flottabilité. On va de nouveau procéder par analyse dimensionnelle. La solution du problème turbulent est maintenant cherchée sous la forme :

$$\begin{cases} w = F^{\alpha_w} z^{\gamma_w} f\left(\frac{r}{\delta(z)}\right) \\ B = F^{\alpha_B} z^{\gamma_B} g\left(\frac{r}{\delta(z)}\right) \\ \delta(z) = \text{const.} \times F^{\alpha_\delta} z^{\gamma_\delta} \end{cases} \quad (35)$$

Qu'est-ce qui a changé par rapport aux relations (31) ? Pourquoi ?

### Réponse -

Le problème ne dépend plus ni de la viscosité ni de la diffusivité moléculaire (donc il ne dépend plus du nombre de Prandtl). Cela caractérise un régime turbulent : l'écoulement se libère des effets moléculaires.

**Question 13** - Expliciter les lois (35).

**Réponse** - On raisonne de nouveau dimensionnellement. Rappelons que :

$$[B] = [g] = \frac{L}{T^2}$$

$$[F] = \frac{L^4}{T^3}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \text{- Pour la vitesse } w : \quad & \begin{cases} L: & 1 = 4\alpha_w + \gamma_\delta \\ T: & -1 = -3\alpha_w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_w = \frac{1}{3} \\ \gamma_\delta = -\frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Pour la flottabilité } B : \quad & \begin{cases} L: & 1 = 4\alpha_B + \gamma_\delta \\ T: & -2 = -3\alpha_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_B = \frac{2}{3} \\ \gamma_\delta = -\frac{5}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- Pour l'épaisseur } \delta(z) : \quad & \begin{cases} L: & 1 = 4\alpha_\delta + \gamma_\delta \\ T: & 0 = -3\alpha_\delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_\delta = 0 \\ \gamma_\delta = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{cases} w = F^{1/3} z^{-1/3} f\left(\frac{r}{\delta(z)}\right) \\ B = F^{2/3} z^{-5/3} g\left(\frac{r}{\delta(z)}\right) \\ \delta(z) = \text{const.} \times z \end{cases}$$

**Question 14** - Vérifier que les expressions obtenues sont cohérentes avec la conservation du flux  $F$  obtenue plus haut, cf. (30).

**Réponse** - En effectuant le produit  $w B \delta^2(z)$  on élimine bien la dépendance en  $z$  et on retrouve  $F$ .

**Question 15** - Comparer votre résultat avec celui demandé pour le cas non-turbulent dans la question 9(c) et commenter.

**Réponse** - En régime turbulent la vitesse verticale  $w$  n'est plus constante mais décroît comme  $z^{-1/3}$ . La flottabilité  $B$  décroît maintenant comme  $z^{-5/3}$  au lieu de  $z^{-1}$ . Enfin l'épaisseur du panache varie comme  $z$  au lieu de  $\sqrt{z}$ . C'est le résultat du transport macroscopique assuré par la turbulence.

**Question 16** - Estimer le flux de masse associé au panache, que l'on peut définir en première approximation comme :

$$\dot{m}(z) = \iint \rho_0 w dS = 2\pi \int_0^\infty \rho_0 w r dr \quad (36)$$

Qu'advient-il du fluide qui se trouve dans l'environnement du panache ?

**Réponse -**

$$\dot{m}(z) = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty w r dr = \text{const.} \times 2\pi\rho_0 F^{1/3} z^{5/3} \int_0^\infty f\left(\frac{r}{\delta(z)}\right) \frac{r}{\delta(z)} d\left(\frac{r}{\delta(z)}\right)$$

Donc le débit dans le panache augmente approximativement comme  $z^{5/3}$  consécutivement à l'action du transport macroscopique de la turbulence qui entraîne le fluide environnant.

### Quatrième partie - La thermique turbulente

Une thermique correspond à une région de fluide qui résulte d'un apport de flottabilité durant un temps fini. Cela engendre une anomalie de flottabilité qui s'élève et se mélange, comme schématisé sur la **figure 5(b)** ci-dessus. Mais contrairement au cas du panache thermique ce mécanisme est transitoire puisque la source de flottabilité ne dure pas.

**Question 17** - De la même façon qu'on a décrit par analyse dimensionnelle un panache turbulent provenant d'une source ponctuelle permanente, on considère maintenant une thermique provoquée par une source qui n'est active que durant une durée brève. Une certaine quantité de flottabilité est produite durant cette durée, on la notera  $\mathcal{Q}$  :

$$\mathcal{Q} = \iiint B dV \quad (37)$$

En vous servant du théorème  $\Pi$ , caractériser tour à tour l'évolution verticale de la vitesse  $w$ , celle de la flottabilité  $B$  et celle de l'épaisseur  $\delta(z)$  de la thermique.

**Réponse -**

La flottabilité  $B$  a les dimensions d'une accélération, en  $m.s^{-2}$ , cf. (21) ou (23). Intégrée sur l'espace,  $\mathcal{Q}$  a donc pour dimension :

$$[\mathcal{Q}] = \frac{L^4}{T^{-2}}$$

La solution de ce problème est de la forme :

$$\mathcal{F}(w, z, \mathcal{Q}) = 0$$

$$\mathcal{G}(B, z, \mathcal{Q}) = 0$$

$$\mathcal{H}(\delta, z, \mathcal{Q}) = 0$$

Les matrices des exposants aux dimensions sont :

$$\begin{array}{ccc} w & z & \mathcal{Q} \\ L \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ T \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} B & z & \mathcal{Q} \\ L \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ T \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \delta & z & \mathcal{Q} \\ L \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ T \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Le rang  $r$  de ces matrices vaut 2. Il y a donc 2 grandeurs physiques indépendantes. Il n'y a pas d'autre choix que de prendre pour les  $r = 2$  grandeurs indépendantes  $\mathcal{Q}$  et  $z$ . Cela donne :

$$\overline{\mathcal{F}}\left(\frac{w}{\mathcal{Q}^{\alpha_w} z^{\beta_w}}, \frac{\delta}{\mathcal{Q}^{\alpha_\delta} z^{\beta_\delta}}\right) = 0$$

$$\bar{G}\left(\frac{B}{Q^{\alpha_B} z^{\beta_B}}, \frac{\delta}{Q^{\alpha_\delta} z^{\beta_\delta}}\right) = 0$$

On trouve sans difficulté :

$$\begin{cases} w = Q^{1/2} z^{-1} f\left(\frac{z}{\delta}\right) \\ B = Q z^{-3} g\left(\frac{z}{\delta}\right) \\ \delta(z) = \text{const.} \times z \end{cases}$$

**Question 18** - Comparer ces résultats au cas du panache laminaire traité dans la partie précédente, cf. question (13), et commenter.

**Réponse** - L'épaisseur est affine en  $z$  comme le panache turbulent. Comme schématisé sur la **figure 5(b)** l'extension latérale de la bulle de convection forme ainsi un cône. En revanche la vitesse verticale diminue plus rapidement, en  $z^{-1}$  contre  $z^{-1/3}$  pour le panache turbulent. La flottabilité décroît aussi nettement plus rapidement, en  $z^{-3}$  contre  $z^{-5/3}$ . Cela est dû au fait que l'anomalie dans la bulle de convection n'est plus alimentée par le flux arrivant du bas. Le fluide léger se mélange donc plus vite au fluide environnant.

## Cinquième partie – Fin du problème

Les quatre questions suivantes, annoncées plus haut, permettront de finir ce problème proprement

**Question 19** - Démontrer à partir de l'équation (14) que l'on obtient pour la composante verticale de la vitesse l'équation :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} [p - p_0(z)] + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (38)$$

On montrera que cela s'obtient dans la mesure où les échelles du problème vérifient les trois conditions (16).

**Réponse -** Pour la composante verticale de vitesse l'équation (14) donne

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} w = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta w$$

En introduisant les relations dimensionnelles (5), (9), et (10) , on obtient :

$$\begin{aligned} & (\rho_0 + \delta\rho \bar{\rho}) \left\{ \left( \frac{W^2}{H} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \left( \frac{U_h W}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W^2}{H} \right) \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right\} \\ &= -(\rho_0 + \delta\rho \bar{\rho}) g - \left( \frac{1}{H} \right) \frac{\partial}{\partial z} [ p_0(z) + \delta p \bar{p} ] + \left( \frac{\eta W}{L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta W}{H^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Après division par  $\rho_0$  , en tenant compte de (2) et en regroupant les termes en  $\epsilon_\rho$  on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{W^2}{H} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \left( \frac{U_h W}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W^2}{H} \right) \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ &+ \epsilon_\rho \bar{\rho} \left[ \left( \frac{W^2}{H} \right) \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \left( \frac{U_h W}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W^2}{H} \right) \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] \\ &= \cancel{g} - \epsilon_\rho \bar{\rho} g + \cancel{g} - \left( \frac{\delta p}{\rho_0 H} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \left( \frac{\eta W}{\rho_0 L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta W}{\rho_0 H^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

où l'on a exploité l'expression de la pression hydrostatique (2). Soit encore, après division par la dimension du premier terme :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \left( \frac{U_h H}{WL} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \epsilon_\rho \bar{\rho} \left[ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \left( \frac{U_h H}{WL} \right) \nabla_h \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right] \\ &= - \left( \epsilon_\rho \frac{gH}{W^2} \right) \bar{\rho} - \left( \frac{\delta p}{\rho_0 W^2} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \left( \frac{\eta}{\rho_0 WH} \frac{H^2}{L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta}{\rho_0 WH} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

La condition (5) permet d'éliminer les termes en  $\varepsilon_p$  dans le premier membre (et uniquement dans le premier membre). Tenant compte alors de (11) et (12) on obtient:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \\ &= - \left( \varepsilon_p \frac{gH}{W^2} \right) \bar{\rho} - \left( \frac{\delta p}{\rho_0 W^2} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \left( \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

On peut alors simplifier le terme de diffusion compte tenu de (11). Soit :

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = - \left( \varepsilon_p \frac{gH}{W^2} \right) \bar{\rho} - \left( \frac{\delta p}{\rho_0 W^2} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \left( \frac{1}{\varepsilon^2 \text{Re}} \right) \Delta_h \bar{w} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)$$

Il est possible de conserver tous les termes de cette équation dans la mesure où les échelles du problème vérifient (16). La forme dimensionnelle de l'équation est celle demandée en (38).

**Question 20** – Pourquoi peut-on, comme écrit en (15), éliminer finalement le gradient de pression de l'équation (38) ?

**Réponse -** Comme dans l'analyse du modèle de la couche limite qui aboutit aux équations de Prandtl, l'analyse des ordres de grandeurs des termes des équations **des deux composantes horizontales**  $u$  et  $v$  aboutit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} [p - p_0(z)] = \frac{\partial}{\partial y} [p - p_0(z)] = 0$$

Donc  $p - p_0(z)$  se raccorde à sa valeur à l'infini (pour une altitude  $z$  donnée) qui est constante et nulle. D'où l'élimination du gradient de pression.

La démonstration (non demandée) est la suivante. On part de :



$$\begin{cases} \rho \frac{du}{dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} u = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta u \\ \rho \frac{dv}{dt} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \underline{\text{grad}} v = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v \end{cases}$$

En introduisant les relations dimensionnelles (5), (9) et (10) , on obtient successivement :

$$\begin{cases} \left( \rho_0 + \delta \rho \bar{\rho} \right) \left( \frac{U_h W}{H} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left( \frac{U_h^2}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W^2}{H} \right) \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ = - \left( \frac{1}{L} \right) \frac{\partial}{\partial x} [ p_0(z) + \delta p \bar{p} ] + \left( \frac{\eta U_h}{L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta U_h}{H^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ \left( \rho_0 + \delta \rho \bar{\rho} \right) \left\{ \left( \frac{U_h W}{H} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left( \frac{U_h^2}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W U_h}{H} \right) \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right\} \\ = - \left( \frac{1}{L} \right) \frac{\partial}{\partial y} [ p_0(z) + \delta p \bar{p} ] + \left( \frac{\eta U_h}{L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta U_h}{H^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \end{cases}$$

Après division par  $\rho_0$  et élimination des termes en  $\varepsilon_\rho$  on obtient :

$$\begin{cases} \left( \frac{U_h W}{H} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left( \frac{U_h^2}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W U_h}{H} \right) \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ = - \left( \frac{\delta p}{\rho_0 L} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left( \frac{\eta U_h}{\rho_0 L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta U_h}{\rho_0 H^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ \left( \frac{U_h W}{H} \right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left( \frac{U_h^2}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \left( \frac{W U_h}{H} \right) \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ = - \left( \frac{\delta p}{\rho_0 L} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \left( \frac{\eta U_h}{\rho_0 L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta U_h}{\rho_0 H^2} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \end{cases}$$

Soit encore, après division par la dimension du premier terme :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left( \frac{U_h}{W} \frac{H}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &= - \left( \frac{\delta p}{\rho_0 W^2} \frac{W}{U_h} \frac{H}{L} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left( \frac{\eta}{\rho_0 W H} \frac{H^2}{L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta}{\rho_0 W H} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ & \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left( \frac{U_h^2}{W^2} \frac{H}{L} \right) \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ &= - \left( \frac{\delta p}{\rho_0 W^2} \frac{W}{U_h} \frac{H}{L} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \left( \frac{\eta}{\rho_0 W H} \frac{H^2}{L^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\eta}{\rho_0 W H} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \end{aligned} \right.$$

Enfin, tenant compte de (11) et (12) et de la dimension de la pression obtenue dans l'équation de la vitesse verticale en (16) :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ &= - \left( \frac{1}{\epsilon^2} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left( \frac{1}{\epsilon^2 \text{Re}} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \\ & \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ &= - \left( \frac{1}{\epsilon^2} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \left( \frac{1}{\epsilon^2 \text{Re}} \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \end{aligned} \right.$$

Cela aboutit bien à :

$$\frac{\partial}{\partial x} [ p - p_0(z) ] = \frac{\partial}{\partial y} [ p - p_0(z) ] = 0$$

**Question 21** - Montrer pourquoi il est légitime de négliger la fonction de dissipation  $\epsilon$  dans l'équation de la température (24).

**Réponse** - Comme montré dans le cours polycopié (cf. éqt. (8.3.14)), on peut légitimement négliger  $\epsilon$  dans (24) dans la mesure où le nombre d'Eckert qui compare l'énergie cinétique spécifique de l'écoulement  $W^2$  à la variation de l'énergie interne spécifique  $c_V \delta T$ ,

vérifie  $Ec = W^2 / (c_V \delta T) \ll 1$ . En introduisant la célérité du son  $c_0 = \sqrt{\gamma r T_0}$  du milieu, cela donne :  $Ec = M^2 (\gamma r T_0) / (c_V \delta T) = (\gamma r) / c_V M^2 / (\delta T / T_0) \ll 1$  avec  $(\gamma r) / c_V = \gamma (c_p - c_v) / c_V = \gamma(\gamma - 1) = O(1)$ . Il faut donc que  $M^2 \ll \delta T / T_0$ , ce qui a été démontré dans la question (6).

**Question 22 -** En utilisant (23), (25) et (4) montrer que l'équation de  $B$  s'écrit :

$$\frac{dB}{dt} - w \frac{g^2}{T_{0,ref} r} = \chi \Delta B \quad (39)$$

Etablir à l'aide d'une analyse d'ordres de grandeur la condition à vérifier pour que l'on puisse négliger le second terme du membre de gauche de cette équation. Cette condition est-elle vérifiée dans le cadre des hypothèses de ce problème ?

**Réponse -**

On exprime  $B$  en utilisant  $B = g \frac{T - T_0(z)}{T_{0,ref}}$ ,  $T = T_0(z) + \frac{T_{0,ref}}{g} B$  et  $T_0(z) = T_{0,ref} - \frac{g z}{r}$ , cf (4) soit :

$$T = T_{0,ref} - \frac{g}{r} z + \frac{T_{0,ref}}{g} B$$

En introduisant cela dans l'équation de la chaleur

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)$$

il vient :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_{0,ref}}{g} \frac{dB}{dt} - w \frac{g}{r} = \chi \frac{T_{0,ref}}{g} \Delta B$$

Soit encore :

$$\frac{dB}{dt} - w \frac{g^2}{T_{0,ref} r} = \chi \Delta B$$

Analysons les ordres de grandeur des termes de cette équation. Sachant, d'après (23), que :

$$B \sim g \frac{\delta T}{T_{0,ref}} \bar{T}$$

on obtient pour la dérive convective :

$$\frac{dB}{dt} \sim w \frac{\partial B}{\partial z} \sim \frac{gw\delta T}{T_{0,ref} H} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}$$

Donc on peut réduire le premier membre de l'équation de  $B$  à la dérivée particulaire  $\frac{dB}{dt}$  dans la mesure où :

$$\frac{wg^2}{T_{0,ref} r} \ll \frac{gw\delta T}{T_{0,ref} H}$$

Soit :

$$\frac{gH}{r\delta T} \ll 1$$

Nous avons trouvé dans la question 7 :

$$\frac{gH}{rT_0(z)} \approx \frac{\gamma M^2}{Fr^2} \ll 1$$

La condition précédente peut alors s'écrire :

$$\frac{gH}{r\delta T} = \frac{gH}{rT_0(z)} \frac{T_0(z)}{\delta T} = \frac{\gamma M^2}{Fr^2} \frac{1}{\varepsilon_T} \ll 1$$

Cette condition est effectivement respectée car on a vu que :

$$\frac{\gamma M^2}{Fr^2} \ll \varepsilon_p^2 \sim \varepsilon_T^2,$$

donc on a bien :

$$\frac{\gamma M^2}{Fr^2} \frac{1}{\varepsilon_T} \ll \frac{\varepsilon_T^2}{\varepsilon_T} = \varepsilon_T \ll 1$$