

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Phương pháp 1: Biến đổi tương đương. Cơ sở lý thuyết:

Dạng 1: Phương trình $\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 (B \geq 0) \\ A = B \end{cases}$

Dạng 2: Phương trình $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$ Tổng quát: $\sqrt[k]{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^{2k} \end{cases}$

Dạng 3: Phương trình

$$+) \sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \\ A + B + 2\sqrt{AB} = C \end{cases} \quad (\text{chuyển về dạng 2})$$

$$+) \sqrt[k]{A} + \sqrt[k]{B} = \sqrt[k]{C} \Leftrightarrow A + B + 3\sqrt[k]{A \cdot B} (\sqrt[k]{A} + \sqrt[k]{B}) = C \quad (1)$$

và ta sử dụng phép thế: $\sqrt[k]{A} + \sqrt[k]{B} = C$ ta được phương trình: $A + B + 3\sqrt[k]{A \cdot B \cdot C} = C \quad (2)$

Dạng 4: $\sqrt[k]{A} = B \Leftrightarrow A = B^k$; $\sqrt[2k+1]{A} = B \Leftrightarrow A = B^{2k+1}$

Chú ý: - Phương trình (2) là phương trình hệ quả của ph tr (1).

- Phép bình phương 2 vế của một phương trình mà không có điều kiện cho 2 vế không âm là một phép biến đổi hệ quả. Sau khi tìm được nghiệm ta phải thử lại.

➤ **Nhận xét:**

Nếu phương trình: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$ Mà có:

$f(x) + h(x) = g(x) + k(x)$, thì ta biến đổi phương trình về dạng

$\sqrt{f(x)} - \sqrt{h(x)} = \sqrt{k(x)} - \sqrt{g(x)}$ sau đó bình phương, giải phương trình hệ quả

➤ **Nhận xét:**

Nếu phương trình: $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)} + \sqrt{k(x)}$ Mà có:

$f(x) \cdot h(x) = k(x) \cdot g(x)$ thì ta biến đổi $\sqrt{f(x)} - \sqrt{h(x)} = \sqrt{k(x)} - \sqrt{g(x)}$ sau đó bình phương, giải phương trình hệ quả

Bài tập phần này khá đơn giản tôi chỉ đưa ra 3 ví dụ:

VD1: $\sqrt{x^2 + 3x + 2} + \sqrt{x^2 + 6x + 5} = \sqrt{2x^2 + 9x + 7}$

VD2: $\sqrt{\frac{x^3 + 1}{x + 3}} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x + 3}$

VD3: $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x + 1} = 2\sqrt{x} + \sqrt{2x + 2}$

PHƯƠNG PHÁP 2: Đặt ẩn phụ :

Dạng 1: Các phương trình có dạng :

* $\alpha A.B + \beta \sqrt{A.B} + \gamma = 0$, đặt $t = \sqrt{A.B} \Rightarrow A.B = t^2$

* $\alpha.f(x) + \beta.\sqrt{f(x)} + \gamma = 0$, đặt $t = \sqrt{f(x)} \Rightarrow f(x) = t^2$

* $\alpha.(x-a)(x-b) + \beta(x-a)\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} + \gamma = 0$ đặt $t = (x-a)\sqrt{\frac{x-b}{x-a}} \Rightarrow (x-a)(x-b) = t^2$

Chú ý:

* Nếu không có điều kiện cho t, sau khi tìm được x thì phải thử lại

Các dạng thường gặp:

Dạng 1: Các phương trình có dạng: $\sqrt{A} \pm \sqrt{B} \pm (\sqrt{A} \pm \sqrt{B})^2 + C = 0$ Đặt $t = \sqrt{A} \pm \sqrt{B}$

Ví dụ: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$ DS: $x = 2$

Dạng 2: . Đặt ẩn phụ đưa về phương trình thuần nhất bậc 2 đối với 2 biến :

➤ Chúng ta đã biết cách giải phương trình: $u^2 + \alpha uv + \beta v^2 = 0$ (1) bằng cách

Xét $v \neq 0$ phương trình trở thành : $\left(\frac{u}{v}\right)^2 + \alpha\left(\frac{u}{v}\right) + \beta = 0$

$v = 0$ thử trực tiếp

Các trường hợp sau cũng đưa về được (1)

✓ $a.A(x) + bB(x) = c\sqrt{A(x).B(x)}$

✓ $\alpha u + \beta v = \sqrt{mu^2 + nv^2}$

Chúng ta hãy thay các biểu thức A(x) , B(x) bởi các biểu thức vô tỉ thì sẽ nhận được phương trình vô tỉ theo dạng này .

a) . Phương trình dạng : $a.A(x) + bB(x) = c\sqrt{A(x).B(x)}$

Như vậy phương trình $Q(x) = \alpha\sqrt{P(x)}$ có thể giải bằng phương pháp trên nếu

$$\begin{cases} P(x) = A(x).B(x) \\ Q(x) = aA(x) + bB(x) \end{cases}$$

Xuất phát từ đẳng thức :

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$x^4 + 1 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$$

$$4x^4 + 1 = (2x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 2x + 1)$$

Hãy tạo ra những phương trình vô tỉ dạng trên ví dụ

như: $4x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = \sqrt{x^4 + 1}$

Để có một phương trình đẹp, chúng ta phải chọn hệ số a,b,c sao cho phương trình bậc hai $at^2 + bt - c = 0$ giải “nghiệm đẹp”

ví dụ 1: Giải phương trình : $2(x^2 + 2) = 5\sqrt{x^3 + 1}$

Giải: Đặt $u = \sqrt{x+1}, v = \sqrt{x^2 - x + 1}$

$$\text{Phương trình trở thành : } 2(u^2 + v^2) = 5uv \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2v \\ u = \frac{1}{2}v \end{cases} \quad \text{Tìm được:}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Ví dụ 2:

Giải phương trình : $x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$

Giải:

Nhận xét : Đặt $y = \sqrt{x+2}$ ta hãy biến pt trên về phương trình thuần nhất bậc 3 đối với x và y :

$$x^3 - 3x^2 + 2y^3 - 6x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = -2y \end{cases}$$

Pt có nghiệm : $x = 2, \quad x = 2 - 2\sqrt{3}$

Ví dụ 3: giải phương trình : $\sqrt{5x^2 - 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}$ (**PHẠM QUỐC PHONG ĐỀ XUẤT**)

Giải:

Đk $x \geq 5$. Chuyển về bình phương ta được: $2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x^2 - x - 20)(x+1)}$

Nhận xét : không tồn tại số α, β để : $2x^2 - 5x + 2 = \alpha(x^2 - x - 20) + \beta(x+1)$ vậy ta không thể đặt

$$\begin{cases} u = x^2 - x - 20 \\ v = x + 1 \end{cases}$$

Nhưng may mắn ta có :

$(x^2 - x - 20)(x+1) = (x+4)(x-5)(x+1) = (x+4)(x^2 - 4x - 5)$. Ta viết lại phương

trình: $2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x+4)}$. Đến đây bài toán được giải quyết.

BÌNH LUẬN: Khác với các ví dụ 1,2,3 cách phân tích biểu thức nằm trong dấu căn về dạng $P(x).Q(x)$ là duy nhất. Tuy nhiên dễ dàng tìm được các số 2 và 3 bằng phương pháp đồng nhất hệ số. Phương trình trên hoàn toàn có thể giải bằng phương pháp bình phương liên tiếp.

3. PHƯƠNG PHÁP ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH.

❖ Sử dụng đẳng thức

$$u + v = 1 + uv \Leftrightarrow (u - 1)(v - 1) = 0$$

$$au + bv = ab + vu \Leftrightarrow (u - b)(v - a) = 0$$

$$\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = \frac{(a-c)x + (b-d)}{m}$$

$$A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0$$

$$a^3 - b^3 \Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

Bài tập ví dụ: $\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$ (Thầy PHAN HUY KHẢI ĐỀ XUẤT, DS: x=7)

PHƯƠNG PHÁP 3: NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP (Trực căn thức)

1. Nhân lượng liên hợp để xuất hiện nhân tử chung

a) Phương pháp nhân lượng liên hợp gián tiếp:

Một số phương trình vô tỉ ta có thể nhân được nghiệm x_0 như vậy phương trình luôn đưa về được dạng tích $(x - x_0)A(x) = 0$ ta có thể giải phương trình $A(x) = 0$ hoặc chứng minh $A(x) = 0$ vô nghiệm, **chú ý điều kiện của nghiệm của phương trình để ta có thể đánh giá $A(x) = 0$ vô nghiệm**

Ví dụ:

Bài 1. Giải phương trình sau :

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{3(x^2 - x - 1)} - \sqrt{x^2 - 3x + 4}$$

Giải:

$$\text{Ta nhận thấy : } (3x^2 - 5x + 1) - (3x^2 - 3x - 3) = -2(x - 2) \quad \vee$$

$$(x^2 - 2) - (x^2 - 3x + 4) = 3(x - 2)$$

Ta có thể trực căn thức 2 vế :

$$\frac{-2x + 4}{\sqrt{3x^2 - 5x + 1} + \sqrt{3(x^2 - x - 1)}} = \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 2} + \sqrt{x^2 - 3x + 4}}$$

Dễ dàng nhận thấy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình .

Bài 2. Giải phương trình sau (OLYMPIC 30/4 đề nghị) : $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

Giải: Để phương trình có nghiệm thì : $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

Ta nhận thấy : $x=2$ là nghiệm của phương trình , như vậy phương trình có thể phân tích về dạng

$(x - 2)A(x) = 0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm , tách như sau :

$$\sqrt{x^2 + 12} - 4 = 3x - 6 + \sqrt{x^2 + 5} - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 3(x - 2) + \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Dễ dàng chứng minh được : $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4} - \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - 3 < 0, \forall x > \frac{5}{3}$

đương nhiên bài 2 ta vẫn giải được bằng phương pháp hàm số- tính đồng biến nghịch biến của hàm số.

2. phương pháp nhân lượng liên hợp trực tiếp:

Bài tập ví dụ:

Bài 4. Giải phương trình sau : $\sqrt{2x^2+x+9} + \sqrt{2x^2-x+1} = x+4$

Giải:

Ta thấy : $(2x^2+x+9) - (2x^2-x+1) = 2(x+4)$

$x = -4$ không phải là nghiệm

Xét $x \neq -4$

Trục căn thức ta có :

$$\frac{2x+8}{\sqrt{2x^2+x+9} - \sqrt{2x^2-x+1}} = x+4 \Rightarrow \sqrt{2x^2+x+9} - \sqrt{2x^2-x+1} = 2$$

Vậy ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2+x+9} - \sqrt{2x^2-x+1} = 2 \\ \sqrt{2x^2+x+9} + \sqrt{2x^2-x+1} = x+4 \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{2x^2+x+9} = x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{8}{7} \end{cases}$$

Thử lại thỏa; vậy phương trình có 2 nghiệm : $x=0$ v $x=\frac{8}{7}$

Bài tập tương tự: Bài1: $\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}} = x-2$ (HSG vòng trường- trường

THPT Phước Bình 2011- thầy Quang “béo” ra đề, DS: $x=3$)

Hướng dẫn: ta có 4 cách để giải. C1: Bình phương liên tiếp rồi nhằm nghiệm chia Hoocne thu được $x=3$

C2: Bình phương lần 1 rồi đặt $t=\text{căn}$.

C3: Nhân lượng liên hợp.

C4: Đặt căn trong cùng là $t-2$, $t>2$ ta đưa về hệ đối xứng:

Pt1 $(x-2)^2 = 10-3t$ và Pt2 $(t-2)^2 = 10-3x$ rồi giải bình thường ta cũng thu được kết quả như trên.

Bài 2: $2x^2-11x+21-3\sqrt[3]{4x-4} = 0$ (OLIMPIC 30- 4 -2007, DS $x=3$)

Hướng dẫn: C1: đặt $t=\text{căn}$

C2: nhân lượng liên hợp

C3: cách giải sáng tạo nhất – sử dụng bdt cauchy cho 3 số dương: $2,2,(x-1)$ đưa pt về dạng : $2(x-3)^2 \leq 0$. vậy pt có nghiệm duy nhất $x=3$.

Bài 3: giải phương trình: $x^3-3x^2-8x+40-8\sqrt[4]{4x+4} = 0$

Ta chứng minh : $8\sqrt[4]{4x+4} \leq x+13$ và

$$x^3-3x^2-8x+40 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2(x+3) \geq x+13$$

PHƯƠNG PHÁP 4: ĐƯA VỀ HỆ .

Dạng 1: Đưa về hệ phương trình bình thường. Hoặc hệ đối xứng loại một.

➤ Đặt $u = \alpha(x), v = \beta(x)$ và tìm mối quan hệ giữa $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ từ đó tìm được hệ theo u, v

ví dụ 1 : Giải phương trình: $x\sqrt[3]{25-x^3} \left(x + \sqrt[3]{25-x^3} \right) = 30$

Đặt $y = \sqrt[3]{35-x^3} \Rightarrow x^3 + y^3 = 35$

Khi đó phương trình chuyển về hệ phương trình sau: $\begin{cases} xy(x+y) = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$, giải hệ này ta tìm

được $(x; y) = (2; 3) = (3; 2)$. Tức là nghiệm của phương trình là $x \in \{2; 3\}$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau: $x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$

Điều kiện: $x \geq 1$

Đặt $a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} (a \geq 0, b \geq 0)$ thì ta đưa về hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} a^2 + b = 5 \\ b^2 - a = 5 \end{cases} \rightarrow (a+b)(a-b+1) = 0 \Rightarrow a-b+1 = 0 \Rightarrow a = b-1$$

$$\text{Vậy } \sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 5 - x \Rightarrow x = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}$$

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\frac{6-2x}{\sqrt{5-x}} + \frac{6+2x}{\sqrt{5+x}} = \frac{8}{3}$

Giải

Điều kiện: $-5 < x < 5$

Đặt $u = \sqrt{5-x}, v = \sqrt{5-y} (0 < u, v < \sqrt{10})$.

$$\text{Khi đó ta được hệ phương trình: } \begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ -\frac{4}{u} - \frac{4}{v} + 2(u+v) = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 10 + 2uv \\ (u+v) \left(1 - \frac{2}{uv} \right) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

❖ **DS:** $x = \pm 4$

PHƯƠNG PHÁP 5: PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC HÓA

- Phương trình căn thức có chứa biểu thức có chứa $a^2 - x^2$; đặt $x = acost$ (hoặc $asint$)

- phương trình có chứa $1 + x^2$; đặt $x = tant$.

BÀI TẬP $4x^3 - 3x = \sqrt{1-x^2}$ (HVQHQT- 2001)

PHƯƠNG PHÁP 6: GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG TỌA ĐỘ VECTƠ

Cơ sở lý thuyết : thông thường được sử dụng khi trong căn thức bậc 2 có tổng của 2 bình phương – phương trình giải được bằng phương pháp này thì có thể giải bằng bất

đẳng thức cauchy hoặc bất đẳng thức B-C-S.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Cho các véc tơ: $\vec{u} = (x_1; y_1)$, $\vec{v} = (x_2; y_2)$ khi đó ta có

$$\checkmark \quad |\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ \vec{u} , \vec{v} cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k \geq 0$, chú

ý tỉ số phải dương

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \leq |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|, \text{ dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \vec{u} \uparrow \uparrow \vec{v}$$

$$\text{Bài tập ví dụ: } \left| \sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50} \right| = 5 \quad \text{DS: } x = 5/4$$

5 phương pháp trên là những phương pháp cơ bản nhất để giải phương trình đại số. Phương trình chứa căn thức là dạng toán khiến các bạn học sinh gặp nhiều khó khăn khi giải vì dạng bài tập phong phú, đòi hỏi nhiều kĩ năng biến đổi. Các bạn phải có nhiều kĩ năng tính toán, biến đổi thì mới tạm yên tâm được. Tôi có đôi điều như vậy. Mong các bạn ôn tập thật tốt.

Các bài tập và lời giải chi tiết

