الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

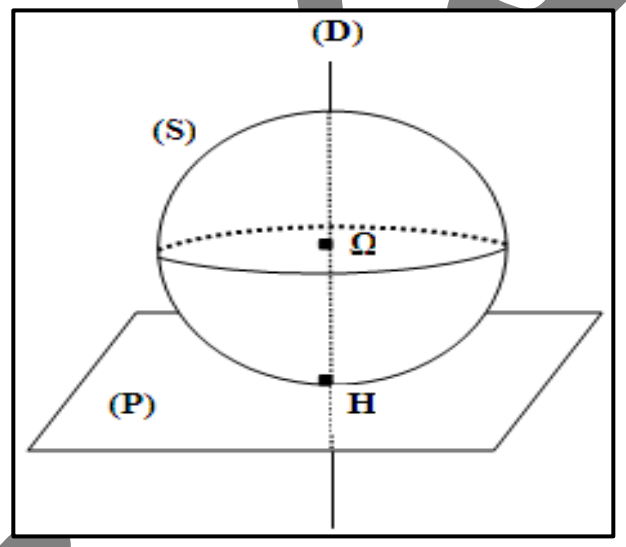
– وزارة التربية الوطنية –

سلسلة سبل التألق في الرياضيات

BAC 2017 جديد

ملخص حول الهندسة التحليلية في الفضاء

BAC 2017



أعد هذا الملخص وفق أهداف ومضمون وهيكلة النظام الجديد

قيل لنابليون كيف استطعت ان تولد الثقة في جيشك ؟

فأجاب : كنت ارد على ثلاث بثلاث

من قال: لا اقدر قلت له : حاول ومن قال : لا اعلم قلت له : تعلم ومن قال مستحيل قلت له : جرب

إعداد الأستاذ: محمد حاقة

دليل الهندسة الفضائية التحليلية

في كل ما يلي المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $\left(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

أولا - مفاهيم أولية -

نعتبر النقطتين : $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ والشعاعان : $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha'\\ \beta'\\ \gamma'\end{pmatrix}$

1) مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}$

2) الطول (المسافة) بين النقطتين A و B هو: $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$

3) إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ هي : $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

4) الجداء السلمي لشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو : $\vec{u}\bullet\vec{v}=\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'$

5) تعامد الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يعني : $\vec{u}\perp\vec{v}\Rightarrow\vec{u}\bullet\vec{v}=\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'=0$

6) توازي الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ يعني $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطين خطياً(أي إثبات وجود عدد حقيقي t يحقق : $\vec{u}=t\,\vec{v}$)

<u>معناه</u> : يكفي أن نثبت أن التناسب التالي : $\left[\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=t\in\mathbb{R}\right]$ محقق

7) جيب تمام ($\cos$) زاوية شعاعيّة : حيث : $\vec{u}\neq\vec{0}$ و $\vec{v}\neq\vec{0}$

$$\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\bullet\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{\alpha\times\alpha'+\beta\times\beta'+\gamma\times\gamma'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}\times\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2}}$$

حافظ محمد

ثانيا " المستقيم في الفضاء"

1°) التمثيل الوسيطي لمستقيم (يشمل نقطة ويوازي شعاع)

المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ ويوازي الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

لتكن: $M\left(x,y,z\right) \in (\Delta)$ يعني : $\overrightarrow{AM} \parallel \vec{u}$ أي : $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$ (حيث : t من $\mathbb{R}$)

ومنه (Δ) له تمثيل وسيطي من الشكل : $(\Delta):\begin{cases} x = \alpha\, t + x_A \\ y = \beta\, t + y_A \\ z = \gamma\, t + z_A \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$ [$\vec{u}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ)]

2°) التمثيل الوسيطي لمستقيم (يشمل نقطتين)

المستقيم (AB) الذي يشمل النقطتين $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ و $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$

لتكن: $M(x,y,z) \in (AB)$ يعني : $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB}$ أي : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ (حيث : t من $\mathbb{R}$)

ومنه (AB) له تمثيل وسيطي من الشكل : $\begin{cases} x = \left(x_B - x_A\right)t + x_A \\ y = \left(y_B - y_A\right)t + y_A \\ z = \left(z_B - z_A\right)t + z_A \end{cases}$ [$\overrightarrow{AB}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (AB)]

3°) مستقيمات خاصة

- ❖ حامل محور الفواصل $\left(o;\vec{i}\right)$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- ❖ حامل محور التراتيب $\left(o;\vec{j}\right)$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$
- ❖ حامل محور الرواقم $\left(o;\vec{k}\right)$ يعرف بالجملة : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

4°) المسقط العمودي لنقطة على مستقيم

لتكن النقطة $H(x,y,z)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

حاقة محمد

الذي تمثيله الوسيطي $(\Delta):\begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} ;(t \in \mathbb{R})$ ، لتعيين إحداثيات النقطة H

❖ نبحث عن قيمة الوسيط t وذلك عن طريق :

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \bullet \vec{u} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha t + x_0 - x_A \\ \beta t + y_0 - y_A \\ \gamma t + z_0 - z_A \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

❖ نعوض عن t في إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) ، فنجد إحداثيات المسقط العمودي H

5°) بعد نقطة عن مستقيم

لحساب بُعد نقطة A عن المستقيم (Δ)، نعيّن مسقطها العمودي H على هذا المستقيم ويكون بُعد النقطة عن المستقيم (Δ) هو الطول AH أي :

$$d\left(A;(\Delta)\right) = AH = \left\|\overrightarrow{AH}\right\| = \sqrt{\left(x_H - x_A\right)^2 + \left(y_H - y_A\right)^2 + \left(z_H - z_A\right)^2}$$

6°) تعامد مستقيمين في الفضاء

يتعامد مستقيمان في الفضاء اذا تعامد شعاعا توجيههما بمعنى:

- **إذا كان** : (Δ) و (Δ') مستقيمين شعاعي توجيههما على الترتيب : $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ و $\vec{u}_{(\Delta')}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

فلدينا: $(\Delta) \perp (\Delta') \Rightarrow \vec{U}_{(\Delta)} \bullet \vec{U}_{(\Delta')} = 0 \Rightarrow \alpha \times \alpha' + \beta \times \beta' + \gamma \times \gamma' = 0$

7°) الوضعية النسبية لمستقيمين في الفضاء

ليكن (Δ) و (Δ') مستقيمين شعاعي توجيههما على الترتيب : $\vec{u}_{(\Delta)}$ و $\vec{u}_{(\Delta')}$

❖ إذا كان $\vec{u}_{(\Delta')} \parallel \vec{u}_{(\Delta)}$ (مرتبطان خطياً) فان : المستقيمان (Δ) و (Δ') متوازيان

(متوازيا تماما أو منطبقان)

- **توضيح** : نعين نقطة A من المستقيم (Δ) (أو من (Δ'))

أ/ إذا كانت A تنتمي كذلك إلى المستقيم (Δ') فان (Δ) و (Δ') **منطبقان**

ب/ إذا كانت A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ') فان (Δ) و (Δ') **متوازيا تماما (منفصلان)**

حاقة محمد

❖ إذا كان $\vec{u}_{(\Delta)} \not\parallel \vec{u}_{(\Delta')}$ (غير مرتبطان خطياً) فان : المستقيمان (Δ) و (Δ') غير متوازيان

(متقاطعان في نقطة أو من مستويين مختلفين : " ليسا من نفس المستوي ")

ثالثا "المستوي في الفضاء"

1°) المعادلة الديكارتية لمستوٍ

كل مستوٍ في الفضاء له معادلة ديكارتية من الشكل : $ax+by+cz+d=0$

حيث : a ، b و c لا تنعدم في آن واحد ، علماً أن : $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ هو الشعاع الناظمي له (عمودياً عليه)

2°) تعيين معادلة ديكارتية لمستوٍ معين بثلاث نقط (يشمل ثلاث نقط)

أ/ لإثبات أن النقط : A ، B و C تعرف (تُعين – تُشكل) مستوٍ :

❖ يعني النقط : A ، B و C ليست في إستقامية

❖ يعني الشعاعان: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً (غير متوازيين)

ب/ لإيجاد معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) :

❖ نبحث عن شعاعاً ناظمياً $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ له وذلك بحل الجملة التالية $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

ثم نطبق التعريف التحليلي للجداء السلمي فنجد عادة جملة ثلاث مجاهيل بمعادلتين فقط ممّا يجعلنا مثلا نثبت a ونبحث عن b و c بدلالة a فنجد الشعاع الناظمي العام $\vec{n}_a$ ونختار قيمة مبسطة لـ : a

وعليه نجد الشعاع الناظمي الخاص $\vec{n}$

❖ بعد إيجاد a، b و c أعداد معلومة يبقى d مجهول فعلينا أن نعوض إحداثيات احد النقط: A أو B أو C في المعادلة : $ax+by+cz+d=0$ فنجد قيمة d

• **تنبيه**: إذا أعطيت المعادلة الديكارتية للمستوي وطلب منا التأكد من أنها للمستوي (ABC) يكفي أن نبين : أ/ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

ب/ إحداثيات كل من النقط الثلاث A ، B و C تحقق المعادلة : $ax+by+cz+d=0$

حاقة محمد

بمعنى : $\begin{cases} A \in (ABC) \\ B \in (ABC) \\ C \in (ABC) \end{cases}$

3°) مستويات خاصة:

- ❖ $x = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$
- ❖ $y = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$
- ❖ $z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$

4°) بعد نقطة عن مستو

بعد النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ عن المستوي : $(P): ax + by + cz + d = 0$ تعطى بالقانون التالي:

$$d(A;(\mathrm{P})) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

5°) التمثيل الوسيطي لمستو معين بثلاث نقط (يشمل ثلاث نقط):

لإيجاد التمثيل الوسيطي للمستوي (ABC) حيث: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً

$M(x,y,z) \in (ABC)$ يعني : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB} + t'\overrightarrow{AC}$ (حيث : t و t' من $\mathbb{R}$)

يعني : $\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + (x_C - x_A)t' + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + (y_C - y_A)t' + y_A \\ z = (z_B - z_A)t + (z_C - z_A)t' + z_A \end{cases}$

6°) تعامد مستويين

يتعامد مستويان في الفضاء اذا تعامد شعاعهما الناظميّان:

إذا كان : $\begin{cases} (P_1): ax + by + cz + d = 0 \\ (P_2): a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ فلدينا : $(P_1) \perp (P_2)$ يعني : $\vec{n}_{(P_1)} \perp \vec{n}_{(P_2)}$

أي : $\vec{n}_{(P_1)}.\vec{n}_{(P_2)} = a \times a' + b \times b' + c \times c' = 0$

7°) المسقط العمودي لنقطة على مستوي

لتكن النقطة $H(x,y,z)$ هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ،لتعيين إحداثيات النقطة H :

أ/ نبحث عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) الذي يشمل النقطة A وعمودي على المستوي في النقطة H

أي : " $\overrightarrow{AH} \parallel \vec{n}_{(P)}$ يعني $\overrightarrow{AH} = t.\ \vec{n}_{(P)}$ "

ب/ نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (AH) في معادلة المستوي (P) فنجد قيمة t ونعوض عن t في التمثيل الوسيطي فنجد إحداثيات المسقط العمودي H

8°) الوضعية النسبية لمستويين في الفضاء

نعتبر المستويين (P_1) و (P_2) المعرفين بمعادلتيهما كما يلي: $\begin{cases}(P_1): ax + by + cz + d = 0\\(P_2): a'x + b'y + c'z + d' = 0\end{cases}$

❖ إذا كان : $\left[\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \dfrac{d}{d'}\right]$ فان : المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان بالتطابق **(منطبقان)**

❖ إذا كان : $\left[\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \neq \dfrac{d}{d'}\right]$ فان : المستويين (P_1) و (P_2) متوازيان تماماً **(منفصلان)**

❖ إذا كان **التناسب التالي** : $\left[\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}\right]$ **غير محقق** فان : المستويين (P_1) و (P_2) غير متوازيان **(متقاطعان)**

- **ملحوظة**

▪ **المسألة** : للبحث عن المستقيم (Δ) ناتج تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) أي : $(P_1) \cap (P_2) = (\Delta)$

نضع في الحالة العامة : $z = t$ ونبحث عن x و y بدلالة t فنجد التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)

من الشكل : $(\Delta): \begin{cases}x = \alpha t + x_0\\y = \beta t + y_0 \quad ;(t \in \mathbb{R})\\z = t\end{cases}$

▪ **المسألة العكسية**: عندما يكون لدينا التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)، لكي نبين أن (Δ) هو مستقيم تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) ، يكفي أن نتحقق : $\begin{cases}(\Delta) \subset (P_1)\\(\Delta) \subset (P_2)\end{cases}$ بمعنى إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ)تحقق معادلة كلاً من المستويين (P_1) و (P_2)

9°) كيفية تعيين تقاطع ثلاث مستويات

❖ **الحالة (1)** : اذا كان مستويان منهم متوازيان تماما فان تقاطع المستويات الثلاثة **خال**

بمعنى : $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \{\emptyset\}$

❖ **الحالة (2)** : اذا كان مستويين منهم غير متوازيين (**متقاطعين**) نعين مستقيم تقاطعهما (Δ) فيصبح تقاطع المستويات الثلاثة عبارة عن تقاطع مستقيم مع مستوي

بمعنى : مثلا $(P_1)\cap(P_2)\cap(P_3)=(\Delta)\cap(P_3)$

10°) تعامد مستقيم ومستوي في الفضاء

يتعامد مستقيم ومستوي في الفضاء اذا **توازى** شعاع توجيه هذا المستقيم مع الشعاع الناظمي لهذا المستوي

بمعنى إذا كان : $\vec{u}_{(\Delta)}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (Δ) و $\vec{n}_{(P)}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

فان : $(\Delta)\perp(P)\Rightarrow \vec{u}_{(\Delta)}\parallel\vec{n}_{(P)}\Rightarrow \dfrac{a}{\alpha}=\dfrac{b}{\beta}=\dfrac{c}{\gamma}$

11°) الوضع النسبي لمستقيم ومستوي في الفضاء

❖ $(\Delta)\cap(P)=(\Delta)$ يعني : $(\Delta)\subset(P)$ " (Δ) مرسوم في هذا المستوي "

❖ $(\Delta)\cap(P)=\{\varnothing\}$ يعني (P) و (Δ) متوازيان تماماً (**منفصلان**)

❖ $(\Delta)\cap(P)=\{F\}$

لإيجاد إحداثيات F نقطة تقاطع (P) و (Δ)، نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة المستوي (P) فنجد قيمة t ونعوض عن t في التمثيل الوسيطي فنجد إحداثيات F

رابعاً "سطح الكرة في الفضاء"

1°) معادلة سطح الكرة: معادلة سطح الكرة (S) ذات المركز: $\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$ ونصف قطرها R تعطى بالقانون $(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2=R^2$

2°) المسألة العكسية: لتكن (E) : مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء التي تحقق

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

لمعرفة طبيعة مجموعة النقط (E) يمكن أن نستعمل إحدى الطريقتين الآتيتين :

❖ **الطريقة الأولى** : (**طريقة حساب العدد** K)، نحسب : $K=\dfrac{a^2+b^2+c^2-4d}{4}$

نميز ثلاث حالات

- **إذا كان** : $K < 0$ **فان** : $(E) = \varnothing$
- **إذا كان** : $K = 0$ **فان** : $(E) = \left\{ \omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2} \right) \right\}$
- **إذا كان**: $K > 0$ **فان**: (E) سطح كرة (S) **حيث** :

$$(E) = (S) = \left\{ \omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega) \ ; \ R = \sqrt{K} \right\}$$

❖ **الطريقة الثانية**: (**طريقة استعمال قاعدة إكمال التربيع**)

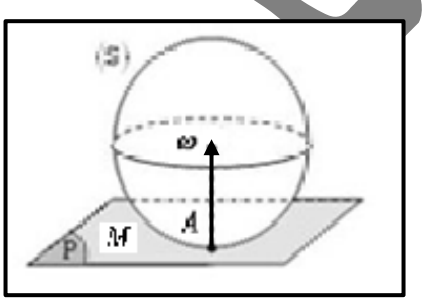
نستخدم فيها :

$$\begin{cases} x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(\frac{a}{2} \right)^2 \\ y^2 + by = \left(y + \frac{b}{2} \right)^2 - \left(\frac{b}{2} \right)^2 \\ z^2 + cz = \left(z + \frac{c}{2} \right)^2 - \left(\frac{c}{2} \right)^2 \end{cases}$$

▪ **نصيحة**: إذا اشتملت المعادلة المعطاة لمجموعة النقط (E) على وسيط يفضل استخدام طريقة حساب العدد K أمّا إذا لم تشتمل المعادلة على وسيط فنفضل استخدام طريقة قاعدة إكمال التربيع

3°) كيفية تعيين معادلة مستو يمس سطح كرة في نقطة معلومة

لإيجاد معادلة المستوي (P) الذي يمس سطح الكرة (S) في النقطة A نستعمل إحدى الطريقتين



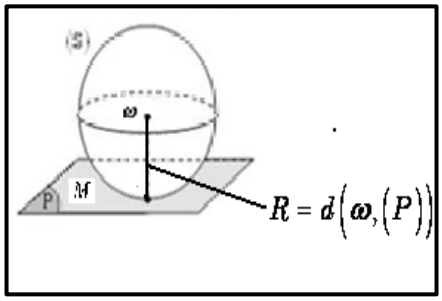
❖ **الطريقة الأولى** : $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{\omega A} \Rightarrow \overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{\omega A} = 0$

❖ **الطريقة الثانية** : نلاحظ ان $\overrightarrow{\omega A}$ شعاع ناظمي للمستوي (لأنه عمودي عليه)

ثم نعوض احداثيات النقطة A في معادلة المستوي ، فنجد الثابت d

4°) كيفية تعيين معادلة سطح كرة التي تمس مستوٍ معلوم

(S) سطح كرة مركزها : $\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$ معطى ، و (P) مستوٍ معادلته : $ax + by + cz + d = 0$



- **طريقة ايجاد معادلة سطح الكرة** (S) :

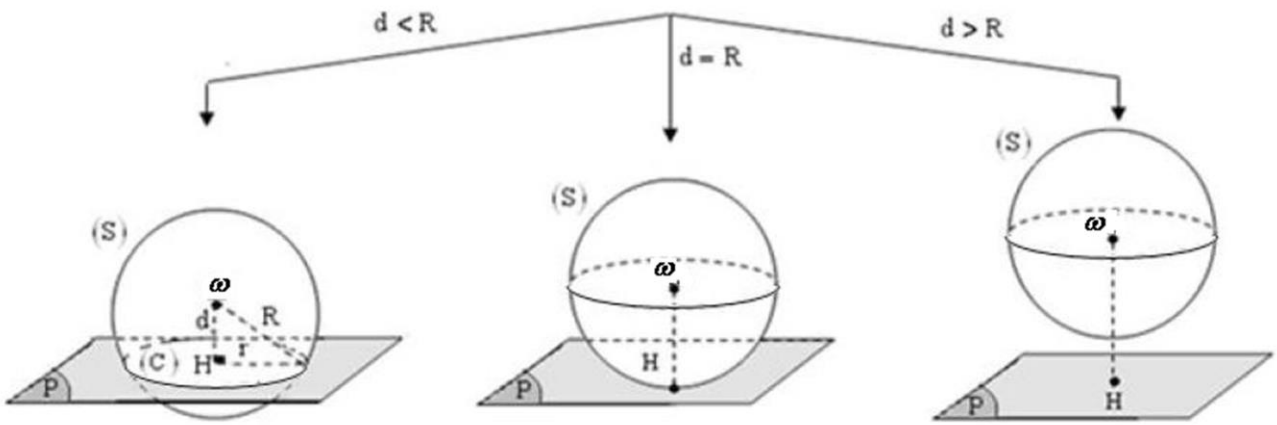
كما يلي

$$\begin{cases} (S):(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2 = R^2 = R^2 \\ R = d(\omega;(\mathrm{P})) = \dfrac{|ax_\omega+by_\omega+cz_\omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \end{cases}$$

5°) الوضعية النسبية لسطح كرة مع مستوٍ في الفضاء (مع ذكر العناصر المميزة)

(S) سطح كرة مركزها : $\omega(x_\omega, y_\omega, z_\omega)$ ، ونصف قطرها R ، و (P) مستوٍ معادلته :

$ax+by+cz+d=0$ **نضع** : $d = d(\omega,(\mathrm{P}))$ **فلدينا**:



اذا كان : $d(\omega,(P)) \succ R$

فان : $(S)\cap(P) = \varnothing$

اذا كان : $d(\omega,(P)) = R$

فان : $(S)\cap(P) = \{H\}$

المستوي (P) **يمس سطح الكرة** (S) **في النقطة** H ،

حيث H **المسقط العمودي للنقطة** ω **على المستوي** (P)

اذا كان : $d(\omega,(P)) \prec R$

فان $(S)\cap(P) = C(H;r)$

المستوي (P) **يقطع سطح الكرة** (S) **وفق دائرة** (C) **مركزها** H **ونصف قطرها** r ،

حيث H **المسقط العمودي للنقطة** ω **على المستوي** (P)

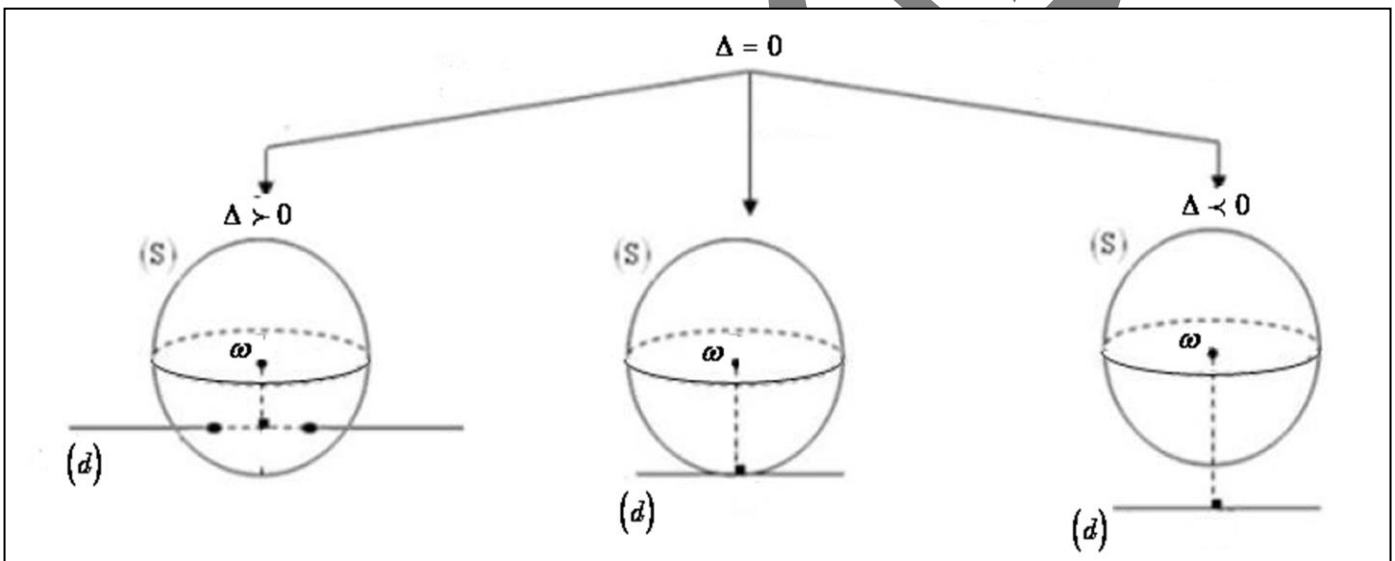
و $r = \sqrt{R^2-d^2}$

6°) الوضعية النسبية لسطح كرة مع مستقيم في الفضاء

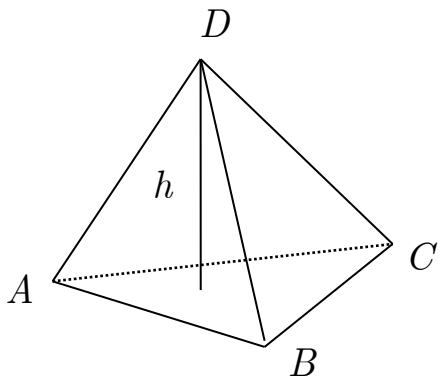
(S) سطح كرة مركزها معادلتها: $(x-x_\omega)^2+(y-y_\omega)^2+(z-z_\omega)^2=R^2$

و (d) مستقيم الذي تمثيله الوسيطي $(d):\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0\ ;\ (t\in\mathbb{R}) \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases}$

لدراسة الوضعية النسبية لسطح كرة (S) مع المستقيم (d) في الفضاء ، نعوض x ، y و z من التمثيل الوسيطي للمستقيم (d) في معادلة (S)، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية مجهولها الوسيط t



$\Delta<0 \Rightarrow (S)\cap(d)=\varnothing$	$\Delta=0 \Rightarrow (S)\cap(d)=\{H\}$ **(S) نقطة تماس بين H حيث نجد إحداثياتها بتعويض (d) و في t قيمة الحل المضاعف التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)**	$\Delta>0 \Rightarrow (S)\cap(d)=\{H\,;H'\}$ **(S) نقطتي تقاطع H' و H حيث نجد إحداثياتهما بتعويض كل (d) مع في التمثيل الوسيطي t_2 و t_1 من قيمة للمستقيم (d)**

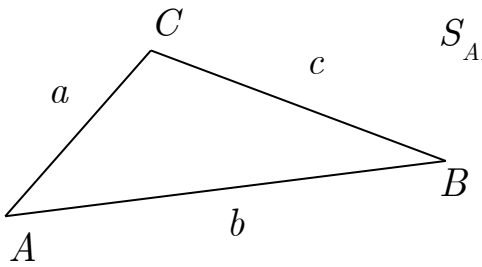


7°) حجم رباعي الوجوه

يحسب الحجم V لرباعي الوجوه بالقانون التالي: $V = \frac{S_{ABC} \times h}{3}$

حيث S_{ABC} مساحة القاعدة (المثلث ABC) و h الارتفاع

8°) مساحة مثلث



أ/ إذا كان المثلث ABC قائم في A (مثلا) فان $S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$

ب/ إذا كان المثلث كيفي (أو نجهل طبيعته) وكان لدينا قيس أحد زواياه فان: $S_{ABC} = \frac{a.b.\sin A}{2} = \frac{b.c.\sin B}{2} = \frac{a.c.\sin C}{2}$

خامسًا "المرّجح في الفضاء"

▪ **ملاحظة**: في حالة مرّجح أكثر من ثلاث نقط تعمم النتائج بأكملها بنفس الكيفية التي عُرِف بها مرّجح ثلاث نقط

1°) إحداثيات النقطة G مرّجح الجملة المثقلة : $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ تعطى بالعلاقة

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}, \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

2°) كيفية تحويل العلاقة الشعاعية من الشكل: $\alpha\overrightarrow{AM} + \beta\overrightarrow{BM} + \gamma\overrightarrow{CM}$

علمًا أن: $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

حاقة محمد

بإدخال نقطة المرّجح G نجد :

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$$

- **التعميم** : $\overrightarrow{\text{المرّجح M}}$ ×(مجموع المعاملات)

- **ملاحظة**: إذا كان $\alpha+\beta+\gamma=0$ فلا يوجد مرّجح للنقط A ، B و C ويكون الشعاع:

$\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}$ شعاعا ثابتًا مستقلا عن النقطة M ويتم تحويل العبارة بإدخال إحدى النقط المعلومة واستعمال علاقة شال **Chasles**

3°) كيفية تحويل العلاقة العددية من الشكل $\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2$

بإدخال نقطة المرّجح G نجد

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

- **التعميم**: اجعل مكان M نقطة المرّجح + ^{2}[المرّجح M] ×(مجموع المعاملات)

4°) لاحقة النقطة H **مركز ثقل المثلث** ABC **تعطى بالعلاقة**:

$$\boxed{H\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)}$$

حاقة محمد

سادسًا "مجموعة النقط M من الفضاء"

شكل المعادلة المحصل عليها من مجموعة النقط M من الفضاء	طبيعة (نوع E) مجموعة النقط M من الفضاء
1°) $MG = K > 0$	E : سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $R = K$
2°) $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MH} = 0$	E : سطح الكرة التي قطرها $[GH]$ مركزها ω منتصف القطعة المستقيمة $[GH]$ ونصف قطرها $R = \frac{GH}{2}$
3°) $\overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$	E : المستوي الذي يشمل النقطة G و $\overrightarrow{AB}$ شعاع ناظمي له (عمودي عليه)
4°) $MG = MH$	E : المستوي المحوري على منتصف القطعة المستقيمة $[GH]$

حاقة محمد