

Kátia Stocco Smole & Maria Ignez Diniz

COMPONENTE
CURRICULAR
MATEMÁTICA

3º ANO
ENSINO MÉDIO

MATEMÁTICA

para compreender
o mundo

ENSINO MÉDIO

3

MANUAL DO PROFESSOR



**Editora
Saraiva**

MATEMÁTICA

para compreender o mundo

3

ENSINO MÉDIO

COMPONENTE
CURRICULAR
MATEMÁTICA

3º ANO
ENSINO MÉDIO

MANUAL DO PROFESSOR

Kátia Stocco Smole

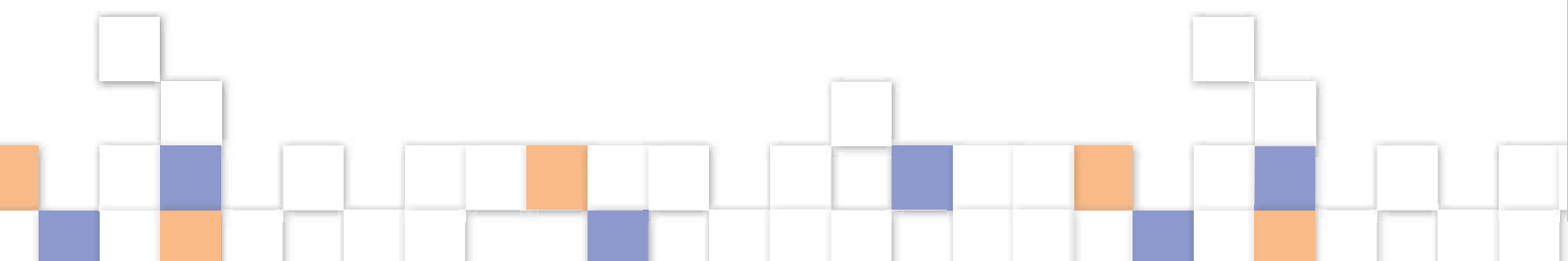
Bacharel em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema
Licenciada em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Moema
Mestre em Educação pela Universidade de São Paulo
Doutora em Educação pela Universidade de São Paulo
Coordenadora do Mathema — grupo de formação e pesquisa na área de Matemática

Maria Ignez Diniz

Bacharel em Matemática pela Universidade de São Paulo
Mestre em Matemática pela Universidade de São Paulo
Doutora em Matemática pela Universidade de São Paulo
Coordenadora do Mathema — grupo de formação e pesquisa na área de Matemática

1ª edição – 2016
São Paulo

 **Editora
Saraiva**



Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Smole, Kátia Stocco
Matemática para compreender o mundo 3 / Kátia
Stocco Smole, Maria Ignez Diniz. -- 1. ed. --
São Paulo : Saraiva, 2016.

Obra em 3 v.
Suplementado pelo manual do professor.
Bibliografia.
ISBN 978-85-472-0589-8 (aluno)
ISBN 978-85-472-0590-4 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) I. Diniz, Maria
Ignez. II. Título.

16-03505

CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Diretora editorial	Lidiane Vivaldini Olo
Gerente editorial	Luiz Tonolli
Editor responsável	Viviane Carpegiani
Editor	Julio Cesar Augustus de Paula Santos
Editor assistente	Rani de Oliveira e Souza
Assistente editorial	Aline dos Reis Neves
Gerente de produção editorial	Ricardo de Gan Braga
Gerente de revisão	Hélia de Jesus Gonsaga
Coordenador de revisão	Camila Christi Gazzani
Revisores	Carlos Eduardo Sigrist, Maura Loria, Raquel Alves Taveira
Produtor editorial	Roseli Said
Supervisor de iconografia	Sílvio Klugin
Coordenador de iconografia	Cristina Akisino
Pesquisa iconográfica	Fernando Cambetas
Licenciamento de textos	Erica Brambila
Coordenador de artes	Aderson Oliveira
Design	Sérgio Cândido
Capa	Simone Zupardo Dias com imagem de Getty Images
Edição de arte	Lisandro Paim Cardoso
Diagramação	Setup
Assistente	Jacqueline Ortolan
Ilustrações	Ari Nicolosi, Conceitograf, CJT, Rico, TPG Design, Zapt
Cartografia	Mario Yoshida
Tratamento de imagens	Emerson de Lima
Protótipos	Magali Prado
078132.001.001	Impressão e acabamento

O material de publicidade e propaganda reproduzido nesta obra está sendo utilizado apenas para fins didáticos, não representando qualquer tipo de recomendação de produtos ou empresas por parte do(s) autor(es) e da editora.



**Editora
Saraiva**

SAC

0800-0117875

De 2ª a 6ª, das 8h às 18h

www.editorasaraiva.com.br/contato

Avenida das Nações Unidas, 7221 – 1ª andar – Setor C – Pinheiros – CEP 05425-902

Apresentação

Desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, você tem estudado muita Matemática, certo? Bem, durante o Ensino Médio você continuará os seus estudos, mas agora buscando completar a sua formação como leitor e produtor de textos que envolvem a linguagem matemática e, também, ampliar suas habilidades para resolver problemas. Mas por que isso é importante? O trabalho e o estudo nos acompanham ao longo de toda a vida e, nesse processo, a aquisição de informações e a possibilidade de continuar aprendendo, em qualquer área do conhecimento, dependem da leitura e da escrita.

Ser leitor em Matemática é importante para a continuidade dos estudos e para a inserção no mundo do trabalho, pois textos que utilizam a linguagem matemática são frequentes no dia a dia. A linguagem matemática está presente nos textos didáticos e de divulgação científica, em manuais e relatórios técnicos e até mesmo na mídia. Por exemplo, provavelmente você já teve contato com notícias como “o tremor em determinada região foi de 4 graus na escala Richter” ou, então, propagandas do tipo “Parcele sua compra em até 5 vezes sem juros!”, não é mesmo? Informações dessa natureza necessitam de certo conhecimento da Matemática para serem compreendidas.

Do mesmo modo que é importante saber ler em Matemática, saber produzir textos com a presença da linguagem matemática também é muito importante, afinal, já imaginou como seria a transmissão de informações que envolvem quantidades sem o uso dos algarismos indo-arábicos ou, então, como seria a divulgação de determinadas pesquisas sem o uso de tabelas e gráficos estatísticos?

As habilidades de leitura e escrita são exigidas ao longo de toda a vida e não se desenvolvem apenas na escola ou no estudo da Matemática; no entanto, no Ensino Médio você vai avançar nesses aspectos, por meio de textos mais elaborados, e no reconhecimento da Matemática como ciência, com sua forma de organizar os conceitos, desenvolver estratégias e propor e resolver situações-problema.

Por falar em situações-problema, você continuará enfrentando diversas delas! Toda situação que requer uma solução – seja ela de natureza escolar, do trabalho ou das relações pessoais – exige envolvimento da pessoa que deseja ou precisa resolvê-la. Para isso, é necessário entender a situação, compreendendo o que se quer responder ou buscar e, assim, identificar os dados e as informações que possam ajudar a resolvê-la. Nessa trajetória, muitas vezes será necessário fazer escolhas e tomar decisões para, então, traçar estratégias de resolução e colocá-las em prática. Além disso, você terá de avaliar se o caminho escolhido leva ou não à solução do problema, se há solução possível e, caso exista, se a obtida é adequada ao problema. Esperamos que os livros desta coleção possam proporcionar a você aprendizagens valiosas e transformadoras. Para isso, será preciso o estudo constante, assim como sua participação ativa durante as aulas, questionando e contribuindo para o debate com os colegas e professores.

Conheça este livro



Este livro está organizado em 4 unidades e cada uma delas, em capítulos. Durante o desenvolvimento dos conteúdos, você encontrará textos, boxes e seções que vão ajudá-lo a compreender a importância da Matemática para sua formação como cidadão e para a continuidade de seus estudos. Conheça, a seguir, alguns momentos importantes deste livro.

Na **abertura** de cada capítulo, você encontra o box **Situe-se**, que vai informá-lo sobre o que será estudado no capítulo.

Fique de olho nestes boxes, que trazem sugestões de estudo e para refletir antes de resolver as atividades propostas.

Fazer e aprender
No **Fazer e aprender** você encontra diversas atividades propostas para continuar estudando e aprendendo Matemática.

3 Probabilidade e Estatística



Situe-se
O capítulo sobre probabilidade e estatística é dividido em duas partes: a primeira trata da probabilidade e a segunda da estatística. Vamos conhecer um pouco mais sobre cada uma delas.

Foco na leitura

Uma seção que pode ser usada como ferramenta para aprofundar o conhecimento sobre o conteúdo estudado. Ela contém perguntas e respostas, exercícios e atividades que ajudam a entender melhor o texto.

Resumo

Evento	Probabilidade
A	0,2
B	0,3
C	0,1
D	0,4

Exercícios

1. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Calcule $P(A \cup B)$.

2. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,4$. Calcule $P(A \cap B)$.

Atividade

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Fazer e aprender

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

2. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

3. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Exercícios

1. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Calcule $P(A \cup B)$.

2. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,4$. Calcule $P(A \cap B)$.

Atividade

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Fazer e aprender

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

2. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

3. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Exercícios

1. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Calcule $P(A \cup B)$.

2. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,4$. Calcule $P(A \cap B)$.

Atividade

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Foco na leitura

A seção **Foco na leitura** foi pensada para você aprender a ler melhor os textos de Matemática. Isso ajuda a estudar e resolver problemas!

Fique conectado

Você sabia que há uma série de livros, vídeos e sites que tratam de Matemática de um jeito diferente? Indicamos vários de histórias, crônicas e muito mais na seção **Fique conectado**.

Invente você

Sabia que você pode criar seus próprios problemas e exercícios? É só colocar em prática as propostas da seção **Invente você**.

De olho na resolução

Não pule as seções **De olho na resolução**, pois elas trazem oportunidades para você compreender como resolver problemas e como escrever nas aulas de Matemática.

De olho na resolução

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

2. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

3. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Exercícios

1. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Calcule $P(A \cup B)$.

2. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,4$. Calcule $P(A \cap B)$.

Atividade

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Recordando Estatística

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

2. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

3. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Exercícios

1. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Calcule $P(A \cup B)$.

2. Sejam os eventos A e B tais que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cup B) = 0,4$. Calcule $P(A \cap B)$.

Atividade

1. Considere o espaço amostral $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Defina os eventos $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$. Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$.

Para complementar e aprofundar seus conhecimentos sobre Matemática, organizamos esta seção, que aparece no decorrer dos capítulos.

Gosta de desafios? Quer pensar além do conteúdo do capítulo? Então não deixe de resolver as atividades do **Foco no raciocínio lógico**.

Saber organizar as informações, bem como fazer resumos e esquemas, é uma ferramenta importante para quem estuda. Aprenda mais sobre isso realizando as propostas da seção **Palavras-chave**.

Matemática não é só cálculo, mas um pouco de **Cálculo rápido** sempre ajuda a resolver problemas mais complexos.

No **Por dentro do Enem e dos vestibulares**, ao final de cada unidade, você vai ler e resolver questões mais elaboradas, como aquelas típicas de processos seletivos, entre eles o Enem.

[illegible]

Para aprofundar o que você já estudou, tirar suas dúvidas ou continuar pensando em algum conceito que ainda não está muito claro, há o **Aprender a aprender**.

Há Matemática na Arquitetura, na Literatura, na Medicina e muito mais. Para conhecer melhor essas relações, não deixe de ler a seção **Mundo plural**, em que a Matemática aparece ligada a temas como Ciência, Tecnologia e Cidadania, e a seção **Entre saberes**, que traz relações entre Matemática e outras disciplinas que você está estudando, como Física, Química, Biologia e Arte.

[illegible]

Não deixe escapar o que preparamos para você nas seções **Foco na tecnologia (Computador e Calculadora)**. Nessas seções, você vai conhecer e utilizar uma calculadora científica, além de recursos para construir gráficos, fazer planilhas e simulações *on-line*!

[illegible]

Na seção **Projeto**, a ideia é que também em Matemática você aprenda a pesquisar, planejar, tomar decisões em grupo e individualmente, de modo a alcançar uma meta previamente estabelecida.

Neste livro, o projeto está na unidade 2.

Sumário

Unidade 1 – Matemática em contextos 8

Capítulo 1 – Noções de Matemática financeira 10

1. A linguagem da Matemática financeira 11
 2. Porcentagem 12
 3. Identificando dois tipos de juros 16
 4. Cálculo de juros simples 16
 5. Cálculo de juros compostos 17
- Mundo plural – Meu primeiro salário: e agora?** 26

Capítulo 2 – Estatística 28

1. Recordando Estatística 29
 2. Dados organizados em classes 34
 3. Representação gráfica de uma distribuição de frequências em classes 35
 4. Medidas de tendência central: moda, média e mediana 37
 5. Medidas de dispersão: variância e desvio padrão 44
- Mundo plural – Qual é a confiabilidade das previsões de tempo e dos dados de alterações climáticas?** 51

Capítulo 3 – Probabilidade e Estatística 53

1. Recordando Probabilidade 54
 2. O uso da probabilidade na Estatística 56
 3. Função ou distribuição de probabilidade 57
 4. Probabilidade frequencista e lei dos grandes números 60
 5. Probabilidade e Estatística 64
- Por dentro do Enem e dos vestibulares** 74

Unidade 2 – Geometria analítica 76

Capítulo 4 – Estudo analítico do ponto 78

1. O referencial cartesiano 79
 2. Ponto médio 80
 3. Baricentro de um triângulo 80
 4. Distância entre dois pontos 83
 5. Área de um triângulo 85
 6. Condição de alinhamento de três pontos 87
- Mundo plural – De olho no nosso planeta** 91

Capítulo 5 – Estudo analítico da reta 93

1. Equação geral de uma reta: Álgebra e Geometria 93
 2. Posições relativas entre duas retas 97
 3. Equação reduzida 100
 4. Posição relativa entre duas retas a partir de suas equações reduzidas 105
 5. Perpendicularismo de retas 107
 6. Feixe de retas concorrentes 109
 7. Inequação do 1º grau com duas variáveis 111
- Entre saberes – Lei de Hubble: pequena equação, grande teoria** 121

conteúdo opcional

conteúdo opcional

Capítulo 6 – Estudo analítico da circunferência 123

1. Equação da circunferência 124
 2. Posições relativas entre um ponto e uma circunferência 127
 3. Posições relativas entre reta e circunferência 129
 4. Posições relativas entre duas circunferências 132
- Entre saberes – Sem começo nem fim: o simbolismo da circunferência na Arte** 137
- Projeto – Matemática e Arte** 139

Capítulo 7 – Estudo analítico das cônicas 141

1. Elipse 141
 2. Hipérbole 146
 3. Parábola 150
- Por dentro do Enem e dos vestibulares** 158

conteúdo opcional

conteúdo opcional

Unidade 3 – Polinômios, números complexos e equações polinomiais 160

Capítulo 8 – Estudo de polinômios 162

1. Polinômios 163
2. Função polinomial 166
3. Operações com polinômios 168
4. Decomposição em fatores e resolução de equações polinomiais 176

Mundo plural – Polinômio: chave de segredos 180

Capítulo 9 – Números complexos 182

1. Números não reais: números imaginários 182
2. Número complexo 183
3. Propriedades 187
4. Módulo de um número complexo 191
5. Forma trigonométrica de um número complexo 193

Capítulo 10 – Equações polinomiais 206

1. Equação polinomial 207
2. Teorema fundamental da Álgebra e teorema da decomposição 208
3. Multiplicidade de uma raiz 209
4. Relações de Girard 211
5. Raízes imaginárias 213
6. Pesquisa de raízes racionais 215

Mundo plural – Controle de populações e curvas polinomiais 221

Por dentro do Enem e dos vestibulares 225

Unidade 4 – Funções trigonométricas e taxa de variação de funções 226

Capítulo 11 – Funções trigonométricas 228

1. A história das funções trigonométricas 228
2. O ciclo trigonométrico 230
3. Redução ao 1º quadrante 238
4. Arcos complementares e arcos suplementares 242

Mundo plural – A declividade das vias públicas 247

Capítulo 12 – Taxa de variação de funções 249

1. Taxa de variação média 249
2. Variação instantânea de uma função: noção de derivada 252
3. Interpretação cinemática da derivada 258
4. Função derivada 260
5. Sinal da derivada 263
6. Pontos de máximo e de mínimo de uma função 264

Mundo plural – Alimento: nossa fonte de energia 270

Por dentro do Enem e dos vestibulares 272

Tabela trigonométrica 273

Indicações de leitura para os estudantes 274

Referências bibliográficas 274

Significado das siglas 275

Respostas 276

Manual do Professor – Orientações Didáticas 289

conteúdo opcional

Matemática em contextos

Para que serve a Matemática?

Sem dúvida você deve ter feito essa pergunta muitas vezes, assim como muitos outros estudantes. As respostas que recebeu podem ter sido convincentes ou não, mas ao final da Educação Básica espera-se que você tenha justificativas mais contundentes para essa questão. Se não, leia os textos a seguir, que evidenciam a importância da Matemática no seu cotidiano, seja como estudante que tem como projeto a continuidade dos estudos, seja como adulto e consumidor que terá de cuidar de muitas obrigações, inclusive de sua saúde.

Como funciona a Teoria de Resposta ao Item (TRI) usada para estimar as notas do Enem

[...] Em 2009 o Enem mudou e passou a ser usado também como mecanismo de seleção para o ingresso no ensino superior. O número de questões saltou para 180 (45 de cada área do conhecimento, além da redação) e foi instituída a metodologia TRI como base para o cálculo da nota. [...]

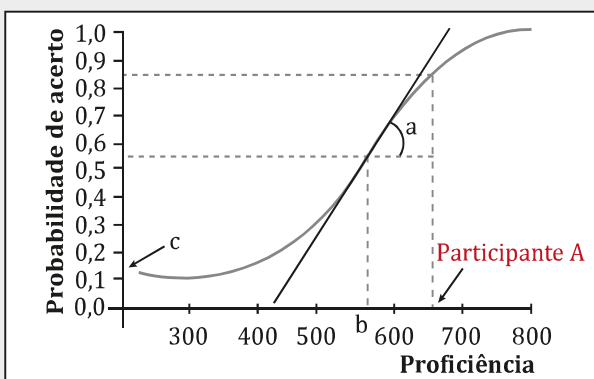
Gilson Teixeira/OMIP/DA Press



Pessoas realizando o Enem em São Luís (MA). Fotografia de 2011.

O TRI só funciona se o nível de cada questão for conhecido previamente e se a prova contiver questões de todos os níveis. Cada questão é previamente testada e para cada uma delas é obtido um gráfico chamado de curva característica do item, que correlaciona a chance de acerto daquela questão com o conhecimento do aluno (chamado de “proficiência do

aluno” pelo MEC [Ministério da Educação]). O MEC escolheu a proficiência que dá chance de acerto de 65% como sendo o nível de cada questão (que chama de proficiência da questão). Então, cada questão tem sua proficiência previamente conhecida, o que é imprescindível para a aplicação do TRI.



Exemplo de curva característica do item. Gráfico: INEP.

Montando-se uma prova com questões de todos os níveis (proficiências), é possível estimar matematicamente qual seria a nota mais justa para cada perfil de acertos. Na imagem acima, um candidato com proficiência 650 teria quase 90% de chance de acertar aquela questão.

Disponível em: <www.manualdousuario.net/notas-enem-tri/>. Acesso em: 22 mar. 2016.

Índice de endividados sobe na Capital, mas indicador de inadimplência é estável



Bruno Fernandes/Fotoarena

A Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC) divulgou a Pesquisa de Endividamento e Inadimplência (PEIC) das Famílias para as Capitais. Em Campo Grande, o indicador subiu, de 53,7% passou a 54,3% o índice de famílias que declaram ter dívidas como cheques pré-datados, cartões de crédito, carnês de lojas, empréstimo pessoal, prestações de carro e seguros.

Disponível em: <www.fecomercio-ms.com.br/indice-de-endividados-sobe-na-capital-mas-indicador-de-inadimplencia-e-estavel/>. Acesso em: 28 abr. 2016.

Como prevenir o diabetes

Modificar hábitos de vida ajuda. Quem consegue? Mas há outras medidas possíveis

Todos os anos, mais de 85 milhões de norte-americanos, e mais de 30 milhões de brasileiros com idade superior a 20 anos, apresentariam exames de sangue anormais para a dosagem de açúcar no sangue, ou para o teste de tolerância à glicose. [...]

Das pessoas com testes anormais, 20% a 30% serão portadores da doença dentro de cinco anos. No entanto, vários estudos demonstraram que se essas pessoas intolerantes à glicose conseguissem modificar substancialmente alguns hábitos de vida, como obesidade ou elevada porcentagem de gordura concentrada no abdome, tabagismo e sedentarismo, as chances de desenvolver diabetes se reduziram drasticamente.



Knut Schulz/Corbis/Fotoarena

Teste de glicemia.

Disponível em: <www.cartacapital.com.br/revista/880/como-prevenir-o-diabetes>. Acesso em: 22 mar. 2016.

Com os conhecimentos que serão estudados nesta unidade, você terá ferramentas para compreender e interpretar informações da área financeira e de situações da vida cotidiana, todas elas relacionadas de alguma forma a conceitos matemáticos.

Nesta unidade, você vai...

- compreender e interpretar algumas informações da área financeira, por exemplo as que envolvem cálculos relativos a empréstimos, crediários e parcelamento de dívidas.
- conhecer algumas relações entre Estatística e Probabilidade, que complementam e aperfeiçoam a interpretação de conjuntos de dados e permitem fazer previsões e estimativas de resultados.

Neste terceiro ano do Ensino Médio, propomos também a você uma retomada das ideias centrais do que tem estudado nos últimos anos, para que você possa fortalecer e aperfeiçoar suas habilidades em Matemática. Nas seções **Aprender a aprender**, vamos retomar os temas: função afim; função quadrática ou do 2º grau, sistemas lineares e determinantes.

1

Noções de Matemática financeira

Este capítulo tem como objetivo explorar aplicações da Matemática relacionadas ao comércio e à indústria. Temas como carga tributária, mercado financeiro e afins podem ser trabalhados com os estudantes durante o desenvolvimento do capítulo.

Em conjunto com as disciplinas de História e Geografia, por exemplo, poderá ser conduzida uma análise da crise dos mercados financeiros, em meados dos anos 2000, com destaque para a “bolha imobiliária” dos EUA, em uma abordagem que envolva a Matemática financeira.

Analise a situação a seguir.

Neide tomou um empréstimo de R\$ 2 000,00 em uma financeira e se comprometeu a pagar após 6 meses. A taxa de juros combinada foi de 8% ao mês. No final do prazo, porém, ocorreu um problema: o valor calculado por Neide não coincidia com aquele cobrado pela financeira.

Vejamos como cada um, Neide e o gerente da financeira, calculou o valor a ser pago.



FOTORESEARCH/ACB PHOTO

Cálculo do gerente

$$1^{\text{o}} \text{ MÊS: } 2000 + 0,08 \cdot 2000 = 2000 + 160 = 2160$$

$$2^{\text{o}} \text{ MÊS: } 2160 + 0,08 \cdot 2160 = 2332,80$$

$$3^{\text{o}} \text{ MÊS: } 2332,80 + 0,08 \cdot 2332,80 \approx 2519,42$$

$$4^{\text{o}} \text{ MÊS: } 2519,42 + 0,08 \cdot 2519,42 \approx 2720,97$$

$$5^{\text{o}} \text{ MÊS: } 2720,97 + 0,08 \cdot 2720,97 \approx 2938,65$$

$$6^{\text{o}} \text{ MÊS: } 2938,65 + 0,08 \cdot 2938,65 \approx 3173,74$$

Total a pagar: R\$ 3 173,74

Cálculo de Neide

☐ Em um mês: 8%

☐ Em seis meses: $6 \cdot 8\% = 48\%$

☐ 2000 mais 48% de 2000 é o mesmo que:

☐ $2000 + 0,48 \cdot 2000 = 2000 + 960 = 2960$

☐ **Total a pagar: R\$ 2 960,00**

☐

Imagens: BIS

Quem estava com a razão? Por que essa confusão aconteceu?

Há procedimentos matemáticos que permitem analisar essa situação e que se relacionam com um ramo da Matemática bastante utilizado no comércio, na indústria e nas finanças: a **Matemática financeira**.

Situe-se

Iniciamos este volume analisando aplicações da Matemática em situações do mundo do trabalho e do consumo que exigem análise e tomada de decisão: compra e venda, empréstimos, perdas e lucros; ou seja, uma reflexão sobre problemas frequentes no dia a dia de muita gente.

1 A linguagem da Matemática financeira

Voltemos ao problema de Neide para conhecer alguns termos utilizados em Matemática financeira.

O valor pedido por Neide à financeira, que foi R\$ 2 000,00, é chamado de **capital**.

Capital: em uma transação financeira, é o dinheiro emprestado, investido ou devido inicialmente; também é conhecido como **principal**. Representamos o capital por **C**.

Sabemos que Neide concordou em pagar à financeira juros à taxa de 8% ao mês.

Juro: é o “aluguel” que se paga (ou se recebe) pelo dinheiro emprestado (ou aplicado). Representamos o juro por **j**.

Taxa de juro: é a taxa, em porcentagem, que se paga ou se recebe pelo “aluguel” do dinheiro. Representamos a taxa por **i**.

A taxa de juro é sempre aplicada em relação a um intervalo de tempo, que pode ser em dias, meses ou anos.

Em nosso exemplo, Neide tomou o empréstimo por 6 meses, prazo após o qual deveria devolver à financeira o valor emprestado mais o juro.

Prazo: é o tempo que decorre desde o início até o final de uma operação financeira. Representamos esse intervalo de tempo por **t**.

O prazo e a taxa devem ter sempre a mesma unidade de medida de tempo. Assim, se a taxa for diária, o tempo será em dias; se a taxa for mensal, o tempo será em meses; e assim por diante.

O valor a ser pago por Neide no vencimento do prazo de empréstimo é o **montante**.

Montante: é a soma do capital emprestado (ou investido) com o juro. Indicamos o montante por **M**.

Vejamos outro exemplo.

Marcelo investiu R\$ 10 000,00 na Bolsa de valores, obtendo um rendimento de 7% ao mês. Ao fim de 6 meses, Marcelo retirou o valor acumulado em R\$ 15 007,30.

- O capital inicial nesse caso é o valor investido: $C = 10\,000,00$
- A taxa de juros é de 7% ao mês: $i = 7\% = \frac{7}{100} = 0,07$ (ao mês)
- O prazo é o tempo em que o capital inicial ficou investido: $t = 6$ (em meses)
- O montante é o total acumulado, ou seja, o capital adicionado ao juro; no caso, R\$ 15 007,30. Ou seja: $M = 15\,007,30$
- O juro é o valor recebido pelo dinheiro aplicado: $j = 5\,007,30$

Deixe que os estudantes leiam toda esta parte inicial do capítulo e a primeira sequência de atividades resolvidas. Depois, conversem a respeito do que já sabiam e do que relembra-ram, do que foi novidade e da importância do assunto no dia a dia das pessoas. Ler será uma das habilidades mais exigidas desses jovens daqui para a frente; por isso, eles precisam aprender a fazê-lo e aprimorar a leitura, inclusive nas aulas de Matemática.

FIQUE CONECTADO

A vida secreta dos números, de George G. Szpiro (Difell), é um livro que, de maneira divertida e interessante, nos mostra como a Matemática se relaciona com muitos aspectos do nosso dia a dia. Sugerimos que você leia algumas das crônicas que nele aparecem. Você pode começar pela crônica 24, na qual o autor analisa os efeitos dos erros e arredondamentos em situações diversas e comenta, de modo breve, a Teoria do Caos.

2 Porcentagem

Na seção **Cálculo rápido**, preparamos algumas propostas envolvendo porcentagem.

Problemas de Matemática financeira envolvem sistematicamente a noção de porcentagem.

A porcentagem, como você deve se lembrar, é uma forma utilizada para representar uma fração com denominador 100, ou qualquer representação equivalente a ela. Veja alguns exemplos.

- 5% é o mesmo que $\frac{5}{100}$ ou 0,05
- 40% é o mesmo que $\frac{40}{100}$ ou $\frac{4}{10}$ ou $\frac{2}{5}$ ou 0,4
- 10% é o mesmo que $\frac{10}{100}$ ou 0,1
- 50% é o mesmo que $\frac{50}{100}$ ou $\frac{5}{10}$ ou $\frac{1}{2}$ ou 0,5

A expressão **por cento** vem do latim *per centum*, que significa “por um cento” ou “um em cem”. O símbolo da porcentagem (%) foi empregado pela primeira vez em 1685, em um guia francês para comerciantes.

Situações de compra, venda, prestações, aumentos e descontos são exemplos de como as porcentagens aparecem em nosso dia a dia.

Mais adiante, neste capítulo, na seção **Cálculo rápido**, você poderá trabalhar com várias maneiras de calcular porcentagens.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

Conheça os objetivos desta seção e as sugestões de como usá-la com os estudantes nas **Orientações Didáticas**.

R1. Calcule as porcentagens indicadas a seguir.

- a) 45% de 60 b) 80% de 28 c) 3,5% de 650

Resolução

Podemos calcular as porcentagens pedidas de quatro modos diferentes.

1º modo: Usando multiplicação de frações


$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{45}{100} \cdot 60 &= \frac{2700}{100} = 27 & \text{c)} \quad \frac{3,5}{100} \cdot 650 &= \frac{2275}{100} = 22,75 \\ \text{b)} \quad \frac{80}{100} \cdot 28 &= \frac{2240}{100} = 22,4 \end{aligned}$$


2º modo: Transformando a porcentagem em decimal


$$\text{a)} \quad 0,45 \cdot 60 = 27 \quad \text{b)} \quad 0,80 \cdot 28 = 22,4 \quad \text{c)} \quad 0,035 \cdot 650 = 22,75$$

3º modo: Usando uma calculadora

Neste caso, três maneiras diferentes são possíveis. Veja como fizemos para o item a.

•  = 27

•  = 22,4

•  = 22,75

4º modo: Aplicando a regra de três

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \begin{array}{l} 100\% \text{ — } 60 \\ 45\% \text{ — } x \end{array} &\Rightarrow x = \frac{45 \cdot 60}{100} = 27 \\ \text{b)} \quad \begin{array}{l} 100\% \text{ — } 28 \\ 80\% \text{ — } x \end{array} &\Rightarrow x = \frac{28 \cdot 80}{100} = 22,4 \\ \text{c)} \quad \begin{array}{l} 100\% \text{ — } 650 \\ 3,5\% \text{ — } x \end{array} &\Rightarrow x = \frac{3,5 \cdot 650}{100} = 22,75 \end{aligned}$$

R2. A quantia de R\$ 62,00 corresponde a quanto por cento de R\$ 230,00?

Resolução

Chamemos de $x\%$ a porcentagem que desejamos conhecer.

$$\begin{array}{l} \text{Pela regra de três:} \quad 62,00 \text{ — } x\% \\ \quad \quad \quad \quad \quad 230,00 \text{ — } 100\% \end{array}$$

$$\text{Daí: } 230 \cdot x = 62 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{62 \cdot 100}{230} = 26,96 \approx 27\%$$

Logo, R\$ 62,00 correspondem a, aproximadamente, 27% de R\$ 230,00.

$$\text{Poderíamos, ainda, calcular assim: } \frac{62}{230} \approx 0,2696$$

$$0,2696 = \frac{26,96}{100} = 26,96\% \text{ (aproximadamente } 27\%)$$

R3. Paula comprou uma TV à vista e obteve um desconto de 6%. Se a TV custava R\$ 980,00, quanto Paula economizou pagando à vista? Quanto Paula pagou pela TV?

Resolução

Para calcular quanto Paula economizou, devemos encontrar o valor do desconto, que foi de 6% sobre o valor da TV, cujo preço era de R\$ 980,00. Veja: $0,06 \cdot 980 = 58,80$

O preço final da TV é obtido quando fazemos $980,00 - 58,80 = 921,20$.

Assim, Paula economizou R\$ 58,80 e pagou R\$ 921,20 pela TV.

R4. Tiago comprou um pequeno terreno por R\$ 12 000,00 e deseja revendê-lo. Se conseguir vender o terreno por R\$ 14 640,00, que porcentagem de lucro ele obterá?

Resolução

O lucro pode ser calculado subtraindo-se o valor da compra do valor da venda: $14\,640 - 12\,000 = 2\,640$

Para calcular a porcentagem de lucro, comparamos o valor do lucro em relação ao valor de compra.

$$\begin{array}{l} 2\,640 \text{ — } x\% \\ 12\,000 \text{ — } 100\% \end{array} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 2\,640}{12\,000} = 22\%$$

Podemos interpretar essa comparação da seguinte maneira: para cada R\$ 100,00 pagos pelo terreno, Tiago ganhará R\$ 22,00 com a venda.

Assim, a porcentagem do lucro que ele obterá, se vender o terreno pelo preço que deseja, será de 22%.

Faça no caderno uma lista dos termos matemáticos que aparecem neste capítulo. Inclua uma breve explicação e exemplos para cada um.

- R5.** Em julho comprei uma moto nova. Sabendo que a cada ano o valor da moto desvaloriza 12% em relação ao preço original, qual expressão me permite calcular o valor da moto daqui a 2 anos, se nada além da depreciação natural acontecer?

Resolução

Seja x o valor da moto nova. Após 1 ano, a moto valerá x menos 12% de x , ou seja: $x - 0,12x = (1 - 0,12)x = 0,88x$

Após 2 anos, a moto valerá: $0,88x - 0,12 \cdot 0,88x =$

$$= (1 - 0,12) \cdot 0,88x = 0,88 \cdot 0,88x = (0,88)^2 x = 0,774x$$

A última expressão ($0,774x$) permite calcular o valor da moto após 2 anos, nas condições do problema.

Por exemplo, se o valor inicial da moto foi R\$ 4 000,00, então, após 2 anos, ela valerá $0,774 \cdot \text{R\$ } 4\,000,00 = \text{R\$ } 3\,096,00$.

Se o preço de compra da moto foi R\$ 3 200,00, após 2 anos, ela valerá $0,774 \cdot 3\,200 = \text{R\$ } 2\,476,80$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Use a lista de termos que você fez no caderno e o que aprendeu nas atividades resolvidas da seção **De olho na resolução** para resolver os próximos problemas.

Discuta as maneiras de calcular dos estudantes em algumas das atividades. Essa é uma das propostas para esta seção. Saiba mais nas **Orientações Didáticas**.

1. Calcule:
a) 12% de 250 d) 1,5% de 2320
b) 6% de 125 e) 25% de 172,20
c) 2% de 20 f) 15% de 5
2. (UFSM-RS) A prefeitura, responsável pela iluminação pública de uma cidade, trocou 40% das luminárias por outras mais eficientes. Decorrido um ano da troca, verificou que 2% das novas luminárias e 6% das luminárias antigas apresentaram defeito. Qual é a porcentagem das luminárias da cidade que apresentaram defeito nesse período?
a) 3,2% c) 5,6% e) 8,0%
b) 4,4% d) 6,8%
3. Uma cidade possui dois jornais: *O Correio da Cidade* e a *Folha Matutina*. Em uma pesquisa, os resultados mostraram que 15% da população prefere *O Correio*, 30% prefere a *Folha Matutina* e 5% toma conhecimento das notícias por meio da rádio local. Sabendo que o número de leitores de jornais é de 21 000, qual é o número de habitantes da cidade?
4. Uma pessoa recebe por mês 3 salários mínimos e tem 5% de desconto em seu pagamento com a previdência social. Qual é o valor do salário após o desconto?
5. Qual é a diferença entre:
a) salário bruto e salário líquido?
b) faturamento bruto e faturamento líquido?
c) lucro bruto e lucro líquido?
6. O governo de certo país anunciou aumento no preço dos combustíveis. O aumento ocorrerá no fim de maio e no fim de julho, 3,5% de cada vez. Se o preço do litro da gasolina nesse país, em abril, era de 1,52 na moeda local, quanto o litro de gasolina passará a custar em agosto?
7. (Unicamp-SP) Um determinado carro bicomcombustível (que funciona tanto com álcool como com gasolina) é capaz de percorrer 9,2 km com cada litro de álcool e 12,4 km com cada litro de gasolina pura. Suponha que a distância percorrida com cada litro de combustível seja uma função linear (ou afim) da quantidade de álcool que este contém. Usando um combustível misto, composto de 75% de gasolina pura e 25% de álcool, esse carro consegue percorrer com cada litro de combustível:
a) 12,16 km b) 11,60 km c) 11,47 km d) 10,00 km
8. (IFSP) Na prova de um concurso, determinado candidato acertou 8 das 10 primeiras questões e três quartos das questões restantes, ou seja, 30 questões. O percentual de acerto desse candidato na prova foi de:
a) 68,5% c) 76,0% e) 95,0%
b) 72,0% d) 77,5%
9. (IFCE) No dia 31 de outubro de 2011, 106 605 942 eleitores votaram na eleição presidencial. Desses, 55 752 529 votaram na candidata Dilma Rousseff, 43 711 388 votaram no candidato José Serra, 2 452 597 votaram em branco e 4 689 428 anularam seu voto (dados do TSE). Os votos válidos são aqueles que não são brancos nem nulos. Os percentuais de votos válidos de Dilma Rousseff e José Serra foram, respectivamente,
a) 56,05% e 43,95%. d) 58,98% e 47,71%.
b) 52,29% e 47,71%. e) 52,29% e 43,95%.
c) 58,98% e 41,02%.
10. (IFCE) Se, na fração $\frac{x}{y}$, diminuirmos o numerador x de 40% e o denominador y de 60%, a fração $\frac{x}{y}$ ficará:
a) diminuída de 20%. d) aumentada de 50%.
b) aumentada de 20%. e) aumentada de 30%.
c) diminuída de 50%.
11. (UEL-PR) Em uma turma de alunos, constatou-se que 30% dos homens e 10% das mulheres estudaram em colégios particulares. Constatou-se também que 18% dos alunos dessa turma estudaram em colégios particulares. Qual a porcentagem de homens dessa turma?
a) 12% b) 20% c) 35% d) 40% e) 64%

Todas as atividades da série a seguir envolvem a análise de situações da realidade próxima aos estudantes. Pedir que expliquem como as resolveram auxilia no desenvolvimento da consciência sobre isso e da argumentação a partir dos estudos realizados.

12. (Enem-MEC) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento **A**: 3% ao mês

Investimento **B**: 36% ao ano

Investimento **C**: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	3	6	9	12
(1,03)ⁿ	1,093	1,194	1,305	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

- escolher qualquer um dos investimentos **A**, **B** ou **C**, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
- escolher os investimentos **A** ou **C**, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
- escolher o investimento **A**, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos **B** e **C**.
- escolher o investimento **B**, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento **A** e de 18% do investimento **C**.

- escolher o investimento **C**, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos **A** e **B**.

13. (Enem-MEC) Um jovem investidor precisa escolher qual investimento lhe trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R\$ 500,00. Para isso, pesquisa o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: poupança e CDB (certificado de depósito bancário). As informações obtidas estão resumidas no quadro:

	Rendimento mensal (%)	IR (Imposto de renda)
Poupança	0,560	Isento
CDB	0,876	4% (sobre o ganho)

Para o jovem investidor, ao final de um mês, a aplicação mais vantajosa é:

- a poupança, pois totalizará um montante de R\$ 502,80.
 - a poupança, pois totalizará um montante de R\$ 500,56.
 - o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 504,38.
 - o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 504,21.
 - o CDB, pois totalizará um montante de R\$ 500,87.
- 14.** Explique por que a alternativa *c* da questão anterior está certa ou errada.

INVENTE VOCÊ

Saiba mais sobre esta seção nas **Orientações Didáticas**. Você pode observar o uso da linguagem e a compreensão dos estudantes pelas afirmações produzidas.

REGISTRE
NO CADERNO



- Crie mais duas afirmações corretas para a atividade 13.

FOCO NA LEITURA

Leia, nas **Orientações Didáticas**, os objetivos desta seção para utilizá-la da melhor maneira possível, a fim de desenvolver a competência de leitura dos estudantes.

REGISTRE
NO CADERNO

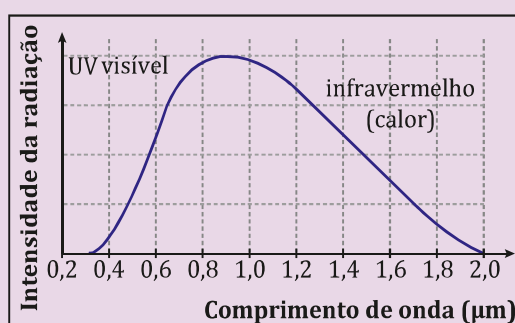


Gráficos são textos que exigem uma forma particular de leitura. Dependendo da informação que se quer obter, é preciso selecionar dados do gráfico. No entanto, no problema a seguir é preciso mais do que ler o gráfico, porque o texto traz outras relações decisivas para se resolver a questão. Leia o texto com atenção.

(Enem-MEC) A passagem de uma quantidade adequada de corrente elétrica pelo filamento de uma lâmpada deixa-o incandescente, produzindo luz. O gráfico a seguir mostra como a intensidade da luz emitida pela lâmpada está distribuída no espectro eletromagnético, estendendo-se desde a região do ultravioleta (UV) até a região do infravermelho.

A eficiência luminosa de uma lâmpada pode ser definida como a razão entre a quantidade de energia emitida na forma de luz visível e a quantidade total de energia gasta para o seu funcionamento. Admitindo-se que essas duas quantidades possam ser estimadas, respectivamente, pela área abaixo da parte da curva correspondente à faixa de luz visível e pela área abaixo de toda a curva, a eficiência luminosa dessa lâmpada seria de aproximadamente:

- 10%
- 15%
- 25%
- 50%
- 75%



Zipit

1. Antes de resolver, separe: *Aqui, apresentamos uma maneira de leitura para textos com excesso de dados.*
 - I. os termos desconhecidos e investigue o significado de cada um;
 - II. a pergunta;
 - III. os dados relevantes para responder à pergunta.
2. Resolva o problema e analise se o fato de ter realizado os passos I, II e III auxiliaram ou não na resolução. A seguir, verifique se essa estratégia de leitura pode auxiliá-lo na busca da resposta dos próximos exercícios e problemas.

PARA COMPLEMENTAR

Esta seção tem como objetivo destacar algum conteúdo ou fato importante para o desenvolvimento do tema em estudo. Leia mais sobre ela nas **Orientações Didáticas**.

Uma pesquisa sobre a história dos bancos e sua relação com o desenvolvimento das sociedades modernas pode ser uma proposta interessante de integração com a disciplina de História.

A ideia de cobrar juros é antiga

Cobrar juros não é uma prática recente. Sua origem remonta a tempos antigos, como podemos constatar lendo os textos a seguir.



No *Liber Abaci di Fibonacci* (Leonardo de Pisa), escrito em 1202, aparece o seguinte problema: [...]:

Um homem aplica um denário a juros [compostos] a uma taxa tal que em cinco anos ele tem dois denários, e em cada cinco anos daí em diante o dinheiro dobra. Pergunto: quantos denários ele ganharia em cem anos a partir de seu denário inicial?

[...] O costume de cobrar juros encontra-se já em 2000 a.C., como registra uma antiga tábua de argila babilônica. Daremos um exemplo [...]:

Vinte “manehs” de prata, o valor da lã, os haveres de Belshazzar, o filho do rei... Todos os haveres de Nadin-Merodach na cidade e no campo serão caução dada a Belshazzar, o filho do rei, até que Belshazzar receba totalmente o dinheiro bem como os juros sobre ele.

As taxas de juro na Babilônia chegaram a atingir 33%. Em Roma, na época de Cícero, permitia-se até 48%. Justiniano posteriormente estabeleceu como máximo permissível a taxa de 0,5% ao mês, que deu origem à taxa comum de 6% ao ano. Na Índia, porém, durante o século XII registraram-se taxas de até 60%.

A origem da palavra “interest” [(do inglês, “juro”)] está relacionada com a política da Igreja, que proibia a usura no pagamento do uso da moeda. O agiota contornava essa proibição imposta pelas leis canônicas cobrando uma remuneração somente no caso de o dinheiro ser devolvido com atraso (o que acontecia com frequência, mesmo naqueles dias!). Ele argumentava que a remuneração o compensava pela diferença monetária entre sua condição financeira empobrecida, devido ao pagamento atrasado, e a condição que teria no caso de reembolso imediato. Essa diferença era o *id quod interest* (“aquilo que está entre”).

Anuidades já eram conhecidas em 1556, ano em que Niccolo Tartaglia, em seu *General trattato*, colocou o seguinte problema, trazido, segundo ele, por um cavaleiro de Barri, que dissera que a transação efetivamente tinha acontecido [...]:

Um mercador cedeu a uma universidade 2 814 ducados com o entendimento de que deveria receber 618 ducados por ano durante nove anos, ao fim dos quais os 2 814 ducados seriam considerados pagos. Que juros estava ele obtendo sobre seu dinheiro?

[...] Em 1693 Edmund Halley, mais conhecido por seu trabalho em astronomia, contribuiu para o estudo das anuidades de seguros de vida com a publicação de *Degrees of mortality of mankind... with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives*. Este incluía a seguinte fórmula [...]:

Para achar o valor de uma anuidade, multiplique a probabilidade de que o indivíduo considerado venha a estar vivo depois de n anos pelo valor presente do pagamento anual devido ao fim de n anos; então some os resultados assim obtidos para todos os valores de n de 1 até a idade extrema que seja possível aquele indivíduo atingir.

Halley provavelmente usou a tábua de mortalidade publicada em 1662 por John Graunt de Londres em sua *Natural and political observations... Made upon the bills of mortality*, que se baseava nos registros de mortes mantidos em Londres a partir de 1592. (Esses registros originalmente visavam manter um levantamento das mortes devidas à peste.)

Fonte: SHIVELY, L. S. Juros e anuidades. In: BAUMGART, J. K. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula — Álgebra*. São Paulo: Atual, 1992. p. 96-97.



3 Identificando dois tipos de juros

Vamos voltar ao problema inicial do capítulo para, finalmente, chegar a uma conclusão sobre quem tem razão, Neide ou o gerente da financeira. Para isso, retomemos os cálculos apresentados no problema.

Para descobrir quem está certo, precisamos analisar qual foi o critério usado nos cálculos de cada um.

Quando um capital é aplicado ou emprestado a uma determinada taxa, o montante pode crescer segundo dois diferentes critérios ou regimes: **de capitalização simples** ou **de capitalização composta**. Esses dois sistemas também são conhecidos como **juros simples**, no primeiro caso, e **juros compostos**, no segundo.

Cálculo do gerente

1º mês: $2000 + 0,08 \cdot 2000 = 2000 + 160 = 2160$
 2º mês: $2160 + 0,08 \cdot 2160 = 2332,80$
 3º mês: $2332,80 + 0,08 \cdot 2332,80 \approx 2519,42$
 4º mês: $2519,42 + 0,08 \cdot 2519,42 \approx 2720,97$
 5º mês: $2720,97 + 0,08 \cdot 2720,97 \approx 2938,65$
 6º mês: $2938,65 + 0,08 \cdot 2938,65 \approx 3173,74$
Total a pagar: R\$ 3 173,74

Cálculo de Neide

☐ Em um mês: 8%
☐ Em seis meses: $6 \cdot 8\% = 48\%$
☐ 2000 mais 48% de 2000 é o
☐ mesmo que:
☐ $2000 + 0,48 \cdot 2000 =$
☐ $= 2000 + 960 = 2960$
☐ **Total a pagar: R\$ 2 960,00**

A tomada de empréstimo de dinheiro é uma realidade comum. Você pode analisar com os estudantes os juros praticados por bancos em cheque especial, cartão de crédito e empréstimo pessoal. Isso pode alertá-los com relação ao uso responsável do dinheiro. É uma maneira interessante de usar a Matemática para que eles desenvolvam propostas de intervenção em sua vida.

Juros simples

No regime de juros simples, estes incidem sempre sobre o capital inicial. Na prática, esse sistema é usado especialmente em pagamentos cujo atraso é de apenas alguns dias.

Juros compostos

Nesse regime, após cada período, os juros são incorporados ao capital inicial, passando a render sobre o novo total. Dessa forma, os cálculos são efetuados como “juros sobre juros”.

Observe, no problema inicial do capítulo, que Neide fez os cálculos no regime de juros simples e o gerente calculou no regime de juros compostos. Esse foi o motivo da confusão.

Na prática, as empresas, os órgãos governamentais e os investidores costumam reinvestir as quantias geradas pelas aplicações financeiras, o que justifica o emprego mais comum de juros compostos na economia.

4 Cálculo de juros simples

Voltemos mais uma vez ao problema do início do capítulo, com especial atenção para os cálculos de Neide, mostrados no quadro a seguir com maior detalhamento.

Período	Capital inicial	Juros no período	Montante a ser pago
1º mês	2000	$160 = 0,08 \cdot 2000$	$M_1 = 2000 + 160 = 2160$
2º mês	2000	$320 = 2 \cdot 160$	$M_2 = 2000 + 320 = 2000 + 2 \cdot 160 = 2320$
3º mês	2000	$480 = 3 \cdot 160$	$M_3 = 2000 + 480 = 2000 + 3 \cdot 160 = 2480$
4º mês	2000	$640 = 4 \cdot 160$	$M_4 = 2000 + 640 = 2000 + 4 \cdot 160 = 2640$
5º mês	2000	$800 = 5 \cdot 160$	$M_5 = 2000 + 800 = 2000 + 5 \cdot 160 = 2800$
6º mês	2000	$960 = 6 \cdot 160$	$M_6 = 2000 + 960 = 2000 + 6 \cdot 160 = 2960$
⋮	⋮	⋮	⋮
tº mês	2000	$j = 2000 \cdot 0,08 \cdot t$	$M = 2000 + \underbrace{2000 \cdot 0,08 \cdot t}_j$
↓	↓	↓ ↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓ ↓
tº mês	C	$j = C \cdot i \cdot t$	$M = C + j$

Observando o quadro, podemos notar que, se continuássemos até um tempo t indeterminado, o cálculo do juro simples poderia ser generalizado assim:

Se um capital C , aplicado a uma taxa i ao período, no sistema de juros simples, rende juros j ao fim de um período t , então podemos dizer que: $j = C \cdot i \cdot t$

O montante a ser pago (ou recebido) após esse período é dado pelo capital inicial mais o juro.

$$M = C + j$$

Lembre-se de que, no caso de depreciação ou multa, o valor de j é negativo, ou deve ser subtraído.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

Leia cada problema e resolva-o acompanhando a resolução apresentada. Se tiver dúvidas com relação aos termos usados, retome os tópicos anteriores.

R6. Um capital foi aplicado em regime de juros simples à taxa de 1,5% a.m. (ao mês), por 3 meses. Ao final desse período, apresentou um rendimento de R\$ 135,00. Qual foi o capital aplicado?

Resolução

Podemos encontrar a resposta para esse problema de dois modos. Acompanhe.

1º modo: Aplicando a fórmula para cálculo de juros simples, temos: $j = C \cdot i \cdot t$

No caso, $j = 135$, $t = 3$ meses e $i = 1,5\%$ (a.m.) = 0,015 (a.m.).

Então, substituindo os valores na fórmula, teremos:

$$135 = C \cdot 0,015 \cdot 3$$

$$C = 3000$$

Portanto, o capital aplicado inicialmente foi de R\$ 3000,00.

2º modo: Usando proporcionalidade:

Sabemos que em 3 meses os juros foram de R\$ 135,00. Logo, em 1 mês os juros foram de R\$ 45,00.

Dessa forma, a taxa de juros de 1,5% a.m. deu, sobre o capital aplicado, um ganho mensal de R\$ 45,00. Assim, temos que:

$$\begin{array}{l} 1,5\% \text{ — } 45 \\ 100\% \text{ — } x \\ \frac{1,5}{100} = \frac{45}{x} \Rightarrow 1,5x = 4500 \Rightarrow x = \frac{4500}{1,5} \Rightarrow x = 3000 \end{array}$$

R7. Qual é a taxa mensal de juros simples que faz um capital de R\$ 9500,00 produzir um montante de R\$ 11900,00 ao fim de 1 ano?

Resolução

Vamos lembrar que $M = C + j$; então: $j = M - C$

No nosso caso, temos: $j = 11900 - 9500 = 2400$

Para calcular a taxa, podemos usar $j = C \cdot i \cdot t$; mas, como a taxa de juros é mensal, o tempo também deve estar representado em meses.

$$2400 = 9500 \cdot i \cdot 12$$

Daí, concluímos que $i = 0,021 = \frac{2,1}{100}$, ou $i = 2,1\%$ ao mês.

R8. O preço à vista de um eletrodoméstico é R\$ 350,00. Dando-se uma entrada de R\$ 80,00, financia-se o restante em 12 meses com juros simples de 4% ao mês. Qual será o valor de cada prestação?

Resolução

Após o pagamento da entrada, o valor a ser financiado em 12 meses será de $350 - 80 = 270$.

Isso corresponde a parcelas mensais de $270 : 12 = 22,50$, que, acrescidas de 4%, resultam em:

$$22,50 + \frac{4}{100} \cdot 22,50 = 22,50 \cdot 1,04 = 23,40$$

Logo, o valor de cada prestação será de R\$ 23,40.

5 Cálculo de juros compostos

Vamos agora analisar os cálculos feitos pelo gerente da financeira à qual Neide pediu o empréstimo. Observe o quadro a seguir.

Período	Capital inicial	Juros no período	Montante a ser pago
1º mês	2000,00	$0,08 \cdot 2000,00 = 160,00$	$M_1 = 2000 + 160,00 = 2160,00$
2º mês	2160,00	$0,08 \cdot 2160,00 = 172,80$	$M_2 = 2160 + 172,80 = 2332,80$
3º mês	2332,80	$0,08 \cdot 2332,80 = 186,62$	$M_3 = 2332,80 + 186,62 = 2519,42$
4º mês	2519,42	$0,08 \cdot 2519,42 = 201,55$	$M_4 = 2519,42 + 201,55 = 2720,97$
5º mês	2720,97	$0,08 \cdot 2720,97 = 217,68$	$M_5 = 2720,97 + 217,68 = 2938,65$
6º mês	2938,65	$0,08 \cdot 2938,65 = 235,09$	$M_6 = 2938,65 + 235,09 = 3173,74$

Ler com os estudantes esta parte do livro permite que eles compreendam como usamos a generalização de um padrão observado na construção de expressões algébricas e fórmulas.

Você deve estar imaginando que, se o tempo do empréstimo fosse bem maior que 6 meses, seria muito trabalhoso para o gerente calcular o valor a ser pago, mês a mês. E você tem razão. Portanto, devemos encontrar um modo mais simples de fazer isso.

Observando o cálculo do gerente, página 16, note que, para calcular o montante do 1º mês, fizemos $M_1 = 2000 + 0,08 \cdot 2000$, que corresponde a $M_1 = C + j = C + i \cdot C = C(1 + i)$. Vamos reescrever o quadro anterior com base nessa notação.

Período	Capital inicial	Juros no período	Montante a ser pago
1º mês	C	$i \cdot C$	$M_1 = C + i \cdot C = C(1 + i)$
2º mês	M_1	$i \cdot M_1$	$M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
3º mês	M_2	$i \cdot M_2$	$M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$
4º mês	M_3	$i \cdot M_3$	$M_4 = M_3 + i \cdot M_3 = M_3(1 + i)^3(1 + i) = C(1 + i)^3(1 + i) = C(1 + i)^4$
5º mês	M_4	$i \cdot M_4$	$M_5 = M_4 + i \cdot M_4 = M_4(1 + i)^4(1 + i) = C(1 + i)^4(1 + i) = C(1 + i)^5$
6º mês	M_5	$i \cdot M_5$	$M_6 = M_5 + i \cdot M_5 = M_5(1 + i)^5(1 + i) = C(1 + i)^5(1 + i) = C(1 + i)^6$

Por esse novo quadro, podemos perceber que o cálculo do montante, mês a mês, forma uma **progressão geométrica** de razão $(1 + i)$. Dessa forma, para um tempo t , o cálculo do montante será dado por: $M = C(1 + i)^t$

em que **C** é o capital inicial, **i** é a taxa e **t** é o tempo de aplicação do capital.

Observe que a taxa de juros e o prazo devem estar na mesma unidade de tempo.

No nosso exemplo, a unidade é o mês.

Com os estudantes, compare a resolução das atividades R9 e R10. Observe que, na primeira, o cálculo dos montantes, apesar de trabalhoso, pode ser feito a mão. Já na segunda, recorreu-se à calculadora.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R9. Luís aplicou R\$ 2 500,00 à taxa de 2% ao mês, durante 5 meses.

- Quanto receberá de juros se o regime da aplicação for de juros simples?
- Quanto receberá de juros se o regime da aplicação for de juros compostos?
- Em cada caso, que montante ele terá ao fim de cada uma das aplicações?

Resolução

Temos: $C = 2500$; $i = 2\%$ (a.m.) $= 0,02$ (a.m.); $t = 5$ meses.

a) $j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow j = 2500 \cdot 0,02 \cdot 5 = 250$

Luís receberá R\$ 250,00 de juros.

b) Para calcular os juros, precisamos primeiro fazer o cálculo do montante que será recebido após a aplicação:

$$M = C(1 + i)^t \text{ ou } M = 2500(1 + 0,02)^5$$

$$\text{Daí: } M = 2500 \cdot 1,02^5 \approx 2500 \cdot 1,104 \Rightarrow m \approx 2760$$

$$\text{O juro será obtido se fizermos: } j = M - C = 2760 - 2500 = 260$$

Desse modo, em regime de juros compostos, Luís receberá aproximadamente R\$ 260,00.

c) No caso do juro simples, o montante será de:

$$M = C + j = 2500 + 250 = 2750 \text{ (R\$ 2 750,00)}$$

No caso do juro composto, temos $M = \text{R\$ } 2760,00$.

R10. Andrea deseja aplicar R\$ 18 000,00 a juros compostos de 0,5% ao mês. Que montante ela terá após 1 ano de aplicação?

Resolução

Para calcular o que se pede, usaremos a fórmula $M = C(1 + i)^t$. No entanto, devemos observar que a taxa de juros é mensal e que o tempo da aplicação está em anos. Isso exige que façamos $t = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}$, para que taxa e tempo estejam na mesma unidade. Então, $M = 18000 \cdot (1 + i)^{12}$.

Como $i = 0,5\% = \frac{0,5}{100} = \frac{5}{1000} = 0,005$, temos que:

$$M = 18000 \cdot (1 + 0,005)^{12} = 18000 \cdot 1,005^{12}$$

Para obter $1,005^{12}$ você pode:

- calcular manualmente, com lápis e papel;
- usar uma calculadora simples, digitando

1 . 0 0 5 , depois a tecla \times e em seguida 11 vezes a tecla $=$;

- usar uma calculadora científica e a tecla y^x ou x^y .

Nesse caso, digite:

1 . 0 0 5 y^x 1 2 $=$ ou
1 . 0 0 5 SHIFT
 x^y 1 2 $=$

Em todos os modos que sugerimos, você deve obter $1,005^{12} \approx 1,062$. Com isso, será possível calcular o montante: $M = 18000 \cdot 1,062 = 19116,00$

Andrea terá, após 1 ano de aplicação, aproximadamente R\$ 19 116,00.

Destaque que cada problema exige um recurso diferente em função da complexidade dos cálculos e das tecnologias disponíveis. Aproveite esta série de atividades resolvidas para que os estudantes relembrem aspectos essenciais de exponenciais e logaritmos (deste último, apenas a definição e as propriedades básicas).

R11. Expresse o tempo t de uma aplicação em função do montante M e da taxa de aplicação i nesse mesmo tempo t .

Resolução

Temos que $M = C(1 + i)^t$.

Para isolar t em um dos membros da equação, fazemos

$$\frac{M}{C} = (1 + i)^t.$$

Temos, então, uma equação exponencial e, para resolvê-la, podemos usar o que conhecemos de logaritmos.

$$t = \log_{(1+i)} \left(\frac{M}{C} \right)$$

Usando logaritmo decimal, ou a propriedade da mudança de base, podemos escrever:

$$t = \frac{\log \left(\frac{M}{C} \right)}{\log (1 + i)} = \frac{\log M - \log C}{\log (1 + i)}$$

Dessa expressão, temos que:

$$\log \frac{M}{C} = t \cdot \log (1 + i) \Rightarrow t \cdot \log (1 + i) = \log M - \log C \text{ ou}$$

$$\log M - \log C = t \cdot \log (1 + i)$$

Observe que, aplicando as propriedades dos logaritmos, sempre podemos calcular o tempo t de uma aplicação ou empréstimo para conseguir um montante M .

R12. Ana quer aplicar R\$ 6 000,00 com o objetivo de, após 1 ano e 3 meses, ter guardado R\$ 9 348,00. Que taxa mensal sua aplicação deverá ter para que ela consiga o valor desejado?

Resolução

O problema nos fornece os dados a seguir.

- $M = 9348$ (valor que Ana deseja receber pela aplicação ao final do período)
- $C = 6000$ (valor que será aplicado)
- $t = 1$ ano e 3 meses ou 15 meses (tempo da aplicação)

Precisamos descobrir a taxa que dará o montante desejado no prazo estabelecido. Então:

$$M = C(1 + i)^t$$

$$9348 = 6000(1 + i)^{15} \Rightarrow \frac{9348}{6000} = (1 + i)^{15} \Rightarrow 1,558 = (1 + i)^{15}$$

De acordo com a atividade R11, podemos fazer:

$$\log 1,558 = \log (1 + i)^{15} \quad (1)$$

Usando uma calculadora científica e a tecla \log , fazemos

$\boxed{1} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{8} \cdot \boxed{\log}$ e obtemos:

$$\log 1,558 \approx 0,192567$$

Podemos concluir que, para se obter o tempo de aplicação em situações de juros compostos, é necessário o uso de logaritmos, o que mostra uma aplicação prática da função logarítmica.

Voltando à expressão (1), temos:

$$0,192567 = 15 \log (1 + i) \Rightarrow \frac{0,192567}{15} = \log (1 + i)$$

$$\Rightarrow 0,01283 = \log (1 + i)$$

De acordo com a definição de logaritmos:

$$10^{0,01283} = 1 + i \quad (2)$$

Usando a tecla y^x ou a tecla x^y da calculadora científica, temos que: $10^{0,01283} \approx 1,03000$

Voltando à expressão (2), temos: $1,03000 = 1 + i$

Logo, $i = 0,03000$ ou $i = 3\%$.

Assim, em sua aplicação, Ana deverá escolher uma taxa de aproximadamente 3% a.m. para obter o montante desejado.

Como você observou, para resolver esse problema, usamos a calculadora científica. Você deve estar se perguntando como fará nas situações em que não puder usar uma calculadora, como acontece em algumas provas seletivas, por exemplo. Nesses casos, a questão da prova já informa qual é o valor do logaritmo que deve ser usado. Veja uma situação como essa na próxima atividade resolvida.

R13. (UEL-PR) O valor de um automóvel (em unidades monetárias) sofre uma depreciação de 4% ao ano. Sabendo-se que o valor atual de um carro é de 40 000 unidades monetárias, depois de quantos anos o valor desse carro será de 16 000 unidades monetárias? Use o valor 0,3 para $\log 2$ e o valor 0,48 para $\log 3$.

Resolução

Sabemos pelo problema que:

- $M = 16000$ (valor que o carro terá ao final do tempo de depreciação)
- $C = 40000$ (valor do carro hoje)
- $i = 4\%$ a.a. (taxa anual de depreciação)

$$\text{Temos, então: } M = C(1 - 0,04)^t$$

Observe que usamos $1 - 0,04$ porque, como o problema fala em depreciação, o valor do automóvel (40 000) sofrerá uma redução (e não um acréscimo) de 4% a.a.

$$16000 = 40000 (0,96)^t \Rightarrow \frac{16000}{40000} = 0,96^t \Rightarrow 0,96^t = 0,4$$

Daqui para a frente, podemos resolver o problema de duas formas.

1º modo: Usando uma calculadora científica:

Aplicando a conclusão obtida na atividade R11 e efetuados os cálculos usando uma calculadora científica.

$$\log (0,96)^t = \log 0,4 \Rightarrow t \log 0,96 = \log 0,4 \Rightarrow t = \frac{\log 0,4}{\log 0,96}$$

Substituindo pelos valores dos logaritmos, obtemos:

$$t \approx \frac{-0,39794}{-0,017729}$$

$$\text{Daí, } t \approx 22,45.$$

Por essa resolução, o tempo procurado é de, aproximadamente, 22 anos e 0,45 de 1 ano, ou seja, 22 anos e 5 meses.

2º modo: Usando as propriedades dos logaritmos:

Se a questão fornece $\log 2$ e $\log 3$ e não $\log 0,96$ ou $\log 0,4$, então quem a elaborou pode ter imaginado o emprego das propriedades dos logaritmos em sua resolução.

Retomemos nossa resolução a partir de $0,96^t = 0,4$.

$$\log (0,96)^t = \log 0,4$$

Vamos escrever de outro modo:

$$\log \left(\frac{96}{100} \right)^t = \log \frac{4}{10}$$

Usando as propriedades dos logaritmos, temos:

$$t \cdot \log\left(\frac{96}{100}\right) = \log \frac{4}{10} \Rightarrow t[\log 96 - \log 100] = \log 4 - \log 10$$

Vamos novamente usar as propriedades:

$$t[\log(32 \cdot 3) - \log 10^2] = \log 2^2 - \log 10$$

$\underbrace{\log 10 = 1}$

$$t[\log(2^5 \cdot 3) - 2 \log 10] = 2 \log 2 - 1$$

$$t[5 \log 2 + \log 3 - 2] = 2 \log 2 - 1 \Rightarrow t = \frac{2 \log 2 - 1}{5 \log 2 + \log 3 - 2}$$

Usando os valores fornecidos na questão, temos:

$$t \approx \frac{2 \cdot 0,3 - 1}{5 \cdot 0,3 + 0,48 - 2} \Rightarrow t \approx 20$$

Por essa resolução, concluímos que o tempo de depreciação é de 20 anos.

Mas não deveríamos ter obtido a mesma resposta nos dois modos de resolução?

O problema está na diferença de aproximação entre os valores de $\log 2$ e $\log 3$ fornecidos no enunciado da questão e aqueles encontrados pela calculadora.

Para confirmar isso, vamos retomar nossa resolução do seguinte ponto:

$$t[5 \log 2 + \log 3 - 2] = 2 \log 2 - 1 \Rightarrow t = \frac{2 \log 2 - 1}{5 \log 2 + \log 3 - 2}$$

e refazer os cálculos usando agora uma calculadora, e não os valores dados na questão do vestibular:

$$\log 2 \approx 0,301029995; \log 3 \approx 0,477121254$$

$$t \approx \frac{2 \cdot 0,301029995 - 1}{5 \cdot 0,301029995 + 0,477121254 - 2} \Rightarrow t \approx 22,44$$

Esse é um valor bem próximo ao que encontramos quando resolvemos pelo primeiro modo.

Conclusão: $\log 2 \approx 0,3$ e $\log 3 \approx 0,48$ podem ser bons valores para usarmos em uma prova a fim de simplificar os cálculos com valores decimais. Mas, quando se trata de negócios, essa é uma aproximação bastante grosseira.

De modo geral, usando as propriedades dos logaritmos, sempre podemos calcular o tempo t de uma aplicação ou empréstimo para conseguir um montante M .

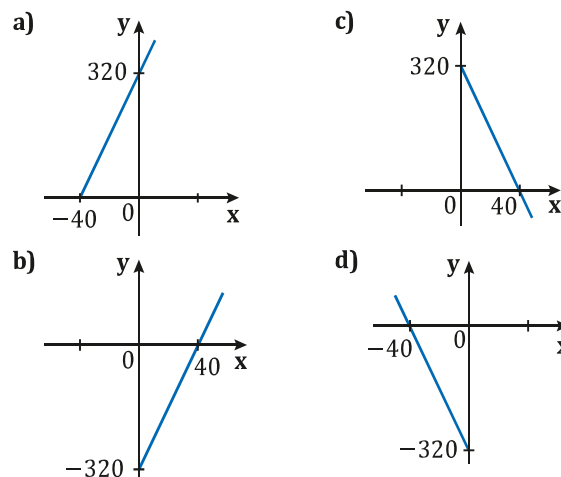
FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO

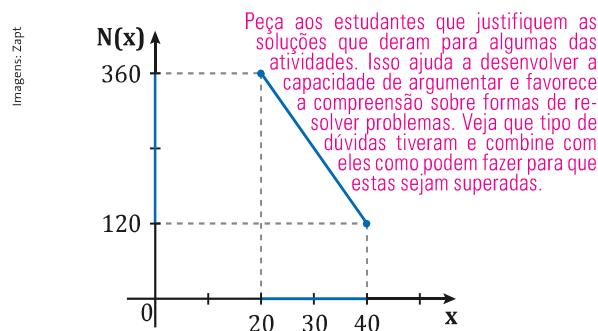


- Leia todas as atividades antes de resolvê-las e perceba aquelas que você considera mais simples. Comece por essas.
- Faça uma lista de palavras desconhecidas ou que causam dúvida. Use o livro ou um dicionário para consultar o significado delas na atividade.
- Em caso de dúvida, volte à seção **De olho na resolução** e veja se as atividades resolvidas ajudam a saná-la.
- Sempre que possível, verifique se há mais de uma forma de resolver uma atividade; isso pode ser útil para ampliar as possibilidades de abordar uma questão.
- Faça uma lista de dúvidas que surgiram ao resolver as atividades para conversar sobre elas com o professor.
- Use a calculadora se achar necessário.

15. No primeiro dia de junho, uma pessoa tomou emprestados R\$ 3 000,00, a juros simples, a uma taxa de 4,5% ao mês. Qual é o montante da dívida 4 meses depois?
16. Qual será o valor final de uma mercadoria que custa R\$ 400,00, se for comprada a prazo, em 6 parcelas mensais iguais, a uma taxa de 20% ao ano, no sistema de juros simples?
17. Patrícia aplicou R\$ 800,00, a juros simples, a uma taxa de 2,5% ao mês e, ao final de um certo tempo, recebeu R\$ 1 080,00. Quanto tempo ela deixou o dinheiro aplicado a essa taxa?
18. Um comerciante decidiu fabricar camisetas de malha para vender na praia a R\$ 8,00 cada uma. Investiu nisso R\$ 320,00. Sabendo que o lucro (y) obtido é função da quantidade de camisetas vendidas, qual dos gráficos a seguir mais se aproxima da representação dessa função? Por quê?



19. Uma companhia teatral que está encenando uma peça vende ingressos com diferentes preços. Observou-se que o número de ingressos vendidos diariamente ($N(x)$) varia de acordo com o preço (x) do ingresso do dia. De modo aproximado, essa variação está descrita no gráfico.



Qual deve ser o preço do ingresso para que o valor arrecadado pela companhia seja o maior possível?

20. (FGV-SP) Sandra fez uma aplicação financeira, comprando um título público que lhe proporcionou, após um ano, um montante de R\$ 10 000,00. A taxa de juros da aplicação foi de 10% ao ano. Podemos concluir que o juro auferido na aplicação foi:

- a) R\$ 1000,00 d) R\$ 909,09
b) R\$ 1009,09 e) R\$ 800,00
c) R\$ 900,00

21. (UFT-TO) Uma pessoa vai a uma loja comprar um aparelho celular e encontra o aparelho que deseja adquirir com duas opções de compra: à vista com 10% de desconto; ou em duas parcelas iguais e sem desconto, sendo a primeira parcela no ato da compra e a outra um mês após.

Com base nos dados de oferta deste aparelho celular, pode-se afirmar que a loja trabalha com uma taxa mensal de juros de:

- a) 0% c) 5% e) 25%
b) 1% d) 10%

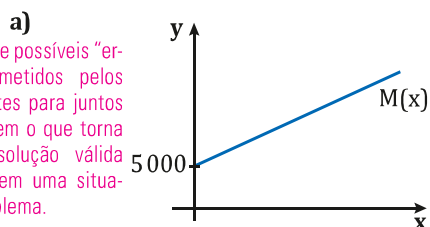
22. (EPCAR-MG) Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias x e y reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:

- 1) Mateus aplicou a quantia y durante um tempo que foi metade do que esteve aplicada a quantia x de Lucas.
- 2) Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.
- 3) No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.

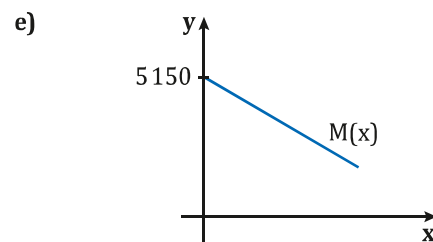
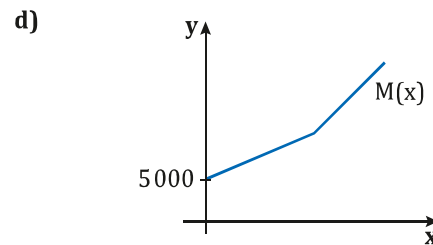
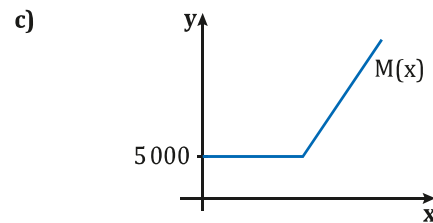
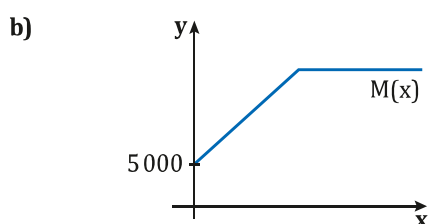
Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então $x - y$ é igual a:

- a) R\$ 103,20 c) R\$ 108,30
b) R\$ 106,40 d) R\$ 109,60

23. (Enem-MEC) Paulo emprestou R\$ 5 000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere x o número de meses do empréstimo e $M(x)$ o montante a ser devolvido para Paulo no final de meses. Nessas condições, a representação gráfica correta para $M(x)$ é:



Aproveite possíveis "erros" cometidos pelos estudantes para juntos analisarem o que torna uma resolução válida ou não em uma situação-problema.



24. Fábio aplicou R\$ 14 000,00 a 1,5% ao mês, em regime de juros compostos, por 2 anos e meio.

- a) Que montante ele recebeu ao final desse período?
- b) Considerando que o dinheiro retirado por Fábio sofrerá um desconto de 13% devido ao pagamento de impostos, qual será o valor líquido que ele receberá?

25. Um capital foi aplicado em regime de juros compostos, por 24 meses, a uma taxa de 7% ao mês. Sabendo que o montante da aplicação foi de R\$ 12 825,00, qual foi o valor aplicado?

26. Um investidor aplicou R\$ 60 000,00 a juros compostos de 2,2% ao mês. Daqui a quantos meses, aproximadamente, ele terá um montante de R\$ 65 400,00?

27. Para decidir fazer uma aplicação de R\$ 24 000,00, João precisava saber qual a melhor taxa para que ele recebesse R\$ 36 087,00 depois de 8 meses. Ele pensou um pouco, fez uns cálculos e concluiu que 6,5% a.m. era uma boa taxa. Você concorda? Por quê?

28. Flávio comprou uma moto há 3 anos por R\$ 22 000,00 e agora quer vendê-la. Sabendo que a cada ano o valor da moto é depreciado em 4,5%, e que Flávio pretende receber 2% sobre o valor depreciado, por qual valor ele deve vendê-la?

29. Uma loja está anunciando esta promoção: "Televisor 29": à vista, R\$ 702,00; a prazo, em 2 prestações mensais de R\$ 390,00, sendo a primeira paga no ato da compra". Nessas condições, qual é a taxa mensal de juros embutida na venda a prazo?

30. Um país apresenta inflação mensal de 2%. Qual será a inflação acumulada no período de 4 meses?

31. Raquel e Pedro resolveram este problema: Qual foi o desconto concedido na antecipação de uma prestação de R\$ 20 000,00, paga 2 meses antes do vencimento, à taxa de juros compostos de 3% ao mês?

Análise a solução de cada um e diga qual delas está correta.

Resolução de Raquel:

Imagens: BIS

$$20000 \cdot \left(1 - \frac{3}{100}\right)^2 = 20000 \cdot 0,9409 = 18818$$

Desconto: $20\,000 - 18\,818 = 1182,00$;
ou seja: R\$ 1182,00

Resolução de Pedro:

x é o valor da prestação 2 meses antes da prestação de R\$ 20 000,00.

$$x \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^2 = 20000 \Rightarrow x \cdot 1,0609 = 20000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{20000}{1,0609} \approx 18851,91$$

Desconto: $20\,000 - 18\,851,91 = 1148,08$;
ou seja: R\$ 1148,08

32. (Fatec-SP) Segundo informações da Sabesp, até 2 anos de idade, 80% do nosso corpo é formado de água; aos 5 anos, essa porcentagem cai para 70% até que, depois dos 60 anos, temos apenas 58% de água no organismo. Nessas condições, uma pessoa com mais de 60 anos tem, em relação à quantidade de água no organismo que possuía aos 2 anos de idade, uma redução de $x\%$ de água. O valor de x é

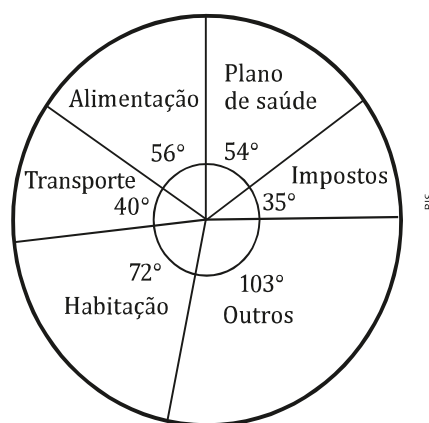
- a) 23,5. d) 26,0.
b) 24,0. e) 27,5.
c) 25,5.

33. (Unicamp-SP) As mensalidades dos planos de saúde são estabelecidas por faixa etária. A tabela a seguir fornece os valores das mensalidades do plano “Geração Saúde”. Sabendo que o salário mínimo nacional vale, hoje, R\$ 465,00, responda às perguntas a seguir.

a) O gráfico em formato *pizza* abaixo mostra o comprometimento do rendimento mensal de uma pessoa que recebe 8 salários mínimos por mês e aderiu ao plano de saúde “Geração Saúde”. Em cada fatia do gráfico, estão indicados o item referente ao gasto e o ângulo correspondente, em graus. Determine a que faixa etária pertence essa pessoa.

b) O comprometimento do rendimento mensal de uma pessoa com o plano de saúde “Geração Saúde” varia de acordo com o salário que ela recebe. Suponha que x seja a quantidade de salários mínimos recebida mensalmente por uma pessoa que tem 56 anos, e que $C(x)$ seja a função que fornece o comprometimento salarial, em porcentagem, com o plano de saúde. Note que x não precisa ser um número inteiro. Determine a expressão de $C(x)$ para $x \geq 1$ e trace a curva correspondente a essa função.

Faixa etária	Mensalidade (R\$)
Até 15 anos	120,00
de 16 a 30 anos	180,00
de 31 a 45 anos	260,00
de 46 a 60 anos	372,00
61 anos ou mais	558,00



34. Volte ao **Para complementar** da página 15 e resolva os problemas de Fibonacci e de Tartaglia que nele aparecem.

INVENTE VOCÊ

Além de permitir a avaliação da compreensão dos estudantes sobre o significado de **capital** e **montante**, essa atividade permite que sejam obtidos muitos textos de problemas diferentes que podem ser trocados entre os estudantes para que um resolva a proposta do outro.

REGISTRE
NO CADERNO



2. Elabore um problema de Matemática financeira envolvendo os dados $C = 110$, $t = 6$ e $M = 246$.

Funções e juros

Como vimos, o capital inicial, ou principal, pode crescer em função de duas modalidades de juros: simples ou composto. O quadro ao lado ilustra a evolução ano a ano de uma aplicação de R\$ 100,00 a uma taxa de 10% a.a.

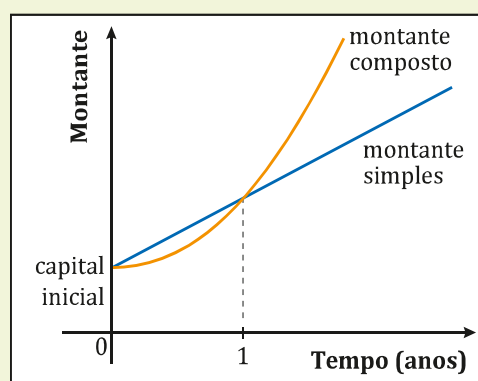
Observando o quadro, podemos ver que o crescimento do capital inicial (R\$ 100,00) a juros simples é **linear** e a juros compostos é **exponencial**.

Isso ocorre porque o montante, no sistema de juros simples, é obtido em função do tempo, sendo a equação dessa função $M = C + j$ ou $M = C + C \cdot i \cdot t = C(1 + i \cdot t)$, que é uma função afim na variável t . Já no caso do sistema de juros compostos, o montante é obtido em função do tempo por meio da expressão $M = C(1 + i)^t$, que é uma função exponencial de base $(1 + i)$ na variável t .

Podemos ilustrar graficamente o montante obtido nos dois sistemas como representado ao lado.

O gráfico nos mostra que o montante simples é representado por uma reta (crescimento linear) e o montante composto é representado por uma curva exponencial (crescimento exponencial). Vemos também que os gráficos se intersectam quando o período é igual a 1. Analisando tabela e gráfico juntos, concluímos que o regime de juros compostos só apresenta vantagem sobre o de juros simples para quem empresta um valor durante um período maior que uma unidade do tempo.

	Montante simples	Montante composto
Ano 1	$100 + 0,1 (100) = 110$	$100 + 0,1 (100) = 110$
Ano 2	$110 + 0,1 (100) = 120$	$110 + 0,1 (110) = 121$
Ano 3	$120 + 0,1 (100) = 130$	$121 + 0,1 (121) = 133,10$
Ano 4	$130 + 0,1 (100) = 140$	$133,1 + 0,1 (133,1) = 146,41$
Ano 5	$140 + 0,1 (100) = 150$	$146,41 + 0,1 (146,41) = 161,05$



FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

As habilidades de leitura e de resolução de problemas são as principais metas desta seção. Conheça a proposta deste livro para esta seção nas **Orientações Didáticas**.

REGISTRE
NO CADERNO

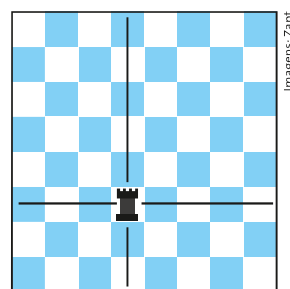


1. A importadora Preço Baixo importou uma caixa de suco por R\$ 100,00. Retirou da caixa 4 garrafas e aumentou o preço da dúzia de garrafas em R\$ 10,00. Depois disso, colocou à venda a caixa com o restante das garrafas pelos mesmos R\$ 100,00.

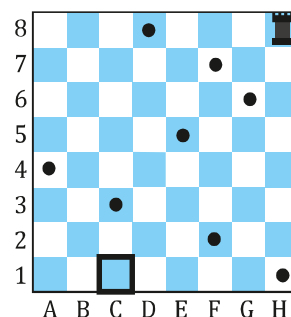
Quantas garrafas havia inicialmente na caixa?

2. (PUC-PR) Pai e filho fizeram a seguinte aposta:
O pai premiaria o filho com R\$ 1,00 pelo primeiro exercício que o filho acertasse, com R\$ 2,00 pelo segundo exercício acertado, com R\$ 4,00 pelo terceiro exercício, e assim por diante, sempre dobrando o prêmio. O filho, por sua vez, devolveria ao pai, usando o mesmo critério, cada vez que errasse um exercício.
Se, ao final de 10 exercícios, o filho recebeu R\$ 120,00, quantos exercícios ele acertou?

3. (Enem-MEC) O xadrez é jogado por duas pessoas. Um jogador joga com as peças brancas, o outro, com as pretas. Neste jogo, vamos utilizar somente a torre, uma das peças do xadrez. Ela pode mover-se para qualquer casa ao longo da coluna ou linha que ocupa, para a frente ou para trás, conforme indicado na figura a seguir.



O jogo consiste em chegar a um determinado ponto sem passar por cima dos pontos pretos já indicados.



Respeitando-se o movimento da peça torre e as suas regras de movimentação no jogo, qual é o menor número de movimentos possíveis e necessários para que a torre chegue à casa C1?



Esta seção aparece em todos os capítulos deste livro e tem como objetivo auxiliá-lo em seus estudos. Ao realizar o que propomos aqui, você poderá avaliar o que aprendeu e o que precisa retomar para aprender mais.

Este capítulo teve como metas:

- apresentar e trabalhar a linguagem e o significado dos termos mais usuais da Matemática financeira;
- retomar conteúdos diversos, como porcentagem, regra de três, funções e seus gráficos, logaritmos;
- ajudá-lo a desenvolver a habilidade de resolver situações-problema.

Faça um resumo no caderno daquilo que você estudou neste capítulo, incluindo os novos termos que aprendeu. Mas atenção: primeiro escreva de memória; só depois consulte os livros e suas anotações da aula para corrigir os erros, acrescentar informações etc.

Esse será um bom resumo se ele o auxiliar a lembrar, sempre que precisar, dos conceitos e das estratégias para resolver novos problemas.

APRENDER A APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Leia as **Orientações Didáticas** para compreender a proposta desta seção neste livro.

No capítulo 5 da unidade 2, voltaremos a estudar Geometria, mas com uma nova abordagem. O plano cartesiano e o que você sabe sobre funções e seus gráficos podem auxiliá-lo a compreender os novos conceitos que serão apresentados. Por isso, é importante recordar para continuar aprendendo.

Função afim

Toda função de \mathbb{R} em \mathbb{R} da forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = ax + b$ (com **a** e **b** reais e $a \neq 0$)
é denominada **função afim** ou **polinomial do 1º grau**.

a é o coeficiente angular de **f** e **b** é o coeficiente linear de **f**.

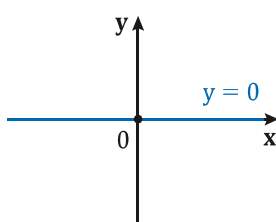
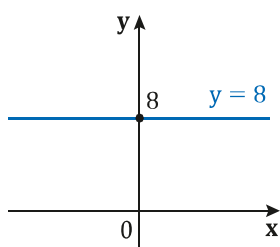
O gráfico de **f** é sempre uma reta que pode ser traçada a partir de dois pontos (x, y) que satisfaçam $y = ax + b$.

Raiz de f é o valor de **x** para o qual $f(x) = 0$, ou seja, $ax + b = 0$ e $x = -\frac{b}{a}$.

A função $f(x) = b$, $x \in \mathbb{R}$, é chamada de **função constante** e a função $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, é chamada de **função nula**.

Seus gráficos também são retas.

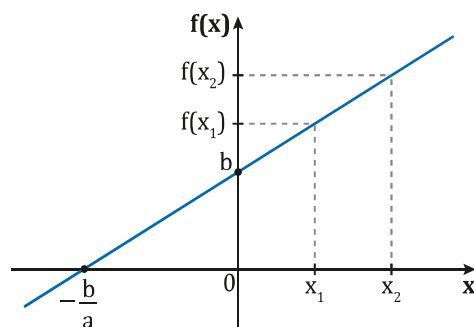
Exemplos:



Estudo da função afim

Seja $f(x) = ax + b$, com **a** e **b** reais, $a \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$; temos:

- **a > 0**



Imagens: Zapt

f é crescente em \mathbb{R} , ou seja, x_1 e x_2 em \mathbb{R} , com

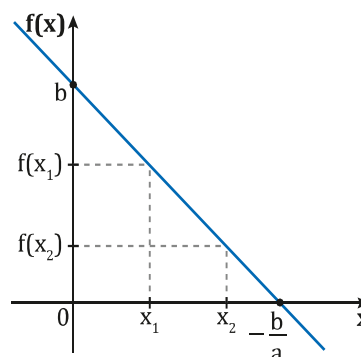
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

$$f(x) < 0 \text{ se } x < -\frac{b}{a}$$

$$f(x) > 0 \text{ se } x > -\frac{b}{a}$$

- **a < 0**



f é decrescente em \mathbb{R} , ou seja, x_1 e x_2 em \mathbb{R} , com

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

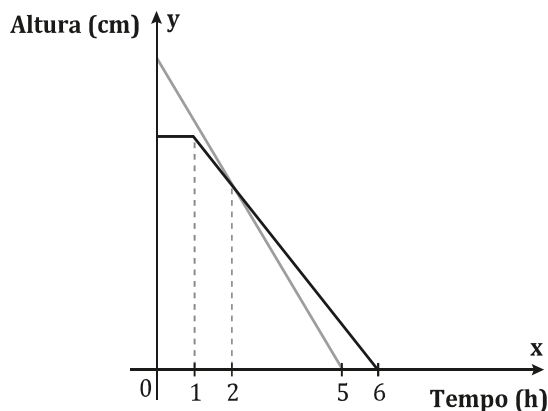
$$f(x) < 0 \text{ se } x > -\frac{b}{a}$$

$$f(x) > 0 \text{ se } x < -\frac{b}{a}$$

ATIVIDADES

- Analise as definições e as propriedades das funções afim. Explique cada uma delas com suas palavras e dê dois exemplos para cada uma das propostas a seguir.
 - Função afim.
 - Coeficiente angular e coeficiente linear.
 - Raiz da função afim.
 - Gráfico e estudo das funções afim.
- Determine o domínio da função $h(x) = \sqrt{-2x + 3}$.
- Sua classe deseja realizar uma festa na escola. Um conjunto musical se apresenta por R\$ 1200,00 mais 20% da arrecadação e outro por uma taxa fixa de R\$ 2 000,00.
 - Se são esperados 500 convidados pagantes, qual a importância máxima a cobrar de cada um para que a contratação da primeira banda seja a melhor opção?
 - Se for cobrado esse preço máximo pelo convite, quanto sobrar para outras despesas após o pagamento da banda?

- (UERJ) Em um determinado dia, duas velas foram acesas: a vela **A** às 15 horas e a vela **B**, 2 cm menor, às 16 horas. Às 17 horas desse mesmo dia, ambas tinham a mesma altura. Observe o gráfico que representa as alturas de cada uma das velas em função do tempo a partir do qual a vela **A** foi acesa.



Calcule a altura de cada uma das velas antes de serem acesas.

Ter consciência de procedimentos de cálculo pode facilitar a resolução de problemas. Esse é um dos objetivos desta seção. Leia mais sobre ela nas **Orientações Didáticas**.

CÁLCULO RÁPIDO

REGISTRE
NO CADERNO



O cálculo com porcentagens é um dos mais utilizados na escola e fora dela. Ter agilidade com esse tipo de cálculo é, portanto, útil.

Veja por exemplo uma forma de calcular rapidamente 75% de 500.

• 50% de 500 é igual a 250 $\left(50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}\right)$.

• 25% de 500 é igual a 125 (25% é metade de 50%).

Então, 75% de 500 é o mesmo que $250 + 125$, que é igual a 375.

ATIVIDADES

- Use essa ideia e calcule 75% de:
 - 400
 - 60
 - 1700
- Use a ideia anterior para calcular:
 - 45% de 200
 - 150% de 50
 - 20% de 356
 - 37,5% de 80
 - 65% de 1380
- Resolva os problemas a seguir.
 - Um pacote de bombons contém 15 bombons. Em uma promoção especial foram acrescentados 20% de bombons. Quantos bombons há no pacote promocional?
 - Três amigos fizeram a mesma prova. Ricardo acertou 40 das 80 questões, Sara acertou 45% das questões e Paulo conseguiu acertar $\frac{5}{8}$ das questões. Quem se saiu melhor?

- Um pacote de pó de café deveria conter 454 g. Foi feita uma inspeção e descobriu-se que o pacote continha 15% menos do que o informado. Se você comprasse 3 desses pacotes, quantos gramas de café pagaria sem levar?

- Calcule mentalmente e complete no caderno.
 - 20 é 10% de ■.
 - 4 é 25% de ■.
 - 12 é 60% de ■.
 - 120 é 80% de ■.
- Calcular rapidamente com decimais sempre ajuda. Divida, sem calculadora, cada um dos números a seguir por 10, 100 e 1000. Anote a resposta em seu caderno.

a) 4	d) 1,01	g) 0,4
b) 0,04	e) 130	h) 102
c) 64	f) 10,2	i) 6,4
- Use os mesmos números da atividade 5 e agora multiplique cada um deles por 10, 100 e 1000.
- Sabendo que $12,2 \cdot 1,27 = 15,494$, calcule rapidamente.

a) $1,22 \cdot 1,27$	d) $122 \cdot 127$
b) $122 \cdot 1,27$	e) $0,122 \cdot 127$
c) $0,122 \cdot 1,27$	f) $12,2 \cdot 12,7$
- Para resolver a atividade 7, você deve ter percebido um padrão. Use o que observou e calcule sem lápis e papel, e sem usar a calculadora.

a) $0,2 \cdot 3$	c) $0,2 \cdot 0,2$
b) $0,2 \cdot 0,3$	d) $0,02 \cdot 2$

Esta seção está presente em todos os capítulos e visa mostrar aplicações ou relações do tema estudado com o dia a dia ou com outras áreas do conhecimento. Leia mais sobre ela nas **Orientações Didáticas**.

Meu primeiro salário: e agora?

A ansiedade pelo primeiro salário geralmente é intensa. Maior ainda é a responsabilidade que se deve ter na hora de decidir como usá-lo. A questão não é simples. Geralmente temos muitos planos. Pagar a mensalidade da faculdade ou, no caso de se cursar uma universidade pública, comprar os livros, cobrir os gastos com locomoção etc. Contribuir em casa com o aluguel, as contas... Comprar os objetos de desejo... Presentear alguém especial... São muitas as possibilidades, e elas estão todas condicionadas ao plano de vida e à situação financeira de cada um.

O que cada um faz com seu salário é um problema pessoal. Porém, essa liberdade envolve uma enorme responsabilidade: equilíbrio de despesa e receita. Isso se chama **economia doméstica**.

Dos estudos de Matemática financeira, pode-se concluir, por exemplo, que os cálculos de descontos e acréscimos podem estar “maquiados” sob um número aparentemente pequeno. É que, ao colocar as contas na ponta do lápis, percebe-se, geralmente tarde demais, que aquele pequeno detalhe deu início a uma enorme dívida.

Cartão de crédito, cartão de débito, cheque, nota promissória, débito automático, dinheiro em espécie. Todos esses recursos têm vantagens e desvantagens. Como diz o provérbio, “todo bônus tem um ônus”. É preciso informar-se bem sobre cada um desses recursos, para assim escolher o mais adequado, que restrinja ao máximo os custos de um negócio qualquer.

Preocupados com o consumismo desenfreado e com a falta de hábito da população de calcular e controlar seus gastos, os especialistas têm propagado insistentemente, por meio da mídia, os cuidados que se deve ter com o controle das finanças domésticas.

Mas o que fazer para equilibrar os ganhos com os gastos?

Os economistas falam em **planejamento e controle de receita e despesa**.

Para planejar, é preciso ter pelo menos um mínimo de conhecimento sobre finanças, tais como o cálculo de juro sobre juro, o significado de desconto e acréscimo. Ter noções sobre o que é poupar e as possibilidades de aplicação do dinheiro. Também é importante saber como funciona o comércio; por exemplo, quando e como acontecem as liquidações.

Para o controle de receita e despesa, o bom é se organizar por meio de uma planilha. Essa planilha pode ser feita com lápis e papel ou com os mecanismos oferecidos pela tecnologia: a **planilha eletrônica**. São vários os programas de planilha disponíveis. Na internet, pode-se fazer, por exemplo, o *download* gratuito do LibreOffice, um *software* compatível com a maioria dos sistemas operacionais disponíveis, que possui todos os recursos necessários para os registros típicos da área financeira.

Mas o que é uma planilha eletrônica? É uma tabela, igual àquela que fazemos com lápis e papel. Tem colunas, indicadas por letras; linhas, indicadas por números; e células, que, fazendo jus ao nome, são a parte do todo, a unidade, o local em que se digita a informação, sejam números, sejam palavras. Cada célula é representada pela posição que ocupa; por exemplo, veja na página seguinte, a célula C5 é a que está no cruzamento da terceira coluna (C) com a quinta linha (5).

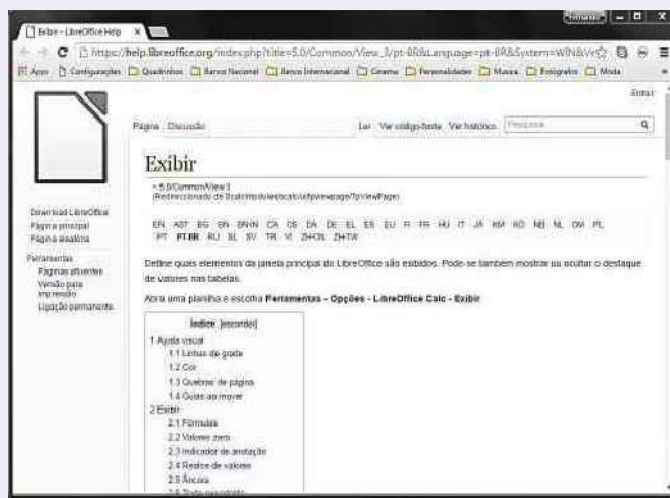
A planilha eletrônica, em relação àquela que montamos com lápis e papel, oferece muitas facilidades proporcionadas pela tecnologia. Por exemplo: podemos estender ou comprimir linhas e colunas; trocar a posição de uma informação sem usar borracha, bastando selecionar a célula deslocada e copiá-la no local correto. Também funciona como uma calculadora financeira. Pode-se por exemplo calcular a média, bastando clicar em um ícone e selecionar os dados; mais um clique e tem-se o resultado. O mesmo ocorre com outros parâmetros amostrais, tais como mediana, moda, variância e desvio padrão. Tudo obtido com alguns cliques.



	A	B	C	D	E
1		Jan	Fev		
2	Entretenimento				
3	TV a cabo	52,98	52,98		
4	Aluguéis de Vídeo	7,98	15,96		
5	Filmes	16	32		
6	Cds	18,98	29,98		
7	Totais	95,94	130,92	113,43	
8					

As várias funções oferecidas pelo LibreOffice; entre elas, função Planilha e funções financeiras.

Exemplo de cálculo de média na planilha eletrônica do LibreOffice. Clique na célula D7, no sinal = da barra de ferramentas e depois em "Média"; selecione as duas células que trazem o valor total de cada mês e clique no sinal $\sqrt{}$ (Aceitar). Aparecerá na célula D7 o valor da média do intervalo B7; C7.



A potencialidade desse instrumento para a economia doméstica, entre outras aplicações, é bem significativa, e seu uso é simples: basta investigar um pouquinho a função de cada comando e desvendar o modo de fazer. Para tanto, basta clicar em Ajuda, na barra de ferramentas, e procurar pelo recurso a ser usado.

Assim, é possível montar uma planilha de receita e despesas e verificar se sobra dinheiro para poupar ou se é preciso “apertar o cinto”, como se diz popularmente. Pode-se ainda dar os comandos para que o programa calcule a fatia percentual de cada gasto em relação ao salário, ou representar os dados dos últimos meses por meio de gráficos, para melhor analisar as informações e, a partir delas, planejar os próximos meses. Tudo com digitação de dados e alguns cliques nos ícones disponíveis. Veja este exemplo de planilha mensal.

	A	B	C	D	E	F	G	H
	Especificação	Dia	Entrada	Saída	Observações	Porcentagem		
1	Salário	02/fev	R\$ 500,00					
2	Aparelho de som			R\$ 75,00	3ª prestação (3/6)	-15%		
3	Hora extra	15/fev	R\$ 25,00					
4	Escola	15/fev		R\$ 140,00		-28%		
5	Transporte	28/fev		R\$ 30,00		-6%		
6	Seguro saúde	28/fev		R\$ 80,00	Vence em março	-16%		
7	Aluguel	28/fev		R\$ 120,00		-24%		
8	Extras			R\$ 30,00		-6%		
9								
10								
11	Total		R\$ 525,00	R\$ 475,00		-95%		
12								
13	Cota para a poupança		R\$ 50,00					
14								

Essa planilha mensal representa o ganho e os gastos referentes a um mês. Além disso, pode-se calcular o montante disponível para, por exemplo, fazer uma aplicação financeira.

ATIVIDADE



1. Voltando à pergunta inicial, “Meu primeiro salário: e agora?”, propomos que planeje e faça sua primeira planilha de controle de receita e gastos. Basta investigar suas despesas, por exemplo, durante um mês e organizá-las em uma planilha. Ao final desse período, analise os dados e se posicione frente a eles. É preciso fazer alguma mudança em seus hábitos de consumo? Seus gastos estão adequados a seus planos financeiros?

2 Estatística

O estudo de Estatística é desenvolvido nos três volumes desta coleção. Neste volume, faremos uma retomada dos conceitos e das relações centrais desse conteúdo, para então avançar no estudo, apresentando a organização de dados em classes e as medidas de dispersão.

Este capítulo apresenta uma boa oportunidade para você trabalhar com os estudantes a “matemática das campanhas eleitorais”, examinando como os conceitos apresentados aqui são utilizados pelos institutos de pesquisa nos cálculos de tendências, intenção de voto do eleitorado e desempenho dos candidatos a cargos eletivos.

Leia o texto e o gráfico a seguir.

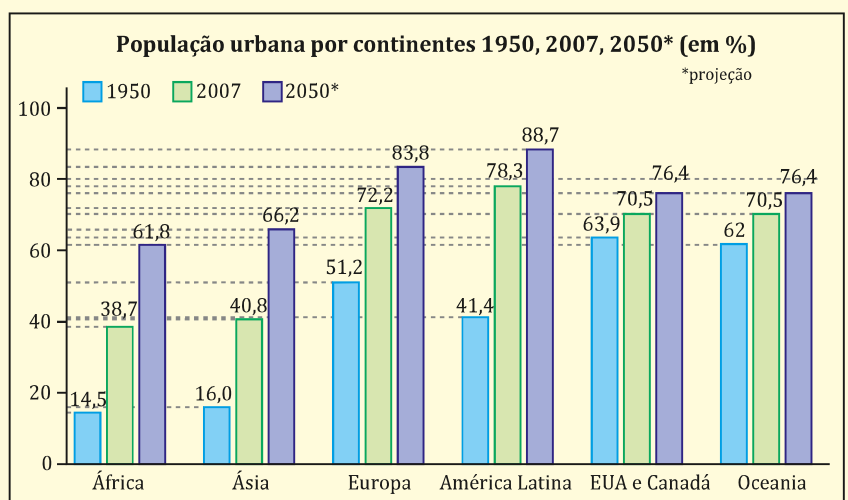
A urbanização nos continentes

[...]

O quadro mostra a taxa de urbanização do mundo por continentes no decorrer de um século, começando com os dados de 1950, passando pelos de 2007 (últimos dados disponíveis) e concluindo com projeções para 2050. Ao observar os dados de 1950, vemos que, já na metade do século XX, o chamado mundo desenvolvido (Europa, EUA, Canadá e Austrália) tinha a maioria de sua população nas cidades. Isso correspondia às regiões industrializadas do globo.

Nas décadas seguintes, a urbanização nessas localidades continuou crescendo, mas de forma mais lenta. A partir de agora, o aumento da urbanização está concentrado na Ásia e na África, que são menos urbanizadas. Podemos concluir isso comparando a coluna dos dados mais atuais (2007) com as previsões para 2050, baseadas nas taxas de urbanização dos últimos anos.

[...]



Fonte: World Organization Prospects 2007 — ONU.

Fonte: VENTUROLI, Thereza. *Guia do estudante — Atualidades e vestibular 2009*.

Disponível em: <http://planetasustentavel.abril.com.br/noticia/cidade/conteudo_307952.shtml?func=2>. Acesso em: 21 mar. 2016.

Quantas informações estão resumidas nesse gráfico? Trata-se de um gráfico em barras verticais ou colunas que utiliza a legenda de cores para distinguir as informações sobre a população urbana por continente em três diferentes datas: 1950, 2007 e 2050.

Observe que há aí uma projeção ou extrapolação das informações para uma data futura, que é o ano de 2050.

Essa é uma das características da Estatística, ramo da Matemática que possui técnicas e métodos de pesquisa que permitem a coleta e a interpretação de dados de modo a ter maior segurança nas análises e generalizações que podem ser feitas.

Situe-se

Neste capítulo, vamos retomar alguns termos e conceitos de Estatística estudados em anos anteriores, para avançar na compreensão de como a Matemática desenvolve medidas que permitem analisar tendências de dados de uma população ou de qualquer conjunto de informações. Ou seja, estudar a Matemática no contexto da análise de informações em situações diversas.

1 Recordando Estatística

Em Estatística, há sempre o interesse por uma questão a ser investigada dentro de um conjunto de pessoas ou objetos. O conjunto de elementos a ser investigado é denominado **população** e chamamos de indivíduo todo elemento da população.

Uma pesquisa estatística escolhe um aspecto a ser investigado, chamado de **variável**, comum a todos os indivíduos. No caso do exemplo da abertura deste capítulo, a população pesquisada foram todos os habitantes de nosso planeta, e a variável investigada é morar ou não em região urbana.

As variáveis que exprimem atributo ou qualidade são chamadas de **qualitativas**, enquanto as variáveis que exprimem contagem, ou seja, são numéricas, são chamadas de **quantitativas**.

Exemplos de variáveis qualitativas: o continente onde reside a pessoa, como no exemplo da abertura, nacionalidade, cor dos olhos, tipos de transporte, preferências (como musical, por um candidato, times de futebol etc.).

Exemplos de variáveis quantitativas: idade, altura, salários, tempo, entre outros.

Os dados estatísticos são usualmente representados em tabelas ou gráficos.

Observe nos exemplos a seguir que tanto as tabelas como os gráficos possuem um **título** que tem a função de chamar atenção e explicar o que está sendo representado. Há ainda o cuidado com a **fonte** que indica de onde foram coletados os dados e que nos permite confiar mais ou menos nas informações apresentadas.

Uma reportagem publicada em 2012 com alguns dados veiculados durante a Conferência sobre Desenvolvimento Sustentável, conhecida como Rio +20, utilizou vários tipos de gráfico.

FIQUE CONECTADO

No capítulo “Construindo na areia”, do livro *A vida secreta dos números*, de George Szpiro (Difel), você vai ler sobre uma interessante relação entre Física e Matemática que aparece nas construções com areia na praia e nos engarrafamentos de trânsito das grandes cidades.



Fonte: UNDP; Ref. revista *Veja*, 13 jun. 2012, p. 96 e 97.



Fonte: Unep; Ref. revista *Veja*, 13 jun. 2012, p. 97.

Acima, em tamanho maior, está um **gráfico em linha ou curva**. Esse tipo de gráfico utiliza uma linha para ligar os pontos que representam os dados pesquisados. É muito utilizado na identificação de tendência de aumento ou diminuição dos valores numéricos de uma informação pesquisada ao longo de um período de tempo. Nele podemos observar que a população mundial vem crescendo, e que em 2010 ela era de 6,9 bilhões de pessoas. Os pontos que expressam o valor da população mundial a cada ano foram substituídos por pequenos **gráficos em setores**, que mostram o percentual da população mundial que residia na região urbana.

Ao lado, encontramos dois tipos de **gráficos em barras horizontais e verticais**. Nesses tipos de gráfico, representamos os dados por meio de retângulos verticais (colunas) ou horizontais (barras), que são utilizados para comparar diferentes variáveis ou diferentes valores de uma mesma variável.

No gráfico de barras horizontais, a variável é a expectativa de vida em 1992 e em 2010, no mundo e no Brasil. Já no gráfico de barras verticais, a variável é o índice de mortalidade infantil em 1000 nascimentos, comparando valores de 1992 com os de 2010, no mundo e no Brasil.

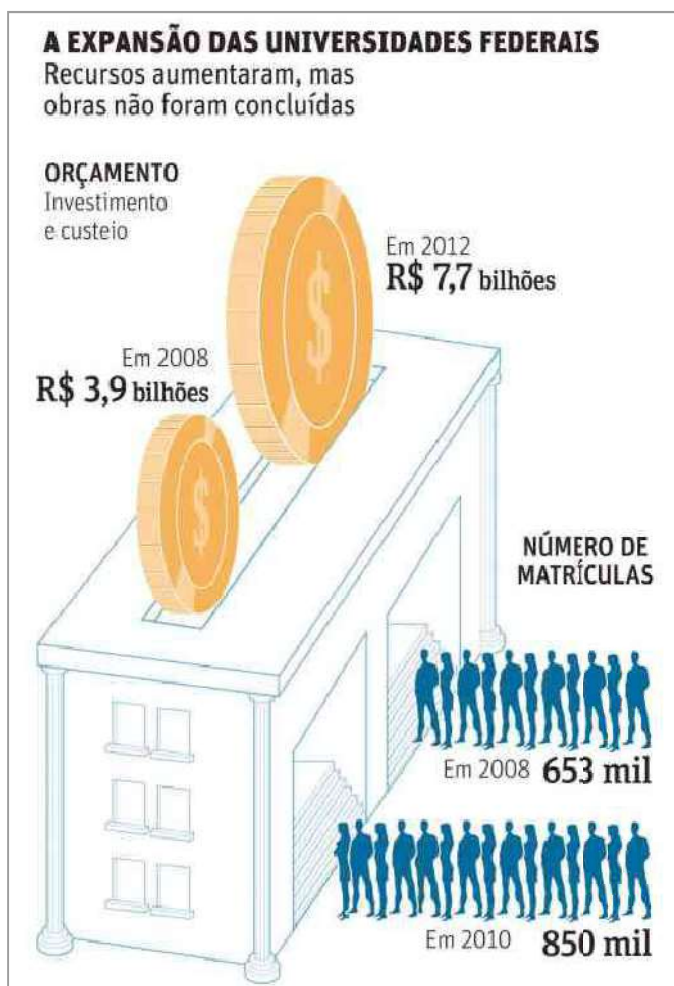
O gráfico apresentado na introdução deste capítulo é um **gráfico em barras múltiplas**. Para esse tipo de gráfico, é necessário criar uma **legenda** que diferencia uma barra da outra.

Há ainda os **gráficos pictóricos**, ou **pictogramas**, que utilizam desenhos relacionados ao tema da pesquisa para representar seus dados.

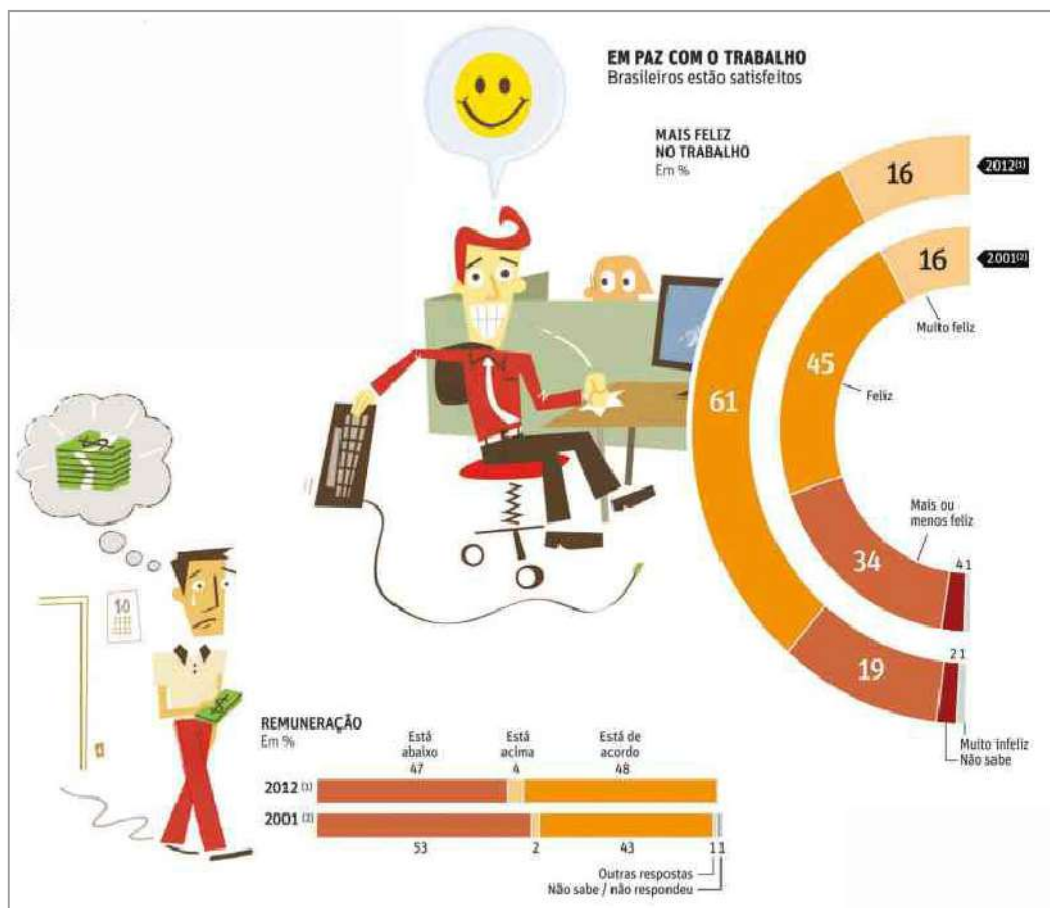
Observe também que os dados podem ser apresentados de duas formas distintas.

Em sua **frequência absoluta**, temos o número de vezes que um dado é observado. Esse é o caso do gráfico ao lado, em que o número de matrículas nas universidades federais em 2010 foi de 850 mil estudantes.

E em sua **frequência relativa**, temos a razão entre o número de vezes que o dado é observado e o total de elementos da população, geralmente na forma de percentual. Isso pode ser visto nos gráficos em setores com a população urbana mundial, que se encontram na página 29 e nos gráficos a seguir, que são variações de gráficos em barras e em setores.



Fonte: Folha de S.Paulo, 10 jul. 2012, p. C1.



Fonte: Folha de S.Paulo, 1º maio 2012, p. B1.

Nas atividades a seguir, você vai lembrar alguns dos conceitos de Estatística e refletir sobre eles para podermos avançar nos próximos tópicos.

Esta sequência de atividades explora: resolução de problemas com dados apresentados em gráficos e tabelas; utilização de informações expressas em gráficos para fazer inferências; análise de informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para construir argumentos.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



1. Faça o que se pede a seguir.

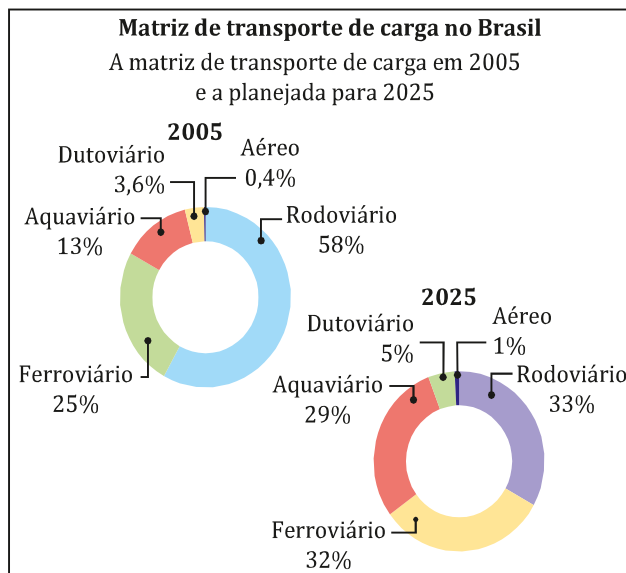
- Leia novamente o texto das páginas 29 e 30 e faça um esquema sobre o assunto abordado, destacando os tipos de gráfico e os elementos que são característicos de um gráfico.
- Em jornais e revistas, colete tabelas e diferentes gráficos, sendo, pelo menos, um gráfico de cada um dos tipos apresentados.
- Cole uma tabela no caderno e identifique elementos característicos como: título, cabeçalho, corpo, colunas indicadoras e fonte.
- Escolha um dos gráficos coletados e elabore perguntas que possam ser respondidas a partir dos dados representados por ele. Troque com um colega de classe o gráfico e as questões elaboradas. Você deve responder às perguntas dele e ele às suas. Depois, juntos, façam a conferência das respostas.
- Os demais gráficos e tabelas coletados por você podem ser utilizados para ilustrar o esquema solicitado no item a.

2. Classifique as variáveis a seguir em contínuas ou discretas.

- Um agricultor trata metade da sua plantação de laranjas com um tipo de adubo e a outra metade com outro tipo. Quando as laranjas amadurecem, faz a contagem para verificar qual dos dois adubos é mais eficaz.
- O jovem responsável pelo controle de produção da empresa em que trabalha está registrando o número de peças produzidas por hora em certa máquina.
- O responsável pelas vendas de um plano de saúde promoveu uma pesquisa perguntando a todos os moradores sobre a renda mensal.
- Durante uma pesquisa escolar, um garoto perguntou aos estudantes de sua escola: quantos irmãos você tem?
- A turma do 4º ano saiu a campo para entrevistar os estudantes do Ensino Médio, com o objetivo de conhecer a média de massa corpórea entre eles.

As atividades 3, 4, 5, 6, 8 e 9 foram elaboradas para você perceber como interpretar um gráfico, ou seja, como podemos obter informações a partir da leitura de um gráfico qualquer. Por isso, resolva cada uma delas com bastante atenção.

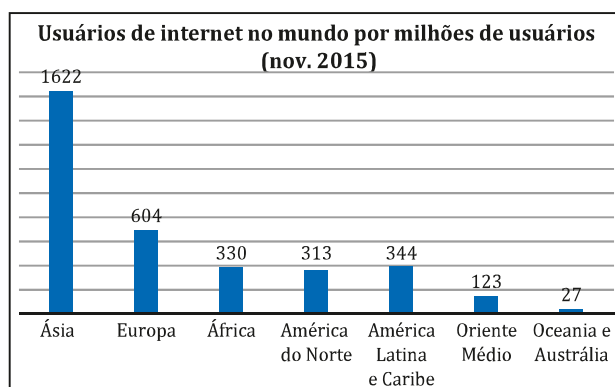
3. Observe os gráficos e responda às questões.



Fonte: Plano Nacional de Logística de Transportes, Ministério dos Transportes.

- De que tratam os gráficos?
- Qual é o título dos gráficos?
- Qual é a diferença percentual esperada em relação ao transporte rodoviário entre 2005 e 2025?
- Em 2005, o Brasil possuía 29314 quilômetros de ferrovias. Qual é o total da extensão dessa rede esperado para 2025?
- Faça um texto que fale sobre os gráficos e as conclusões que podem ser tiradas a partir deles.

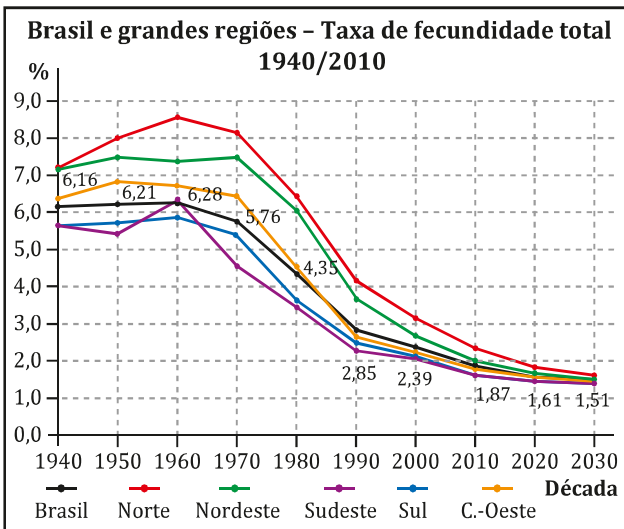
4. Responda às questões a partir do gráfico a seguir.



Fonte: Internet World States.

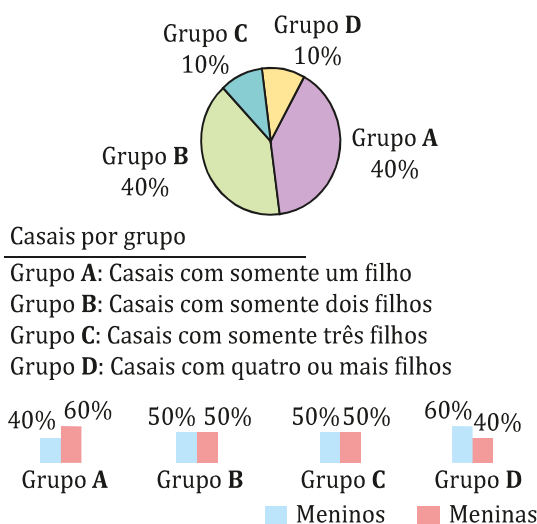
- Qual é o total de internautas conectados no mundo na data dessa pesquisa?
- Em novembro de 2015, 35% dos brasileiros estavam conectados à rede. Se a população brasileira nesse ano era de 204 milhões de pessoas, qual era o percentual de brasileiros conectados à internet no total mundial?

5. Leia o gráfico abaixo com valores estimados de acordo com pesquisa realizada nas grandes regiões do Brasil até 2010 e projetados estatisticamente a partir desse ano até 2030. Em seguida, responda às questões.



- a) O que significa o título do gráfico: “Taxa de fecundidade”?
- b) Em que década(s) a taxa de fecundidade da região sul foi ou será menor que a taxa de fecundidade da região sudeste?
- c) Qual é, aproximadamente, a diferença entre a taxa de fecundidade da região nordeste na década de 1940 e a na década de 2010?
- d) Em geral, podemos perceber uma queda da taxa de fecundidade no Brasil que, segundo a projeção, continuará até 2030. Discuta com a turma quais fatores contribuíram para essa queda.
6. (UFMG) Fez-se uma pesquisa com certo número de casais de uma comunidade. Esses casais foram divididos em quatro grupos, de acordo com a quantidade de filhos de cada um. Os resultados dessa pesquisa estão representados nestes gráficos:

Imagens: Zapit



Com base nas informações contidas nesses gráficos, identifique a afirmação INCORRETA. Justifique sua resposta.

- a) O total de filhos dos casais do grupo B é maior do que o total de filhos dos casais dos grupos A e C.
- b) Pelo menos 40% do total de filhos dos casais dos grupos A, B e C é constituído de meninos.
- c) Pelo menos a metade do total de filhos dos casais pesquisados é constituída de meninas.
- d) Mais da metade do total de filhos dos casais dos grupos A e B é constituída de meninas.
7. De acordo com informações contidas em jornais, uma família anotou o consumo mensal (em kWh) dos aparelhos elétricos que costuma usar diariamente, como consta na tabela.

Aparelho	Uso diário	Consumo em kWh
Chuveiro	40 minutos	100 kWh
Televisão	4 horas	10 kWh
Microcomputador	1 hora	28 kWh
Geladeira	24 horas	92 kWh
Ferro de passar	40 minutos	40 kWh
4 lâmpadas de 100 W	3 horas	27 kWh

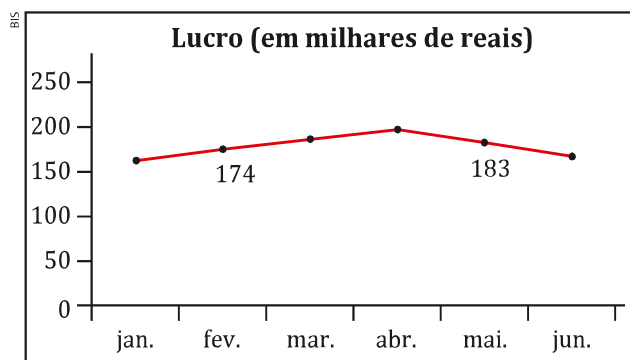
Sabendo que será cobrada uma sobretaxa em sua conta de luz se o consumo mensal for igual ou maior que 201 kWh, a família elaborou os três planos a seguir para modificar o uso diário dos seguintes aparelhos, mantendo inalterado o uso dos demais.

Plano	Chuveiro	Televisão	Microcomputador
A	40 minutos	2 horas	30 minutos
B	20 minutos	2 horas	zero
C	20 minutos	zero	30 minutos

Com base nessas informações, é correto afirmar que:

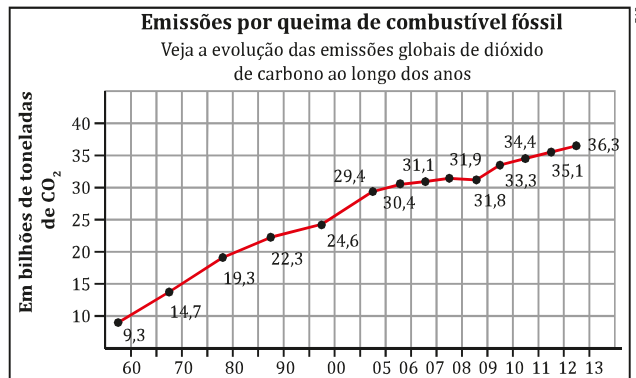
- a) adotando o plano A, não haverá sobretaxa na conta de luz da família.
- b) adotando o plano B, não haverá sobretaxa na conta de luz da família.
- c) adotando o plano C, não haverá sobretaxa na conta de luz da família.
- d) qualquer que seja o plano adotado, não haverá sobretaxa na conta de luz da família.
- e) qualquer que seja o plano adotado, haverá sobretaxa na conta de luz da família.

8. (UERN) O gráfico apresenta o lucro de uma empresa no decorrer do primeiro semestre de determinado ano:



Os economistas dessa empresa dividiram esse período em dois: primeiro período, de janeiro a abril, em que há um crescimento linear nos lucros; e segundo período, de abril a junho, em que há uma queda nos lucros de R\$ 15 mil ao mês. A partir dessas informações, é correto afirmar que o lucro obtido no mês de janeiro foi:

- a) R\$ 158 000,00 c) R\$ 164 000,00
b) R\$ 162 000,00 d) R\$ 168 000,00
9. (UFRGS) O gráfico a seguir apresenta a evolução da emissão de dióxido de carbono ao longo dos anos.



Fonte: CDIAC.
Disponível em: <<http://noticias.uol.com.br/meio-ambiente/ultimas-noticias/redacao/2013/12/27/em-busca-de-forca-emissoes-recorde-de-co2.html>>.
Acesso em: 25 set. 2014.

Com base nos dados do gráfico, assinale a alternativa correta.

- a) Ao longo do período considerado no gráfico, a emissão de dióxido de carbono apresentou crescimento constante.
b) Em relação ao ano de 1980, o ano de 1990 apresentou emissão de dióxido de carbono 30% maior.
c) O ano de 2009 apresentou menor valor de emissão de dióxido de carbono da primeira década do século XXI.
d) De 2000 a 2013, houve crescimento percentual de 11,7% na emissão de dióxido de carbono.
e) Em relação a 2000, o ano de 2013 apresentou emissão de dióxido de carbono aproximadamente 50% maior.

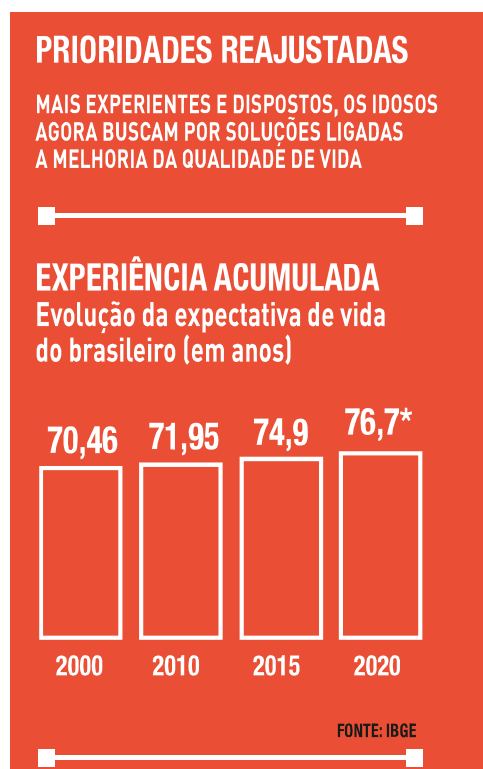
Essa é uma atividade mais complexa e pode demandar mais tempo para ser realizada. Sugerimos que os estudantes trabalhem em duplas, e que depois troquem os problemas propostos entre as duplas, para que uma analise o texto e resolva o problema produzido pela outra dupla.

INVENTE VOCÊ

REGISTRE
NO CADERNO



1. Elabore um problema que utilize as informações de um dos gráficos a seguir.



Disponível em: <<http://revistapegn.globo.com/Dia-a-dia/noticia/2015/10/como-criar-negocios-para-terceira-idade.html>>. Acesso em: 23 mar. 2016.



Até aqui, você deparou com diversas situações que envolveram gráficos expressando ideias matemáticas, mas em contextos bem diversos.

Ler esse tipo de texto é essencial e requer contato com os gráficos apresentados das mais diferentes maneiras.

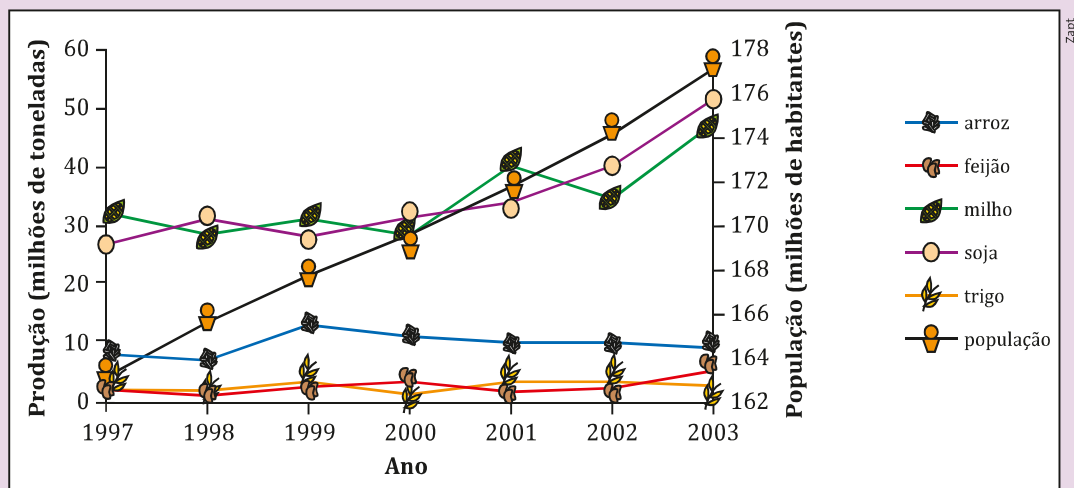
Nem sempre os eixos estão traçados e, muitas vezes, o texto traz mais informações do que as que são necessárias para a resolução de um problema. Selecionar as informações pertinentes para o que se quer responder é uma habilidade importante.

No problema a seguir, tudo isso será exigido para a resolução. Leia o texto, mas antes de resolver o problema:

- determine qual é a pergunta e certifique-se de tê-la entendido;
- selecione as informações necessárias para responder ao problema.

Em uma prova do Enem, foi publicado o gráfico a seguir, que representa a produção brasileira de grãos (arroz, feijão, milho, soja e trigo) e o crescimento populacional entre 1997 e 2003.

Responda então: em 2003, qual era a média aproximada de grãos por habitante brasileiro, em kg?



Fonte: IBGE.

Observe que esse não é um gráfico usual. Ele possui dois eixos verticais, cada um deles com uma informação diferente e unidades adequadas.

2 Dados organizados em classes

Algumas vezes, em uma pesquisa estatística, os dados assumem valores distintos uns dos outros, não sendo possível determinar uma tendência. Veja este exemplo.

Ao medir a altura dos estudantes de uma classe, obtivemos os seguintes dados organizados em ordem crescente, com valores em metros:

1,55; 1,57; 1,58; 1,59; 1,61; 1,61; 1,65; 1,65; 1,66; 1,66; 1,67; 1,67; 1,68; 1,69;
1,71; 1,71; 1,72; 1,75; 1,76; 1,77; 1,79; 1,80; 1,82; 1,83; 1,83; 1,85; 1,90; 1,92.

No caso de muitos dados dispersos, agrupamos os valores da variável em **classes**, ou seja, em intervalos com a mesma amplitude.

Nesse exemplo da altura dos estudantes, podemos organizar os dados em classes com amplitude de 10 cm e contar a quantidade de estudantes para cada intervalo de altura, como na tabela a seguir.

Classes das alturas em metros	Quantidade de estudantes
1,55 ┤ 1,65	6
1,65 ┤ 1,75	11
1,75 ┤ 1,85	8
1,85 ┤ 1,95	3

O símbolo ┤ usado na descrição de uma classe significa o intervalo de valores que inclui o limite inferior do intervalo e exclui o limite superior do intervalo. Por isso, a escrita $1,65 \text{ ┤ } 1,75 = [1,65; 1,75[= \{x \in \mathbb{R} \mid 1,65 \leq x < 1,75\}$.

Com essa organização, observa-se nessa classe uma tendência maior para estudantes com altura entre 1,65 m e 1,75 m.

Chamamos de **ponto médio de uma classe** o valor médio entre os extremos do intervalo de uma classe. No exemplo, o ponto médio da classe 1,65 m ┤ 1,75 m é $1,70 \text{ m} = \frac{1,65 + 1,75}{2} \text{ m}$. Conhecido o ponto médio de uma classe, podemos interpretá-lo como o valor que representa a classe.

É possível nesse caso dizer que a altura mais frequente da classe de estudantes é 1,70 m, representando a classe 1,65 m ┤ 1,75 m.

Podemos calcular para os dados agrupados em classes a frequência relativa de cada classe como a razão entre a frequência absoluta e o total de elementos da população pesquisada, escrita na forma de percentual.

No exemplo da classe com 28 estudantes, chamando de **f** a frequência absoluta e de **fr** a frequência relativa para cada classe, temos:

Classes das alturas em metros	Frequência absoluta (f)	Frequência relativa (fr)
1,55 ┤ 1,65	6	$\frac{6}{28} = 0,21428... \approx 21\%$
1,65 ┤ 1,75	11	39%
1,75 ┤ 1,85	8	29%
1,85 ┤ 1,95	3	11%

3 Representação gráfica de uma distribuição de frequências em classes

Proponha aos estudantes que leiam este texto antes ou durante a aula, para que você possa conduzir a conversa sobre um tema com o qual já tiveram uma primeira aproximação.

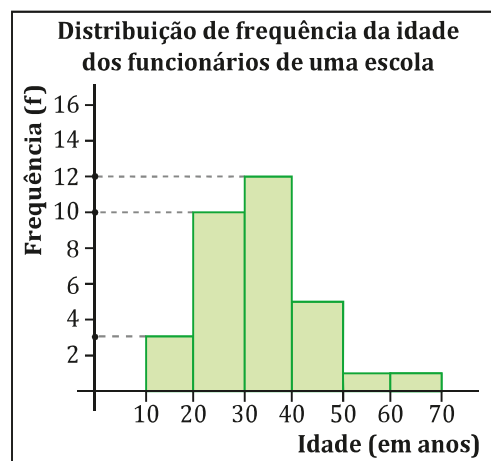
A representação da distribuição de frequências absoluta ou relativa é feita por meio do **histograma** ou **polígono de frequências**.

Observe ao lado o histograma da distribuição de frequência da idade dos funcionários de uma escola.

O histograma é um gráfico formado por um conjunto de retângulos construídos lado a lado, de modo que a área de cada retângulo seja igual à frequência da classe correspondente. As larguras das bases dos retângulos são iguais às amplitudes dos intervalos de classe e se localizam sobre o eixo horizontal. As alturas dos retângulos são proporcionais às frequências.

Na base superior de cada retângulo, podem ser colocadas as frequências relativas, para facilitar o entendimento do leitor.

O histograma é construído da seguinte forma: no eixo das abscissas, são anotados os limites das classes. É preciso determinar os valores das alturas dos retângulos.



Como a base do retângulo é igual à amplitude do intervalo de classe, e a área do retângulo é igual à frequência da classe **f**, chamando de **h** a altura do retângulo e de **a** a amplitude de cada intervalo, devemos ter:

$$f = a \cdot h, \text{ daí } h = \frac{f}{a}.$$

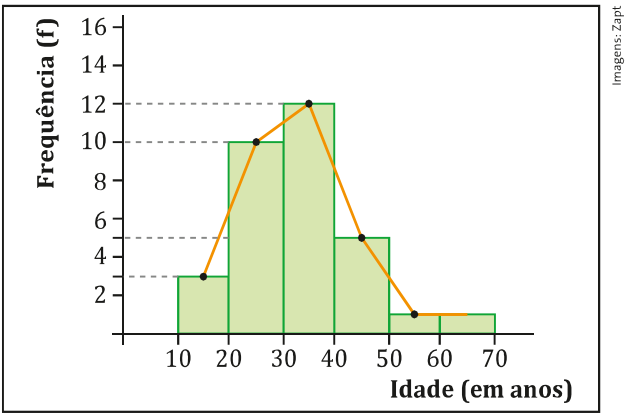
A altura de cada retângulo do histograma será dada pelo quociente entre a frequência e a amplitude do intervalo de classe.

Com essa forma de registrar as barras e suas dimensões, é possível concluir que a soma das áreas de todos os retângulos é numericamente igual à população da pesquisa. Observe que, de fato, a área de cada retângulo é $10 \times h = f$, e a soma de todos os valores de **f** é o total da população.

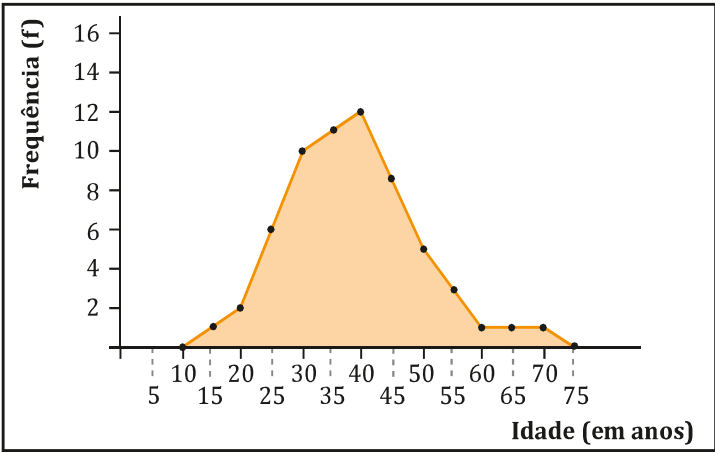
Retome a distribuição de frequências e o histograma da página anterior, copie a tabela abaixo no caderno e complete-a com os dados que faltam.

Idade dos funcionários (em anos)	Amplitude (a)	Número de funcionários ou frequência f	fr (%)	Altura ($h = \frac{f}{a}$)
10 – 20	10	3	9,4	0,3
20 – 30	10	10	31,3	1
30 – 40	10	12	37,5	1,2
40 – 50	10	5	15,6	0,5
50 – 60	10	1	3,1	0,1
60 – 70	10	1	3,1	0,1
Total		32	100	3,2

O **polígono de frequência** é um gráfico que pode ser construído a partir do histograma da seguinte maneira: com linhas retas, una os pontos médios das bases superiores dos retângulos do histograma. Veja:



Em seguida, una a figura obtida ao eixo das abscissas, em pontos equidistantes dos pontos médios. Se desejar, acrescente traços auxiliares, como mostra a figura a seguir.



No site <www.uff.br/cdme/> (acesso em: 10 mar. 2016) há muitos aplicativos interessantes que a equipe da Universidade Federal Fluminense (RJ) desenvolveu para explorar Estatística. Vale a pena analisar com os estudantes os seguintes aplicativos: Pesquisas estatísticas no dia a dia; Medidas de posição; Distribuições de frequências e seus gráficos.



10. Construa um histograma e um polígono de frequência para representar os dados da tabela a seguir.

Distribuição de 150 empresas segundo o número de empregados

Número de empregados	Número de empresas
0 – 20	12
20 – 40	15
40 – 60	45
60 – 80	46
80 – 100	32
Total	150

11. Durante 30 dias, contou-se o número de erros de impressão cometidos na primeira página de um jornal. Os resultados constam da lista a seguir:

5 8 9 4 8 17 42 26 32 21
7 6 8 19 32 29 17 23 22 21
22 27 12 16 17 12 11 8 4 12

- a) Represente os dados em classes por meio de uma tabela.
b) Calcule a frequência relativa.
c) Faça um histograma.

Para o item c da atividade 11, você pode organizar os dados em classes de 10 em 10 ou de 5 em 5. Escolha.

FIQUE CONECTADO

Acesse o *site* <www.cienciamao.usp.br> e selecione a seção vídeos sobre ciências. Escolha o tópico Novo Telecurso e assista à aula Média, Moda e Mediana encontrada no tópico Matemática do Ensino Fundamental. Isso vai ajudá-lo a compreender melhor alguns dos assuntos abordados neste capítulo a partir deste ponto.

4 Medidas de tendência central: moda, média e mediana

Sugerimos que seja feita uma revisão dos significados desses termos, caso a classe já os tenha estudado em anos anteriores.

Em certa cidade, os meses mais quentes do ano são janeiro e fevereiro. Nos quadros a seguir, estão indicadas as temperaturas médias nesses meses no período de 1981 a 2010:

Ano	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Jan.	22,0	22,0	22,5	22,0	21,5	22,0	23,5	22,5	22,5	22,5	23,0	21,5	22,5	22,0	21,0
Fev.	22,0	22,0	24,5	21,5	24,0	21,0	23,0	22,0	23,0	21,5	25,0	23,0	21,0	23,5	23,0

Ano	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Jan.	22,0	21,5	23,0	24,0	22,5	22,0	21,5	22,0	23,5	23,5	23,0	20,5	22,5	22,5	22,0
Fev.	22,5	22,0	22,5	23,5	21,5	21,0	22,0	23,5	22,5	23,5	23,5	21,0	22,5	23,0	23,5

Quais são as frequências absolutas dos valores da variável temperatura média nos meses de janeiro e fevereiro?

Quais são as frequências relativas?

Vamos calcular as frequências e organizá-las em uma nova tabela, abaixo.

Como podemos interpretar os dados que acabamos de organizar?

Que valores são característicos do fenômeno que estamos analisando, isto é, que valores nos dão a melhor ideia de como a variável se distribui, sem a necessidade de lermos todos os dados estatísticos?

Obter respostas para essas perguntas pode ser muito importante, principalmente quando trabalhamos com populações de grandes dimensões, não só porque alguns valores caracterizam razoavelmente o fenômeno, mas também porque assim podemos comparar esse fenômeno em populações diferentes.

Qual foi a temperatura mais frequente?

Qual foi a temperatura média desse período?

A temperatura mais frequente foi 22 °C e sua frequência foi 14. Dizemos que 22 é a **moda (Mo)** das temperaturas, ou seja, é o valor que mais vezes se verificou.

A função do cálculo na moda de um conjunto de dados é obter uma forte tendência no conjunto de dados. Um conjunto de dados pode não ter moda.

A temperatura média desse período é obtida calculando-se a **média aritmética (\bar{X})** das temperaturas. Para isso, somamos todos os valores e dividimos por 60, que é o número de meses considerados.

Para simplificar os cálculos, em vez de fazer uma adição de 60 parcelas, podemos somar todos os produtos de cada valor de temperatura pela respectiva frequência absoluta e dividir essa soma pelo total **N** de dados.

$$\bar{X} = \frac{20,5 + 21 \cdot 5 + 21,5 \cdot 7 + 22 \cdot 14 + 22,5 \cdot 12 + 23 \cdot 8 + 23,5 \cdot 9 + 24 \cdot 2 + 24,5 + 25}{60}$$

$$\bar{X} = \frac{1347}{60} \Rightarrow \bar{X} = 22,45$$

Utilizamos a média para observar o valor em torno do qual os dados se distribuem. Ela é mais representativa quanto menor for a variação dos dados.

A **moda** e a **média aritmética** são duas **medidas de tendência central**. As medidas de tendência central recebem esse nome porque são valores em torno dos quais os dados observados tendem a se agrupar. Assim, por meio dessas medidas, podemos caracterizar o fenômeno pesquisado e compará-lo em diferentes populações.

No exemplo, a temperatura mais frequente foi 22 °C e a média das temperaturas, 22,45 °C.

Além da média aritmética e da moda, outra medida de tendência central que podemos calcular para um conjunto de dados é a **mediana (Me)**.

A mediana de um conjunto de valores, dispostos em ordem crescente, é o valor situado no meio desse conjunto e que o separa em dois subconjuntos com aproximadamente o mesmo número de elementos.

Temperaturas em jan./fev. – Frequências simples

Temp. (°C)	Freq. absoluta	Freq. relativa	Freq. relat. (%)
20,5	1	0,017	1,7
21,0	5	0,083	8,3
21,5	7	0,117	11,7
22,0	14	0,233	23,3
22,5	12	0,200	20,0
23,0	8	0,133	13,3
23,5	9	0,150	15,0
24,0	2	0,033	3,3
24,5	1	0,017	1,7
25,0	1	0,017	1,7
Total	60	1,000	100,0

Por exemplo: a quantidade de gols marcados por um time em dez partidas de um campeonato foi 3, 2, 1, 0, 4, 1, 0, 1, 2, 2. Colocando esses valores em ordem crescente, temos: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4.

Os valores do centro dessa sequência são dois: 1 e 2. Nesse caso, a mediana dos gols é $\frac{1+2}{2} = 1,5$. Já, se considerarmos apenas as cinco últimas partidas, a mediana dos gols é 2: 2, 2, 2, 3, 4

↑

Resumindo:

A mediana de uma sequência de n números em ordem crescente é:

- o número que estiver na posição central, se n for ímpar;
- a média aritmética dos dois números que ocuparem o centro da sequência, se n for par.

No exemplo das temperaturas, apresentado na tabela da página 37, como os valores já estão em ordem crescente, basta observar as frequências absolutas e localizar os elementos centrais de 1 a 60, que são 30 e 31.

Nas posições 30 e 31, a temperatura é a mesma: 22,5 °C. Ou seja, nos 60 meses observados, em aproximadamente 30 deles as temperaturas ficaram abaixo de 22,5 °C e, nos outros 30 meses, as temperaturas foram superiores a esse valor mediano.

Uma das funções mais importantes da mediana é auxiliar a entender por que a média sofre variações acentuadas, considerando que uma discrepância na mediana interfere na média fazendo com que ela aumente ou diminua muito.

Moda, média e mediana de dados agrupados em classes

Para dados em classes, utilizamos os valores médios de cada classe para obter as medidas de tendência central. Observe o exemplo.

As massas de 100 indivíduos do sexo masculino foram registradas na tabela ao lado.

Para calcular a média aritmética, devemos somar todos os produtos dos pontos médios das classes por suas respectivas frequências absolutas e dividir o resultado pela soma das frequências.

$$\bar{X} = \frac{57,5 \cdot 5 + 62,5 \cdot 12 + 67,5 \cdot 19 + 72,5 \cdot 25 + 77,5 \cdot 20 + 82,5 \cdot 10 + 87,5 \cdot 7 + 92,5 \cdot 2}{100}$$

$$\bar{X} = 73,05 \approx 73 \Rightarrow \bar{X} \approx 73 \text{ kg}$$

Para calcular a moda desse conjunto de dados, procuramos a classe com a maior frequência absoluta. Ela será a **classe modal**. Nesse caso, a classe modal é 70 + 75.

A seguir, encontramos o ponto médio da classe modal: $\frac{70+75}{2} = 72,5$; portanto, 72,5 kg é a moda procurada.

Já a mediana dos 100 valores é a média das massas nas posições 50 e 51, dos dados em ordem crescente. Isso acontece na classe 70 + 75 cujo ponto médio é 72,5 kg; daí a mediana das massas desses indivíduos ser 72,5 kg.

Isso significa que deve haver 50 indivíduos com massa inferior ou igual a 72,5 kg e outros 50 indivíduos com massa superior ou igual a 72,5 kg.

Massa (kg)	f_i
55 + 60	5
60 + 65	12
65 + 70	19
70 + 75	25
75 + 80	20
80 + 85	10
85 + 90	7
90 + 95	2

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

- R1.** O número de atendimentos de um grupo de bombeiros, durante um ano, está anotado na tabela a seguir.

Nº de atendimentos diários	Frequência (em dias)
0	84
1	105
2	72
3	59
4	28
5	15
6	2

- Calcule a frequência relativa, completando a tabela.
- Qual é a média desses atendimentos em uma semana?
- Qual é a moda e a mediana desse conjunto de dados?
- Ao longo de uma semana, os bombeiros fizeram 12 atendimentos. Essa foi uma semana “média”?

Resolução

a)

Nº de atendimentos diários	f_i	fr (%)
0	84	23,0
1	105	28,8
2	72	19,7
3	59	16,2
4	28	7,7
5	15	4,1
6	2	0,5
Total	365	100,0

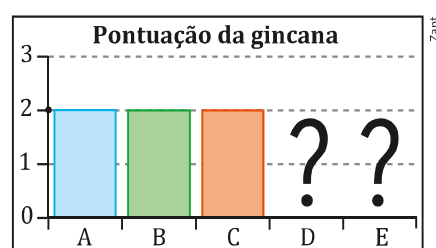
- b) A média semanal é dada por 7 vezes a média diária:
- $$7 \cdot \frac{(84 \cdot 0 + 105 \cdot 1 + 72 \cdot 2 + 59 \cdot 3 + 28 \cdot 4 + 15 \cdot 5 + 2 \cdot 6)}{365} = \frac{4375}{365} \approx 12; \text{ ou seja, aproximadamente 12 atendimentos.}$$

- c) A moda desse conjunto de dados é 1, porque é o número de atendimentos diários que ocorreu mais frequentemente: 105 vezes. A mediana também é 1 porque é o valor que corresponde às posições 182 e 183, posições centrais dos 365 dias de observação.

d) Sim.

- R2.** (Enem-MEC) Cinco equipes, A, B, C, D e E, disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos. As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir; entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe D e da equipe E.

Mesmo sem aparecer as notas das equipes D e E, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente:



- 1,5 e 2,0.
- 2,0 e 1,5.
- 2,0 e 2,0.
- 2,0 e 3,0.
- 3,0 e 2,0.

Resolução

As pontuações das equipes D e E são valores entre os mínimos: 0, 1, 2 ou 3; mas como a média é 2 pontos e as equipes A, B e C fizeram 2 pontos, a média de D e E não pode ser diferente de 2. Logo, os valores de D e E podem ser: 2 e 2 ou 1 e 3. Em qualquer dos casos a moda será 2 pontos e a mediana também.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



- 12.** Volte aos dados sobre a idade dos funcionários da escola no início do tópico 3. Calcule a média, a moda e a mediana das idades desses funcionários.
- 13.** Em uma cidade, foi feita uma pesquisa sobre a faixa salarial mensal (em salários mínimos) dos trabalhadores. Os dados recolhidos estão expressos na tabela a seguir:

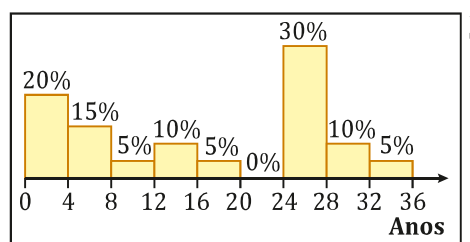
Distribuição da remuneração mensal

Faixa salarial (em salários mínimos)	Número de trabalhadores	%
Até 3 salários	11770 000	67,1
De 3 a 7 salários	3931 000	22,4
De 7 a 15 salários	1355 000	7,7
Mais de 15 salários	483 000	2,8
Total	17539 000	100,0

Indique as faixas:

- do salário mediano.
- da média aritmética dos salários.
- da moda dessa distribuição.

- 14.** No histograma a seguir, estão representadas as idades de um grupo de pessoas.



Com base nos dados do gráfico, responda às questões.

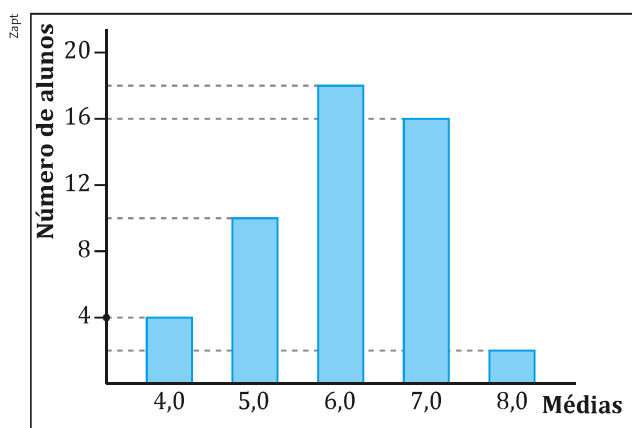
- Qual é a média das idades?
- Qual é o percentual total de pessoas com mais de 16 anos?

15. (UFPB) A Secretaria de Trabalho e Ação Social de certa cidade fez uma pesquisa com um grupo de desempregados com o objetivo de avaliar as relações entre nível de escolaridade e respectivas faixas etárias, obtendo os resultados da tabela a seguir.

Nível de escolaridade	Número de desempregados (separados por faixa etária)			
	18 a 21 anos	22 a 25 anos	26 a 30 anos	acima de 30 anos
Analfabeto	10	9	13	23
Fundamental incompleto	6	9	11	14
Fundamental completo	4	8	12	16
Médio incompleto	3	5	7	10
Médio completo	5	4	4	2
Superior incompleto	2	3	5	5
Superior completo	0	2	3	5

Com base nos dados da tabela, identifique as afirmativas corretas:

- A pesquisa foi realizada com 200 desempregados.
 - 35% dos desempregados tinham idade inferior a 26 anos.
 - 15% dos desempregados tinham nível de escolaridade acima do Ensino Médio completo.
 - 45 desempregados eram analfabetos e tinham idade acima de 21 anos.
 - 85% dos desempregados tinham nível de escolaridade não superior ao Ensino Médio completo.
16. (Enem-MEC) Considere que as médias finais dos alunos de um curso foram representadas no gráfico a seguir. Sabendo que a média para aprovação nesse curso era maior ou igual a 6,0, qual foi a porcentagem de alunos aprovados?



- 18%
 - 21%
 - 36%
 - 50%
 - 72%
17. Na turma de Matemática, formada por 25 moças e 5 rapazes, a média aritmética das notas do primeiro trimestre é igual a 7. Identifique a(s) pergunta(s) que pode(m) ser respondida(s) a partir dessas informações e resolva a questão.

- Qual é a média aritmética das notas dos rapazes?
- Qual é a média aritmética das notas das moças?
- Qual é a média aritmética das notas das moças, sabendo que a média aritmética das notas dos rapazes é igual a 6?
- Qual é a média aritmética dessa classe, nesse bimestre?

18. Um professor de Matemática do Ensino Médio, após a correção das provas de suas turmas, costuma organizar uma tabela, contendo a porcentagem de acertos em cada questão. Veja o que aconteceu na última prova.

Questão	1	2	3	4	5	6	7	8
% de acerto	40	35	70	90	60	20	45	40

O professor atribuiu apenas as notas 0 ou 1,5, respectivamente, a cada questão errada ou certa. Calcule a média das notas da prova.

19. Analise a tabela de distribuição dos salários mensais de uma empresa V.

Distribuição dos salários mensais

Faixa salarial (em salários mínimos)	Número de funcionários	%
Até 4 salários	328	62,6
De 4 a 7 salários	104	19,8
De 7 a 12 salários	69	13,2
Mais de 12 salários	23	4,4
Total	524	100,0

Com base nos dados analisados, indique o salário mediano e a moda da distribuição.

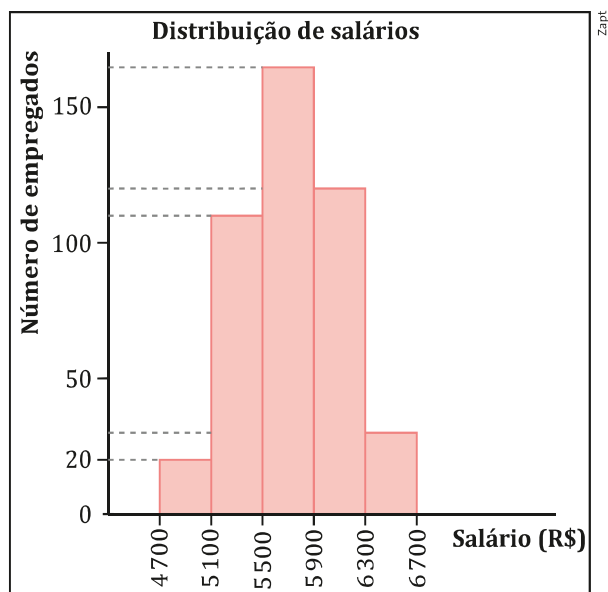
20. Resolva o que é proposto a seguir.
- Sabendo que a média aritmética de cinco números naturais distintos é 24, o maior valor que um desses números naturais pode assumir é:
 - 24.
 - 30.
 - 60.
 - 114.
 - 120.
 - Quais das alternativas apresentadas no item I são absurdas? Por quê?
21. Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

Número obtido	Frequência
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, a mediana e a moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente:

- 3, 2 e 1.
- 3, 3 e 1.
- 3, 4 e 2.
- 5, 4 e 2.
- 6, 2 e 4.

22. O histograma abaixo corresponde à distribuição de salários de uma grande empresa.



- a) Construa uma tabela de frequências absolutas para os salários.
b) Faça uma estimativa do número de entrevistados que recebem menos de R\$ 5 500,00.
c) Calcule a média, a moda e a mediana dos salários dessa empresa.
23. Em uma prova com 100 testes em que é necessário obter 60% de acertos para ser aprovado, os resultados de uma turma com 14 estudantes foram os seguintes:

Antônio	48	Hélia	48
Berta	45	Inês	45
Carla	45	Jorge	48
Daniel	98	Luísa	85
Ester	45	Maria	53
Fernando	46	Neusa	73
Gina	78	Paulo	28

- a) Quais são a média, a moda e a mediana dos resultados dessa turma?
b) Escreva um texto no caderno comparando os resultados da turma com o percentual necessário para aprovação.

24. As alturas dos 40 estudantes de uma classe estão indicadas na tabela a seguir.

Altura (cm)	Ponto médio	f	fr (%)
146 - 150			10
150 - 154		7	
154 - 158			25
158 - 162			12,5
162 - 166	164		
166 - 170			15

- a) Copie e complete a tabela com os dados que faltam.
b) Construa o polígono de frequência dessa tabela.
c) Quantos estudantes têm altura até 1,62 m? E até 1,70 m?
d) Calcule a média, a moda e a mediana das alturas dos 40 estudantes.

25. Os diretores de uma empresa têm sob sua responsabilidade um certo número de funcionários de acordo com a tabela a seguir.

Diretor	Funcionários sob sua responsabilidade
A	54
B	42
C	60
D	48
E	180

- a) Qual é a média \bar{X} de funcionários para cada diretor dessa empresa?
b) É possível afirmar que a maioria dos diretores se responsabiliza por \bar{X} funcionários? Quantos diretores discordarão dessa afirmação?
c) Por que a média não é representativa nesse caso? O que você mudaria na situação para que ela passasse a ser?

PARA COMPLEMENTAR

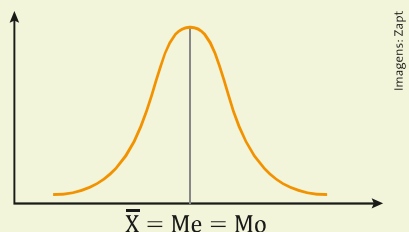
Curvas de frequência e medidas de tendência central

Vimos que, em geral, os dados coletados em uma pesquisa estatística pertencem a uma amostra extraída de uma população. Imagine uma amostra tornando-se cada vez mais abrangente e sendo agrupada em classes com amplitude cada vez menor. Se construíssemos o polígono de frequências dessa distribuição, a linha poligonal que formaria esse polígono tenderia a se tornar uma **curva de frequência**.

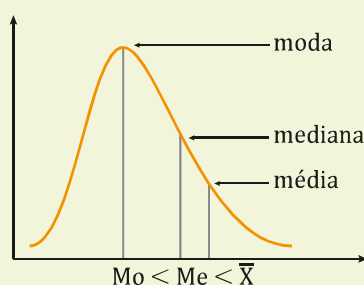
A curva de frequência permite mostrar de modo mais evidente a verdadeira natureza da distribuição da população e dá uma imagem da **tendência** dos fenômenos estudados. Uma das formas mais conhecidas que uma curva de frequência pode assumir é a de **sino**.

As curvas em forma de sino caracterizam-se por apresentar um valor máximo na região central. Nas curvas de frequência, é possível identificar os valores que correspondem, no eixo das abscissas, às medidas de tendência central.

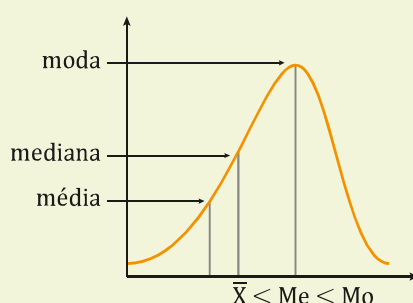
- Se a curva da distribuição de frequências é **simétrica**, a média, a mediana e a moda coincidem em um mesmo ponto. Nesse caso, a curva de frequência é denominada **curva em forma de sino**.



- Caso a curva seja **assimétrica positiva** (alongada à direita), as medidas de tendência central apresentarão esta disposição:



- Já para uma curva **assimétrica negativa** (alongada à esquerda), temos esta representação gráfica:



Nos três casos, a mediana, como o próprio nome sugere, está sempre entre o valor da média e o da moda.

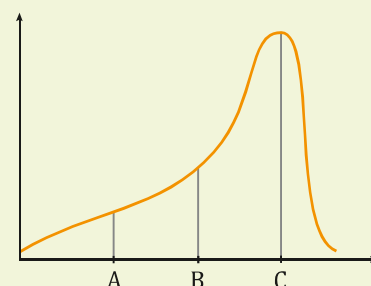
Para finalizar, é importante salientar que a média aritmética sofre a influência de **todos** os dados. Por isso, é preferível, às vezes, trabalhar com a mediana, que não sofre a influência de valores extremos (muito altos ou muito baixos). Por exemplo, em uma pesquisa salarial, a mediana tende a refletir melhor a realidade observada, principalmente quando há uma diferença muito significativa entre a maior e a menor faixa salarial verificada.

■ ATIVIDADE

REGISTRE
NO CADERNO



1. Vamos ver se tudo isso ficou claro. Observe no gráfico ao lado a curva de frequência, ou distribuição. Analise cada uma das afirmações e explique por que elas são falsas ou verdadeiras.
 - a) C é a moda, por ser o valor com maior frequência absoluta.
 - b) B é a média e A a mediana, pois a mediana é mais afetada do que a média pelos valores extremos.
 - c) C é a média, por ser o valor mais representativo da distribuição.
 - d) Por meio da figura não é possível obter informações para analisar as afirmações anteriores.



5 Medidas de dispersão: variância e desvio padrão

“Se uma pessoa comeu dois frangos e outra não comeu nenhum, em média cada uma comeu um frango.”

Essa frase, que tem relação com a Estatística, não agradaria muito àquele que ficou com fome.

Dependendo da situação, no cálculo da média, há sempre alguma informação que se perde. A média, apesar de ser uma medida muito utilizada em Estatística, é muitas vezes insuficiente para caracterizar aceitavelmente uma distribuição. A moda e a mediana também são medidas que não informam muito sobre como as variáveis se alteram.

Por isso, foi preciso encontrar outro indicador que informasse a maneira como os dados se distribuem em volta da média.

Acompanhe atentamente o exemplo a seguir.

Em uma escola há três turmas em que a média de idades é precisamente 16 anos.

A distribuição das idades dos estudantes dessas turmas é:

Turma A		Turma B		Turma C	
Idade	Número de estudantes	Idade	Número de estudantes	Idade	Número de estudantes
15	3	14	3	14	7
16	15	15	7	15	6
17	3	16	1	16	1
		17	7	17	2
		18	3	18	1
				19	0
				20	4

Observando as distribuições, percebemos logo diferenças muito grandes nas idades, apesar de as médias serem iguais. Na turma **C**, só há oito estudantes com idade superior ou igual a 16 anos, enquanto na **A** há dezoito e na **B**, onze. Isso acontece porque a distribuição das idades dos estudantes em cada turma é muito diferente.

Será possível conseguir um indicador numérico que informe a existência dessas diferenças? Isto é, como podemos medir essa disparidade entre as distribuições?

Vemos que a amplitude das idades em cada turma também é distinta. Na turma **A** é 2, na **B** é 4 e na **C** é 6. Contudo, essa informação não nos diz nada sobre a distribuição das idades.

Há duas medidas estatísticas, a **variância** e o **desvio padrão**, que são utilizadas sempre que a média é insuficiente para comparar duas distribuições. Essas medidas nos informam a maior ou menor **dispersão dos dados em torno da média**.

Para obter essas **medidas de dispersão**, partimos da diferença que cada valor tem em relação à média. Essa diferença chamamos de **desvio**.

Vamos entender isso a partir do exemplo das turmas **A**, **B** e **C**.

Nas três turmas, $\bar{X} = 16$ anos. O desvio de um dado em relação à média \bar{X} é a diferença entre o valor do dado e \bar{X} . A variância é a média dos quadrados dos desvios.

Na turma **A**, temos:

Turma A			
Idade	Desvio	(Desvio) ²	Número de estudantes
15	$15 - 16 = -1$	1	3
16	$16 - 16 = 0$	0	15
17	$17 - 16 = 1$	1	3

Assim, o desvio -1 aparece na distribuição dos estudantes 3 vezes, o desvio 0 aparece 15 vezes e o desvio 1, 3 vezes.

A variância **V** é a média dos quadrados dos desvios:

$$V = \frac{3 \cdot 1 + 15 \cdot 0 + 3 \cdot 1}{21} = \frac{6}{21} \approx 0,29$$

Finalmente, o desvio padrão é definido como a raiz quadrada da variância e representado por DP ou pela letra grega σ (sigma).

$$DP = \sqrt{V}$$

No exemplo: $DP = \sqrt{0,29} \approx 0,54$

Nas turmas **B** e **C**, temos:

Turma B

Idade	Desvio	(Desvio) ²	Número de estudantes
14	-2	$(-2)^2 = 4$	3
15	-1	$(-1)^2 = 1$	7
16	0	$0^2 = 0$	1
17	1	$1^2 = 1$	7
18	2	$2^2 = 4$	3

$$V = \frac{3 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 4}{21} = \frac{12 + 7 + 0 + 7 + 12}{21} = \frac{38}{21} \approx 1,81$$

$$DP = \sqrt{1,81} \approx 1,35$$

Turma C

Idade	Desvio	(Desvio) ²	Número de estudantes
14	-2	$(-2)^2 = 4$	7
15	-1	$(-1)^2 = 1$	6
16	0	$0^2 = 0$	1
17	1	$1^2 = 1$	2
18	2	$2^2 = 4$	1
19	3	$3^2 = 9$	0
20	4	$4^2 = 16$	4

$$V = \frac{7 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 16}{21}$$

$$V = \frac{28 + 6 + 0 + 2 + 4 + 0 + 64}{21} = \frac{104}{21} \approx 4,95$$

$$DP = \sqrt{4,95} \approx 2,22$$

Podemos organizar o quadro ao lado para analisar as três turmas.

Como podemos observar, as variâncias e os desvios são muito diferentes. A turma que mais se aproxima da média é a turma **A**, pois apresenta o menor desvio, enquanto o maior desvio aparece na turma **C**.

O significado de **desvio** em Estatística é o mesmo que atribuímos a esse termo na linguagem comum. Quando dizemos, por exemplo, que um navio se desviou de sua rota, isso significa que havia um percurso a ser seguido e o navio se afastou dele. Em Estatística, considerando a média aritmética como referência, ela deveria ser o valor provável para todos os dados, mas parte deles se desvia da média.

Para chegar ao desvio padrão, extrai-se a raiz quadrada da média dos quadrados dos desvios. Essa é uma forma de medir os desvios dos dados em relação à média, independentemente de os dados serem maiores ou menores que a média \bar{X} .

	Variância	Desvio padrão
Turma A	0,29	0,54
Turma B	1,81	1,35
Turma C	4,95	2,22

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

- R3.** A tabela abaixo mostra as notas dos estudantes de uma classe de Ensino Médio em uma disciplina.

Nota	f
0 – 2,0	3
2,0 – 4,0	9
4,0 – 6,0	16
6,0 – 8,0	8
8,0 – 10,0	4
Total	40

Calcule:

- a média aritmética desses dados.
- a variância.
- o desvio padrão.

Resolução

- a)** Para calcular \bar{X} , precisamos inicialmente encontrar os pontos médios (P_m) das classes.

Nota	f	P_m
0 – 2,0	3	1,0
2,0 – 4,0	9	3,0
4,0 – 6,0	16	5,0
6,0 – 8,0	8	7,0
8,0 – 10,0	4	9,0

$$\bar{X} = \frac{3 \cdot 1 + 9 \cdot 3 + 16 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 4 \cdot 9}{40} = \frac{202}{40} \approx 5,0$$

- b)** Para calcular a variância, devemos primeiramente calcular o desvio, fazendo $d = P_m - \bar{X}$.

$$1 - 5 = -4 \quad 3 - 5 = 0 \quad 5 - 5 = 0$$

$$3 - 5 = -2 \quad 7 - 5 = 2$$

A variância então será dada por:

$$V = \frac{3 \cdot (-4)^2 + 9 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot 0^2 + 8 \cdot 2^2 + 4 \cdot 4^2}{40} = \frac{180}{40} = 4,5$$

- c)** O desvio padrão é $DP = \sqrt{4,5} \approx 2,1$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



- 26.** O comitê de esportes de uma cidade necessita selecionar uma equipe para uma competição. O coordenador tem dúvidas sobre o atleta que deve representar a cidade nos 400 metros rasos. Ele resolveu analisar as marcas de dois atletas nas últimas competições e organizou as informações com os tempos dados em décimos de segundo.

Atleta A: 464; 467; 469; 474; 476

Atleta B: 467; 469; 472; 473

- Calcule a média e a mediana das marcas de cada atleta. Considerando apenas esses dados, qual atleta o coordenador deve escolher?
- Qual dos atletas tem maior chance de conseguir uma boa marca na competição?
- A média é suficiente para apreciar as diferenças entre os atletas?

- 27.** Ainda em relação à atividade anterior, responda às questões.

- Qual a diferença entre a melhor e a pior marca do atleta A?
- E do atleta B?
- A amplitude das marcas de cada um pode auxiliar a tomada de decisão do coordenador? Por quê?

- 28.** Considere as notas de quatro estudantes em quatro testes, sabendo que 20 é a nota máxima em cada teste.

	T1	T2	T3	T4
Estudante A	10	10	10	10
Estudante B	8	12	8	12
Estudante C	0	8	12	20
Estudante D	0	0	20	20

- Calcule a média de cada um deles.
- Calcule a amplitude, a variância e o desvio padrão das notas de cada um deles.
- Compare os valores obtidos. O que você conclui?

- 29.** Construa duas amostras fictícias de dados que tenham a mesma frequência total, mas amplitudes diferentes. Para cada uma delas, calcule o desvio padrão.

- 30.** Calcule a média aritmética e o desvio padrão dos dados a seguir.

a) 4, 4, 6, 6

b) 3, 3, 7, 7

- 31.** Estime a média aritmética e o desvio padrão destes dados: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 7, 7, 8, 8.

Confirme a sua previsão calculando esses valores.

- 32.** Em uma turma de 18 estudantes, os acertos de cada uma das 8 alunas em um teste de Matemática foram:

2 6 10 10 14 16 18 20

- Calcule a média e o desvio padrão dessa distribuição.
- As notas dos 10 estudantes dessa turma na mesma prova constituem uma distribuição com a mesma média e com desvio padrão 2. Que comparação pode-se fazer entre as duas distribuições?
- Construa uma distribuição possível para as notas de todos os estudantes dessa turma na referida prova.

- 33.** Compare, utilizando a média e o desvio padrão, as distribuições das alturas dos estudantes de uma turma de 2º ano do Ensino Médio em função do sexo.

Moças	Rapazes
1,63	1,83
1,64	1,83
1,63	1,79
1,63	1,84
1,65	1,75
1,71	1,77
1,57	1,70
1,65	1,74
1,52	1,72
	1,72
	1,72
	1,90
	1,82

- 34.** Na tabela, são dados os “pesos” de dez casais.

“Peso”, em kg, de cada elemento de um casal

Marido	Esposa
83	60
74	57
66	71
64	49
92	62
56	58
77	57
60	54
79	65
65	65

- Calcule o desvio padrão de cada uma das distribuições. Em qual dos grupos há maior dispersão de “pesos”?
- Em cada grupo, separe a variável em classes e construa um polígono de frequências.
- Qual conjunto de dados é mais homogêneo? Por quê?

- 35.** Ao pesquisar os “pesos” dos estudantes do 6º ano A, um professor obteve os resultados a seguir.

38 40 45 42 45 40
 43 38 45 45 40 41
 41 38 46 32 48 46
 42 43 44 50 38 40

- Organize esses dados em uma tabela de classes de amplitude 4 kg.
- Qual é a média e a variância dessa distribuição?
- Qual é o desvio padrão?

- 36.** (UFBA) No dia do aniversário de sua fundação, uma empresa premiou cinco clientes que aniversariavam nesse mesmo dia, todos nascidos no século XX. Observou-se que as idades dos premiados, expressas em anos, eram todas distintas e que a diferença entre duas idades consecutivas era a mesma.

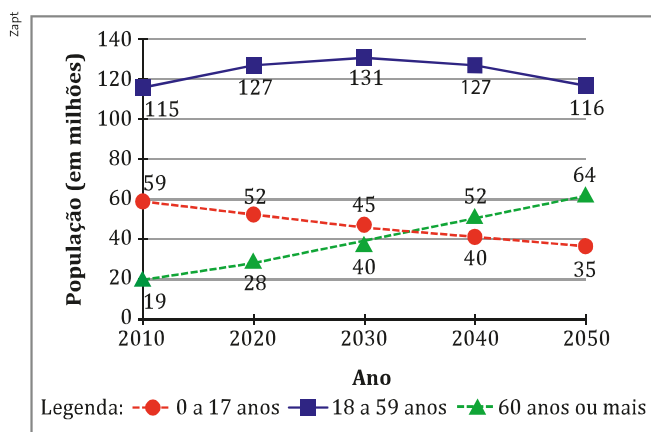
Com base nessas informações, sobre as idades dos premiados na data da entrega do prêmio, realizada em março de 1999, pode-se afirmar:

- Organizadas na ordem crescente ou na ordem decrescente, formam uma progressão aritmética.
- A média e a mediana são iguais.
- Se a diferença entre duas idades consecutivas é um número ímpar, então três das idades são números pares.
- Se a diferença entre duas idades consecutivas é igual a 2, então o desvio padrão é igual a $2\sqrt{2}$.
- Se a idade de um dos premiados, na entrega do prêmio, é igual a oito vezes a dezena do ano de seu nascimento, então essa dezena é um número primo.
- É possível que todas as idades sejam números primos menores que 21.

- 37.** (UFPI) Um professor da disciplina Cálculo I da UFPI observou que a média das notas da turma estava baixa, por isso resolveu aumentar em 1,0 (um) ponto cada nota dos seus alunos. O que se pode afirmar sobre a nova média e o novo desvio padrão dessa turma?

- a) A média e o desvio padrão permaneceram inalterados.
- b) Não houve alteração na média, porém o desvio padrão se alterou em 1,0 (um) ponto.
- c) A média se alterou em 1,0 (um) ponto e não houve alteração no desvio padrão.
- d) Nada se pode afirmar, pois não se sabe o número de alunos da turma.
- e) Ambos se alteraram em 1,0 (um) ponto.

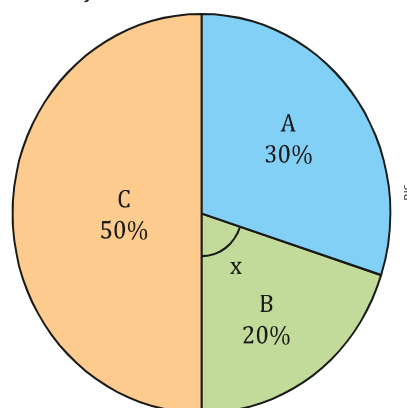
38. (Unicamp-SP) Segundo o IBGE, nos próximos anos, a participação das gerações mais velhas na população do Brasil aumentará. O gráfico a seguir mostra uma estimativa da população brasileira por faixa etária, entre os anos de 2010 e 2050. Os números apresentados no gráfico indicam a população estimada, em milhões de habitantes, no início de cada ano. Considere que a população varia linearmente ao longo de cada década.



- a) Com base nos valores fornecidos no gráfico, calcule exatamente em que ano o número de habitantes com 60 anos ou mais irá ultrapassar o número de habitantes com até 17 anos. (Atenção: não basta encontrar um número aproximado a partir do gráfico. É preciso mostrar o cálculo.)
- b) Determine qual será, em termos percentuais, a variação da população total do país entre 2040 e 2050.

39. (UEG-GO) Em uma eleição estão concorrendo os candidatos A, B e C. Realizada uma pesquisa de intenção de voto com 1 000 eleitores, obteve-se o seguinte resultado, ilustrado no gráfico de setores a seguir. O valor do ângulo x do gráfico de setores é:

Intenção de voto dos candidatos



- a) 18 graus.
b) 36 graus.
c) 60 graus.
d) 72 graus.

CÁLCULO RÁPIDO

REGISTRE
NO CADERNO



Neste capítulo e no próximo, assim como em muitas situações do dia a dia, é importante saber fazer cálculos rápidos com porcentagem.

- Escreva na forma decimal estas porcentagens:

a) 23% b) 35% c) 0,3% d) 12,5%
- Escreva as porcentagens representadas pelos números decimais a seguir.

a) 3,5 b) 0,57 c) 1,03 d) 0,03
- Resolva mentalmente.

a) Cinco é quantos por cento de 50? c) Quatro é quantos por cento de 400? e) Trinta é quantos por cento de 150?

b) Dez é quantos por cento de 1 000? d) Vinte é quantos por cento de 80?
- (Fuvest-SP) $(10\%)^2$ é igual a:

a) 1% b) 10% c) 20% d) 50% e) 100%
- Calcule mentalmente.

a) 30% de 900. c) 15% de 1200. e) 12% de 300.

b) 25% de 60. d) 1,5% de 2000. f) 10,5% de 600.



Você deve ter utilizado sua calculadora muitas vezes ao longo deste capítulo. No entanto, ela pode ser ainda mais útil no estudo da Estatística se for uma calculadora científica programável no modo “Estatística”.

Se a sua calculadora for desse tipo, acionando as teclas **2nd** e **on/c** aparecerá no visor o sinal **stat**, que significa Estatística.

Há outras teclas para cálculos estatísticos que poderão ser utilizadas enquanto o sinal **stat** aparecer no visor.

\bar{x} : média aritmética

Σx : somatório dos dados

σ : desvio padrão

n : número de dados

Σx^2 : somatório dos quadrados dos dados

data : entrada de dados

Algumas dessas teclas são acionadas pela tecla **2ndf** com o modo **stat** aparecendo no visor, mas isso varia de máquina para máquina.

Para aprendermos a manipular algumas teclas próprias desse modo, vamos calcular a média, o desvio padrão e a variância do conjunto de dados a seguir.

x	50	52	44	55	54	56	65
f	1	1	1	1	3	1	1

Para fazer isso, acionamos o modo **stat** apertando **2nd** e **on/c**.

Entramos com os dados digitando x_i tantas vezes quantas for sua frequência.

O que digitamos	50 data	52 data	44 data	55 data	54 data	54 data	54 data	56 data	65 data
O que mostra o visor	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Para calcular a média dos dados, apertamos **\bar{x}** (que está sobre a tecla **$x \rightarrow M$**). Assim obtemos $\bar{x} \approx 54$.

Para calcular o desvio padrão, teclamos **2nd** e **σ** . O valor obtido é aproximadamente 5.

Para calcular a variância, fazemos $(\sigma)^2$, porque o desvio padrão é a raiz quadrada da variância. Dessa forma, teremos variância $V \approx 27$.

Agora é com você! Resolva as atividades a seguir.

ATIVIDADES

- Qual é a média dos 15 primeiros números pares positivos?
- A tabela a seguir representa os dados recolhidos em uma pesquisa, realizada em certa cidade, sobre o número de filhos por família. Observe a tabela e, usando a calculadora, faça o que se pede.

Número de famílias	5419	3548	3117	1324	425	158	123
Número de filhos	0	1	2	3	4	5	6 ou mais

- Qual é o total de famílias pesquisadas?
- Calcule a frequência relativa e a frequência acumulada desses dados.
- Qual é a média de filhos por família?
- Calcule o desvio padrão e a variância desse conjunto de dados.

Escreva no caderno um resumo das principais ideias abordadas neste capítulo. Antes de iniciar o resumo, faça, de memória, uma lista de palavras que expressem os conceitos fundamentais que você aprendeu ao longo do capítulo. Ao lado de cada palavra, escreva uma pequena explicação sobre ela.

Depois, usando o livro, confira a sua lista e as explicações e acrescente o que for necessário para fazer o resumo pedido.

APRENDER A APRENDER

As funções quadráticas têm sido utilizadas por você na resolução de diversos problemas em Matemática e na Física. Elas serão consideradas novamente no capítulo 7, quando estudarmos a parábola. Por isso, vamos recordar.

Funções quadráticas ou polinomiais do 2º grau

Toda função da forma $y = ax^2 + bx + c$, com a, b, c números reais e $a \neq 0$, é chamada de **função polinomial do 2º grau** ou **função quadrática**.

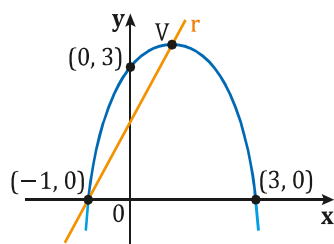
Essas funções têm domínio \mathbb{R} , e seu gráfico é uma parábola, com eixo de simetria paralelo ao eixo Oy , cujo vértice pode ser determinado a partir dos valores de a, b e c .

As raízes dessa função podem ser obtidas pela aplicação da fórmula de Bhaskara à equação $ax^2 + bx + c = 0$.

As funções quadráticas apresentam comportamento crescente e decrescente em partes de seu domínio, e a concavidade de seu gráfico pode ser determinada analisando-se o coeficiente a de x^2 .

ATIVIDADES

- Observe todas as informações contidas nesse breve resumo e organize-as, escrevendo-as de forma algébrica em seu caderno. Use as fórmulas que você conhece, faça desenhos de gráficos para ilustrar cada afirmação e coloque exemplos.
- A figura representa o gráfico de uma parábola cujo vértice é o ponto V .
 - Qual é a equação de f representada pela reta r ?
 - Estude o sinal da função g representada pela parábola.
 - Para quais valores de x $f(x) \geq 0$?
- (UFMG) A seção transversal de um túnel tem forma de arco de parábola, com 10 m de largura na base e altura máxima de 6 m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado, é reservado 1,5 m para passagem de pedestres, e o restante é dividido em duas pistas para veículos. As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30 cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos. Calcule a altura máxima que um veículo pode ter para que sua passagem pelo túnel seja permitida.



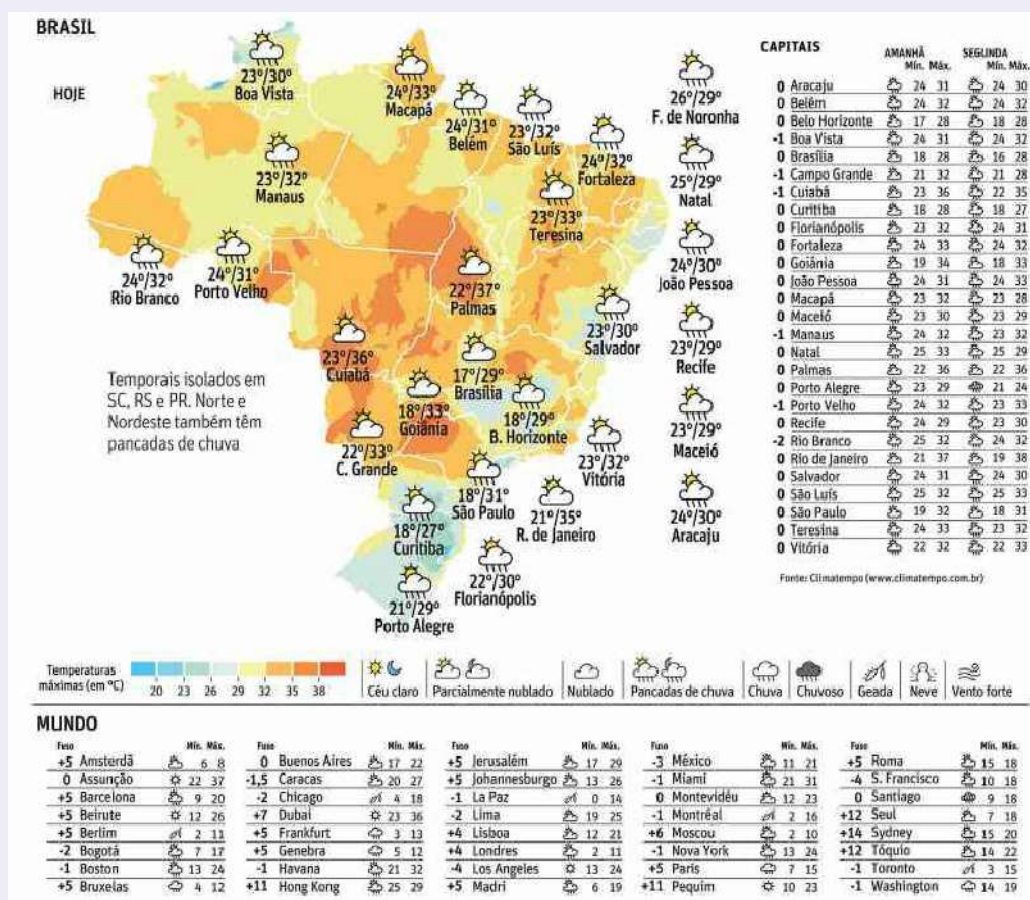
- Se um retângulo tem diagonal medindo 10 e lados cujas medidas somam 14, qual é a sua área?
 - Uma fábrica de material esportivo solicitou a uma indústria a confecção de 1 000 embalagens cilíndricas, sem tampa, para acondicionar sem folga três bolas de tênis em cada uma. Desconsiderando a perda de material e sabendo que a medida do raio de uma bola de tênis é 3,5 cm, determine a quantidade de material que será utilizada na embalagem para atender ao pedido. (Use $\pi \approx 3,14$.)
 - (UEM-PR) O lucro de uma empresa em um período de 15 meses foi modelado matematicamente por meio da seguinte função: $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a variável x indica o mês e $f(x)$ o lucro, em milhões de reais, obtido no mês x . Sabe-se que no início desse período, digamos mês zero, a empresa tinha um lucro de 2 milhões de reais; no primeiro mês, o lucro foi de 3 milhões de reais; e, no décimo quinto mês, o lucro foi de 7 milhões de reais. Com base nessas informações, assinale o que for correto.
 - O lucro obtido no décimo quarto mês foi igual ao lucro obtido no oitavo mês.
 - O lucro máximo foi obtido no décimo mês.
 - O lucro máximo obtido foi superior a 7,5 milhões de reais.
 - O lucro da empresa nesse período de 15 meses oscilou de 2 a 7 milhões de reais.
 - O gráfico da função que modela o lucro é uma parábola com concavidade para baixo.
- [Indique a soma dos números das afirmações corretas.]

Qual é a confiabilidade das previsões de tempo e dos dados de alterações climáticas?

Inicialmente, é importante esclarecer a diferença entre tempo e clima. **Tempo** é o estado (termodinâmico) da atmosfera e suas variações em curto prazo. Ao consultarmos as “previsões do tempo”, buscamos reconhecer, para um determinado período do ano, o tipo de roupa para vestir, se devemos ou não portar guarda-chuva, abrigar-nos de um furacão etc. Naturalmente, para além do dia a dia das pessoas, a previsão do tempo é fundamental para determinados setores produtivos, como a zona rural, em que, por exemplo, a previsão de queda de granizo pode significar antecipação de colheita ou proteção especial para as plantações e também para os animais.

As variações do tempo são reações à mudança climática. Na atualidade, tais variações são passíveis de ser previstas para um período futuro de até 15 dias, utilizando-se, entre outros recursos, imagens e dados empíricos provenientes de satélites. Após a coleta de dados, estes são submetidos a programas computacionais, com grande capacidade de processamento, para análise das várias possibilidades de evolução do tempo, gerando assim previsões com base em probabilidades.

O **clima** é estabelecido pela média estatística do tempo durante um ciclo de vida na Terra. Ao consultarmos as condições climáticas de uma região, é possível determinar, por exemplo, o que pode ser plantado, bem como a época ideal de plantio. Podemos também reconhecer se a região é suscetível a nevascas ou se, ao visitá-la, temos de estar preparados para enfrentar a aridez do deserto ou o agradável clima tropical.



Esquema mostrando a previsão do tempo em todo o Brasil: além das temperaturas, pode-se ver também as áreas com possibilidade de ocorrência de chuvas. Ao lado do esquema, há um resumo da previsão do tempo nas principais cidades do mundo.

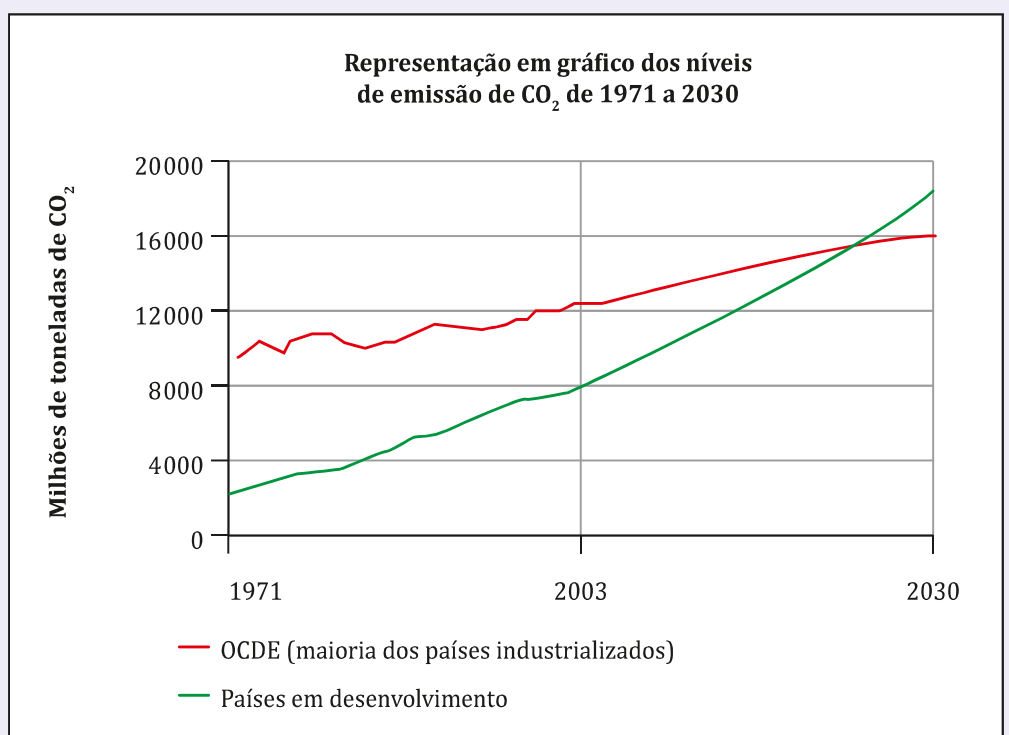
O clima estabelece as condições atmosféricas resultantes da média de estado do sistema oceano-atmosfera da Terra, incluindo padrões climáticos ao longo de meses, estações do ano, décadas ou séculos.

De modo geral, os estudos climatológicos seguem os métodos científicos de obtenção e tratamento de dados. Ou seja, estabelecem-se evidências por meio da observação; recolhem-se dados por diversos meios e eles são submetidos a tratamento estatístico. Com a interpretação dos resultados, constrói-se o modelo teórico.

Na atualidade, as condições climáticas da Terra têm sido foco de atenção de toda a população mundial ao se configurar como um indicador das questões ambientais que podem interferir na vida da Terra e, naturalmente, dos seres vivos que nela habitam.

A perspectiva de desenvolver políticas públicas que favoreçam a preservação do planeta impulsionou várias nações a investir nas pesquisas climatológicas, bem como a estabelecer parcerias entre instituições científicas, para a troca de dados e busca de um consenso nos métodos estatísticos empregados e na leitura dos resultados obtidos. Os focos de investigação são: caracterizar os agentes que, em excesso, provocam mudanças climáticas, tais como o CO_2 (dióxido de carbono), o CFC (clorofluorcarbono) e a radiação solar; reconstruir o histórico do clima desde períodos remotos, para entender as mudanças climáticas na escala de tempo; desenvolver bases científicas para a melhoria da qualidade do ar. Para esses fins, são utilizadas várias fontes de dados, localizadas em muitos pontos espalhados pelo planeta (aviões, balões, embarcações oceânicas e torres, além dos grandes centros de pesquisas).

O gráfico abaixo mostra um pouco do trabalho estatístico desenvolvido em Climatologia. É um exemplo de tratamento de dados coletados para o controle da captação e liberação de dióxido de carbono (CO_2) na superfície da Terra no período de 1971 a 2003, com projeção até 2030.



Fonte: <<http://www.ecodebate.com.br/2009/11/27/emissoes-de-co2-continuam-a-subir-rapidamente-por-henrique-cortez/>>.
Acesso em: 22 mar. 2016.

ATIVIDADES



1. Com todas essas informações, propomos que você e seus colegas investiguem dados do clima local, informações como temperatura esperada e temperatura real durante o mês e as justificativas para diferenças que eventualmente ocorrerem.
2. Verifique se em sua cidade ou estado há informações sobre a emissão de CO_2 e a que ela é atribuída. Conhecer mais do lugar onde vive trará a você instrumentos para exercer seu papel de cidadão.

3 Probabilidade e Estatística

Este capítulo completa o trabalho com os estudantes da Escola Básica em relação ao eixo Tratamento da informação, ou, como encontramos nos PCNEM, ao eixo de Análise de dados. De acordo com os documentos oficiais, o que se espera do estudante nessa fase da escolaridade é que ele ultrapasse a leitura de informações e reflita mais criticamente sobre seus significados, podendo então se posicionar e decidir diante de um conjunto de dados e suas consequências. Uma sugestão é que os estudantes, em pequenos grupos, relembrem o que já estudaram sobre probabilidade, ou consultem livros e cadernos de anos anteriores, antes de iniciarem a leitura deste capítulo. O objetivo é verificar o que conseguem lembrar.

Com os colegas e o professor, observe e pense sobre a situação e as questões a seguir, que serão respondidas ao longo deste capítulo.

Uma máquina automática de envasar água mineral está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1000 cm^3 . Nesse processo, há um desvio padrão de 10 cm^3 , ou seja, há chance de que o conteúdo das garrafas tenha 10 cm^3 a mais ou a menos do que o valor médio de 1 litro.



Thinkstock/Getty Images

- Se o controle de qualidade da empresa selecionar uma garrafa já envasada ao acaso, qual é a probabilidade de que ela tenha menos de 990 cm^3 de água mineral?
- Em um lote com 5 000 dessas garrafas, quantas se espera encontrar com conteúdo correto entre 990 cm^3 e 1010 cm^3 ?

Situe-se

O objetivo deste capítulo é mostrar a relação entre Estatística e Probabilidade, de modo que a probabilidade possa auxiliar na interpretação e na tomada de decisões a partir de dados estatísticos.

1 Recordando Probabilidade

Toda semana, milhares de pessoas imaginam ficar ricas com jogos de loterias e sorteios de prêmios. Um desses jogos é o da Mega-Sena, em que o apostador, ao fazer o jogo mais simples, escolhe 6 números de uma cartela com números de 1 a 60. Ao ser sorteado um número, o que pode acontecer?

Há vários acontecimentos possíveis:

- sair o número 5;
- sair um número maior que 10 e menor que 60;
- sair um número par.

Há também acontecimentos impossíveis:

- sair um número maior que 60;
- sair um número fracionário.

Entre os acontecimentos possíveis, há uns mais prováveis que outros. Veja os exemplos:

É pouco provável:

- sair um número entre 10 e 14;
- sair um múltiplo de 7.

É muito provável:

- sair um número de dois algarismos;
- sair um número menor que 55.

É certo:

- sair um número menor que 70;
- sair um número inteiro.

Essa análise mostra que há acontecimentos com diferentes graus de incerteza. Um dos objetivos da Probabilidade é estudar as incertezas dos acontecimentos.

Quando dizemos que é pouco provável sair um número entre 10 e 14, fazemos o seguinte raciocínio: há 60 números que podem sair e, destes, apenas três nos interessam: 11, 12, 13. Três chances em 60 é pouco provável.

E quando afirmamos, por exemplo, que é muito provável sair um número de dois algarismos, isto se deve a 51 dos 60 resultados serem números de dois algarismos.

Experimento aleatório, espaço amostral, evento, probabilidade

A situação inicial do jogo, em que não sabemos o que vai acontecer, é denominada **experimento aleatório**.

Experimento aleatório é todo experimento que, mesmo repetido várias vezes, sob condições semelhantes, apresenta resultados imprevisíveis entre os resultados possíveis.

Exemplos:

- a) Lançamento de uma moeda.
- b) Lançamento de um dado.
- c) Loteria de números.
- d) Abrir um livro ao acaso e ver o número da página.

Quando lançamos um dado de seis faces numeradas de 1 a 6, os números que podem ser observados na face superior variam a cada lançamento. Dizemos que esse é o **espaço amostral** do experimento aleatório.

Espaço amostral (S) de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

Exemplos:

- a) No lançamento de uma moeda, temos $S = \{\text{cara, coroa}\}$.
- b) No lançamento de um dado, temos $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

FIQUE CONECTADO

Em "Aleatório não é tão aleatório", capítulo do livro *A vida secreta dos números*, de George Szpiro (Difel), o autor faz uma análise interessante sobre o sentido do termo *aleatório* em diferentes situações, que vão de uma partida de futebol a estudos científicos.

Considerando o jogo mencionado no início deste capítulo, pode ocorrer que o número sorteado na rodada seja ímpar. Esse acontecimento, ou **evento**, pode ocorrer outras vezes. De modo geral, dizemos que:

Evento é todo subconjunto de um espaço amostral **S** de um experimento aleatório.

Evento impossível é aquele que nunca ocorre. **Evento certo** é aquele que necessariamente ocorre.

No caso do nosso jogo, o espaço amostral é $\{1, 2, \dots, 60\}$; e $\{1, 3, 5, \dots, 59\}$ é um subconjunto desse espaço amostral que representa o **evento** de o número sorteado ser ímpar.

Mas, afinal, o que é a **probabilidade**? De modo geral, podemos escrever:

Seja um evento **A** de espaço amostral finito **S** (não vazio). A probabilidade de ocorrer o evento **A** é a razão entre o número de elementos de **A** e o número de elementos de **S**. Indicando por: $n(A)$ o número de elementos de **A**, $n(S)$ o número de elementos de **S** e $P(A)$ a probabilidade de ocorrer **A**, temos: $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

Podemos expressar a probabilidade em forma de fração, em forma decimal ou como porcentagem.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ou

$$0\% \leq P(A) \leq 100\%$$

Um evento impossível tem probabilidade 0, e um evento certo tem probabilidade 1.

Comente com os estudantes que problemas que se referem a moedas, dados e baralhos sem alguma especificação a mais devem ser entendidos como moedas e dados comuns e perfeitos, e que vale o mesmo para o baralho convencional de 52 cartas e 4 naipes com todas as cartas indistinguíveis pelo seu verso e espessura. Observe também que, no caso de moedas, dados ou baralhos viciados, os resultados da probabilidade deixam de fazer sentido, pois não produzem experimentos aleatórios.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R1. Voltando ao sorteio da Mega-Sena, qual é a probabilidade de sair:

- a) o número 5?
- b) um número menor que 55?
- c) um número par?

Resolução

a) Sabemos que $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 60\}$ e $A = \{5\}$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{60} \approx 0,02 \text{ ou } 2\%$$

b) $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 60\}$ e $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 54\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{54}{60} \approx 0,90 \text{ ou } 90\%$$

c) $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 60\}$ e $A = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 58, 60\}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{30}{60} = 0,50 \text{ ou } 50\%$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



1. Um dado é lançado duas vezes sucessivamente. Observe os eventos a seguir e classifique-os em certo, muito provável, pouco provável ou impossível.

- a) Soma maior que 10.
- b) Diferença menor que 4.
- c) Soma maior ou igual a 2.
- d) Produto maior que 40.

2. Ângela foi a um show. Dê exemplos de eventos (acontecimentos) que sejam:

- a) muito prováveis.
- b) impossíveis.
- c) certos.
- d) pouco prováveis.

3. O dodecaedro é um poliedro regular com 12 faces. Existem dados com essa forma, com as faces numeradas de 1 a 12. No lançamento de um dado assim, qual é a probabilidade de sair:

- a) o número 7?
- b) um número ímpar?
- c) o número 20?
- d) um múltiplo de 1?

Invente duas outras perguntas para essa atividade.

4. Sobre a extração de uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de se tirar:

- a) uma carta de copas?
- b) um rei?
- c) uma carta de naipe preto?
- d) uma carta com número?

5. Sobre o lançamento de um dado, cite exemplos de eventos que tenham probabilidade:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{2}{3}$
- d) $\frac{1}{4}$
- e) 0
- f) $\frac{1}{6}$
- g) $\frac{5}{6}$
- h) 1



Problemas envolvendo probabilidade trazem informações expressas de diferentes formas.

Observe os textos dos três problemas a seguir.

- A. Em uma urna estão 6 bolas vermelhas e algumas bolas pretas. Retirando-se ao acaso uma bola dessa urna, sabe-se que a probabilidade de ela ser vermelha é $\frac{3}{5}$. Quantas bolas pretas estão na urna?
- B. Se 20% dos livros produzidos por uma editora apresentam defeitos, calcule a probabilidade de, ao escolher 2 livros:
 - a) o 1º apresentar defeito e o 2º não.
 - b) nenhum livro apresentar defeito.
 - c) os 2 livros apresentarem defeito.
- C. A probabilidade de que uma mulher de 56 anos sobreviva mais 20 anos é 0,6. De um grupo de 5 mulheres com 56 anos, qual é a probabilidade de que exatamente 4 cheguem aos 76 anos?

Como são registradas as probabilidades em cada texto?

Como fração, em porcentagem ou na escrita decimal: como escrever cada probabilidade dessas três formas?

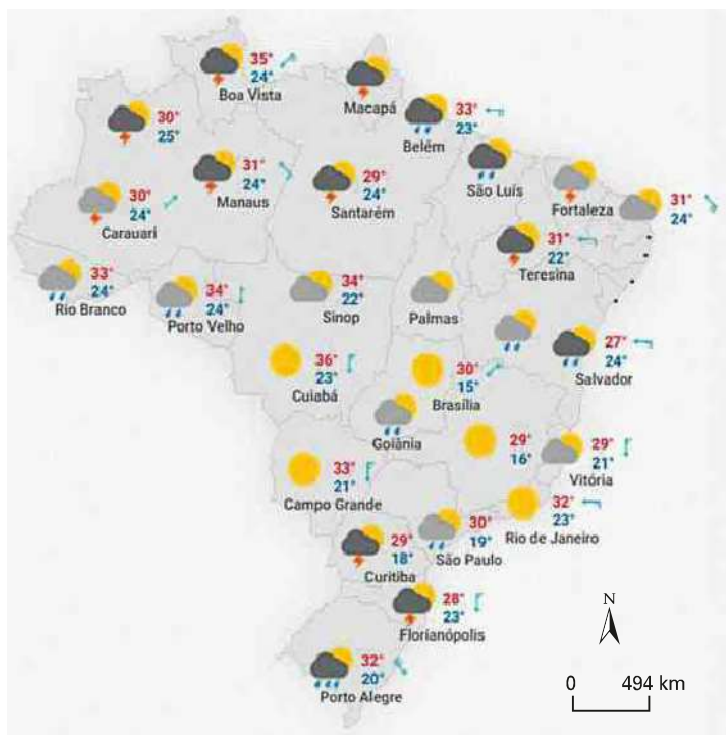
Depois dessa análise sobre diferentes escritas equivalentes para probabilidades, resolva os três problemas e discuta com os colegas as resoluções encontradas.

2 O uso da probabilidade na Estatística

O uso da probabilidade em Estatística está relacionado à predição de eventos futuros. Por exemplo: o meteorologista prediz que há 8% de chance de chover em determinada região; o setor de controle de qualidade de uma fábrica faz uma pesquisa estatística e prediz que apenas 3 em cada 1000 peças produzidas apresentarão defeito; um médico sanitaria analisa as últimas pesquisas sobre uma epidemia em certa região do país e conclui que a probabilidade de infecção nas condições observadas é de 50%.

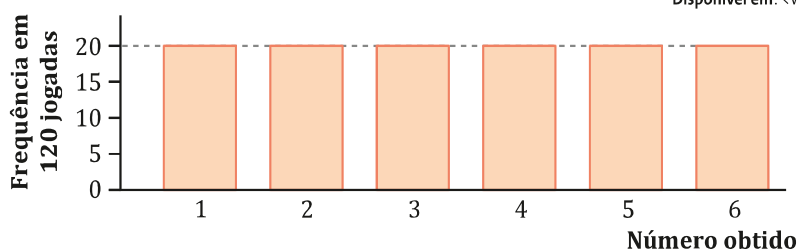
Para fazermos predições, muitas vezes precisamos examinar o padrão dos eventos, analisar com que frequência eles ocorrem e qual é a média de ocorrências.

Alguns eventos, como o resultado obtido no lançamento de um dado, têm frequências iguais.



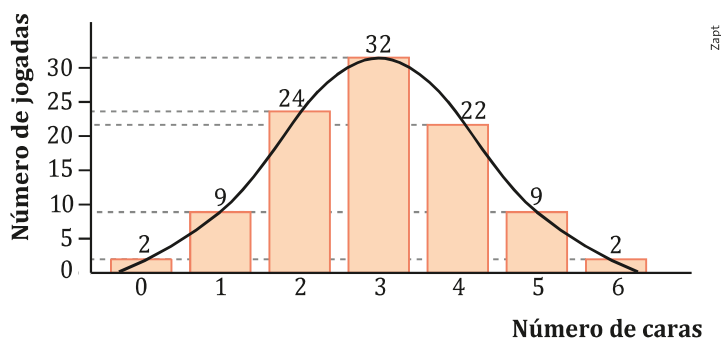
Previsão do tempo em alguns locais do Brasil em 23 de abril de 2016.

Disponível em: <www.tempo.pt/brasil.htm>. Acesso em: 23 abr. 2016



A variável independente de um gráfico estatístico é o evento do espaço amostral de todos os dados pesquisados.

Outros eventos, como obter cara ou coroa ao jogar moedas, geram gráficos simétricos. O gráfico a seguir é um registro do número de caras quando jogamos 6 moedas, em 100 jogadas.



Esse gráfico mostra que a probabilidade maior é ocorrerem 3 caras quando 6 moedas são lançadas, e que sair 6 caras, ou nenhuma cara, é a ocorrência de menor probabilidade.

Levar você a aprender como fazer análises desse tipo é o objetivo deste capítulo.

3 Função ou distribuição de probabilidade

Em um jogo de dados para duas pessoas, as regras são:

- em cada jogada, lançam-se dois dados e somam-se os pontos de cada um;
- o jogador **A** ganha se a soma for 6, 7, 8 ou 9;
- o jogador **B** ganha se a soma for 2, 3, 4, 5, 10, 11 ou 12.

Se você fosse apostar na vitória de um deles, qual escolheria?

Analisando de maneira apressada, poderíamos dizer que a melhor escolha seria o jogador **B**, porque há sete somas que lhe permitem ganhar e só quatro que o fazem perder, ou seja, a probabilidade de **B** ganhar é de $\frac{7}{11}$ ou aproximadamente 64%. Mas será mesmo essa a melhor escolha?

Analisando as somas possíveis, vemos que o resultado 2 é muito mais difícil de acontecer do que a soma 7. A soma 2 é obtida apenas se sair 1 em ambos os dados, enquanto a soma 7 é possível de várias maneiras: $1 + 6$, $2 + 5$ ou $3 + 4$.

Temos que considerar também que sair 3 no primeiro dado e 4 no segundo é diferente de sair 4 no primeiro dado e 3 no segundo.

Para resolver o problema de maneira segura, seria importante identificar os dados (por exemplo, com duas cores) e fazer todas as combinações possíveis dos resultados.

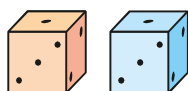
Podemos fazer isso usando algum tipo de quadro para organizar as possibilidades.

		Dado laranja					
		1	2	3	4	5	6
Dado azul	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

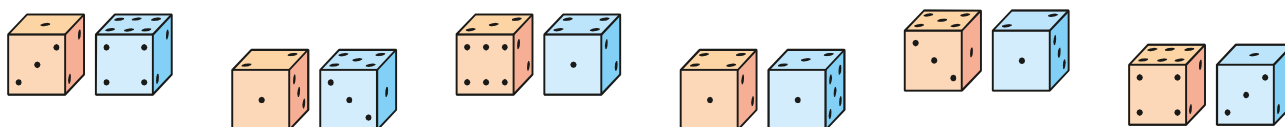
Dado azul	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
Dado laranja	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
Soma	2	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7	8	4	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9	10	6	7	8	9	10	11	7	8	9	10	11	12

Fazendo isso, vemos que há 36 somas possíveis.

Para obter soma 2, só há uma maneira.



Para obter soma 7, há seis maneiras possíveis, considerando a cor dos dados.



Podemos organizar um quadro com o número de casos favoráveis a cada soma.

Resultado	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Casos favoráveis	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

E calcular a probabilidade de obter cada soma.

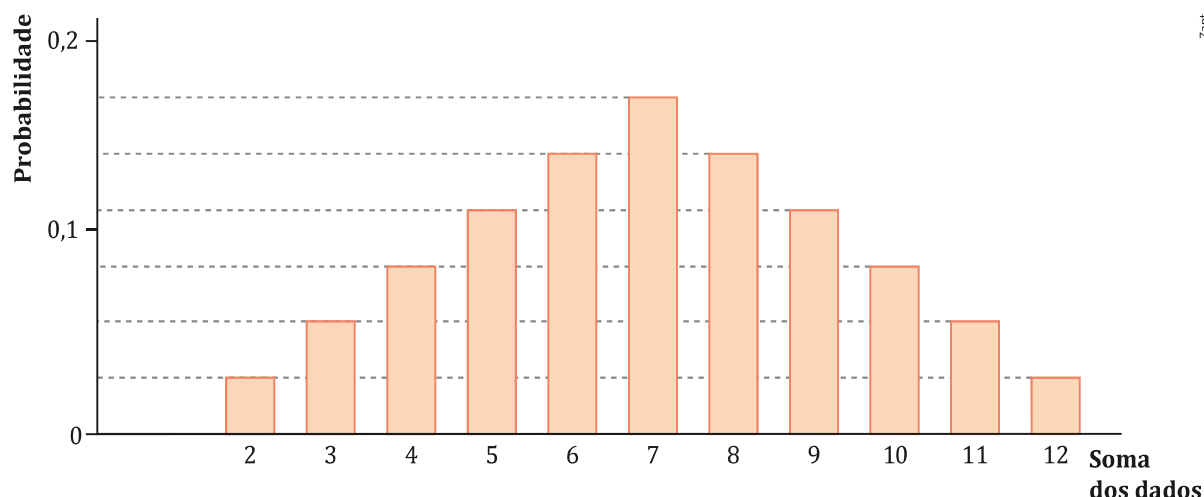
soma 2: $\frac{1}{36} \approx 2,8\%$ soma 3: $\frac{2}{36} \approx 5,6\%$ soma 4: $\frac{3}{36} \approx 8,3\%$... soma 7: $\frac{6}{36} \approx 16,7\%$...

O que acabamos de fazer foi definir uma função que a cada resultado faz corresponder a respectiva probabilidade. É a **distribuição de probabilidade** ou **função de probabilidade**.

Função ou distribuição de probabilidade para uma dada experiência aleatória é a função que a cada evento possível faz corresponder a probabilidade de o evento ocorrer.

Podemos representar a função de probabilidade por uma tabela ou um gráfico.

Eventos	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilidades	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028



Voltemos ao problema proposto na página 57, sobre qual dos jogadores tem mais chances de vencer. Podemos analisar a situação de duas maneiras: pela tabela ou pelo gráfico.

O jogador **A** ganha se a soma for 6, 7, 8 ou 9. As probabilidades de ele obter essas somas são, respectivamente, 0,139; 0,167; 0,139 e 0,111. Somando esses valores, teremos a probabilidade de **A** vencer: 0,556 ou 55,6%.

O jogador **B** vence se obtiver soma 2, 3, 4, 5, 10, 11 ou 12. Do mesmo modo que fizemos para **A**, calculamos a probabilidade de **B** vencer somando as probabilidades de ele obter cada uma das somas que lhe dão vantagem. Logo, a probabilidade de **B** vencer é 0,445 ou 44,5%.

Vemos claramente que o jogo é favorável ao jogador **A**, pois, embora o número de valores de somas possíveis para vencer seja menor do que para **B**, são somas mais prováveis.

Pelo gráfico, podemos encontrar a resposta para o problema analisando as colunas que correspondem a cada soma e sua respectiva probabilidade e, então, concluir que as chances de **A** vencer são maiores.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

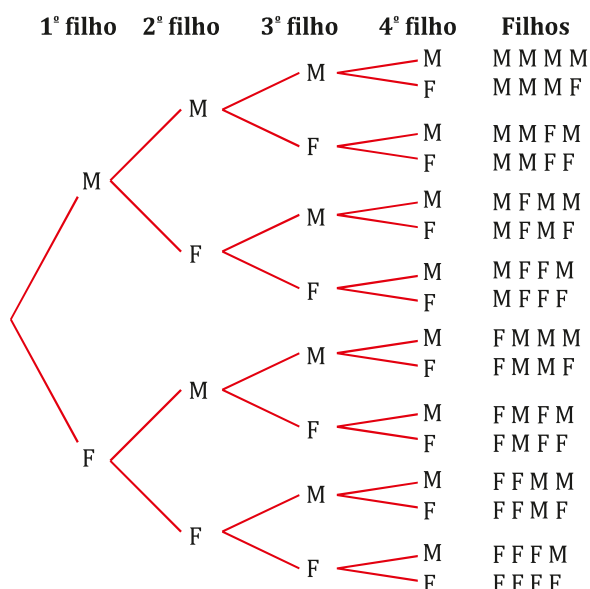
R2. Responda às questões.

Em uma família com 4 filhos:

- qual é a probabilidade de serem todos meninos?
- qual é a probabilidade de serem dois meninos e duas meninas?
- Faça a representação gráfica da distribuição de probabilidade.

Resolução

- a) Para resolver esse problema, vamos admitir a hipótese de que a probabilidade de nascer uma criança do sexo masculino é igual à de nascer uma do sexo feminino, isto é, 50% para cada caso. Para descobrir todos os casos possíveis, podemos fazer um diagrama de árvore. De acordo com o sexo, masculino ou feminino, usaremos as letras **M** ou **F**. Veja a seguir.



Analisando o diagrama, vemos que há 16 (ou 2^4) casos possíveis e equiprováveis de nascimento. Podemos resumir os casos em uma tabela, de acordo com o número de filhos de cada sexo.

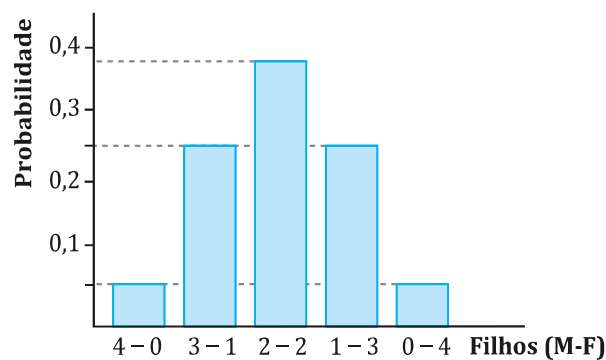
Filhos		Casos possíveis
M	F	
4	0	1
3	1	4
2	2	6
1	3	4
0	4	1
Total		16

A partir dos dados, vemos que a probabilidade de serem todos meninos é de $\frac{1}{16} = 0,0625$ ou 6,25%.

- b) A tabela nos indica que a probabilidade de serem dois meninos e duas meninas é de $\frac{6}{16} = 0,375$ ou 37,5%.
- c) Nessa situação, a distribuição de probabilidade é:

Filhos		Casos possíveis	Probabilidade
M	F		
4	0	1	0,0625
3	1	4	0,25
2	2	6	0,375
1	3	4	0,25
0	4	1	0,0625
Total		16	1

Família de 4 filhos



Analisando o gráfico, vemos que a probabilidade maior é de que nasçam 2 meninos e 2 meninas.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



6. Lançam-se dois dados e multiplicam-se os números que saíram nas faces superiores.
- Construa uma tabela com os resultados possíveis.
 - Qual é a probabilidade de o produto dessa multiplicação ser 15?
 - Construa um gráfico de distribuição de probabilidade e nele indique os produtos que têm a maior e a menor probabilidade de sair.

7. No jogo do “palitinho”, cada jogador esconde em uma das mãos 0, 1, 2 ou 3 palitos. Antes de abrir a mão, cada jogador tenta adivinhar quantos são os palitos escondidos. Dois amigos estão jogando “palitinho” e escondem alguns ao acaso.
- Construa uma tabela com todos os resultados possíveis.
 - Defina, a partir da tabela, a função de probabilidade.
 - Construa o gráfico da função e indique nele a probabilidade de dar 4.

8. Dois dados são lançados e, dos números obtidos, subtrai-se o menor do maior.
- Construa uma tabela com os resultados possíveis.
 - Qual é a probabilidade de a diferença ser 2?
 - Qual é a diferença mais provável?
 - Faça uma tabela e um gráfico da distribuição de probabilidade.
9. Dois jogadores lançam três dados e somam os números que saem nas faces superiores.
- O jogador **A** ganha se a soma for 8, 9, 10, 11 ou 12, e o jogador **B** ganha nos outros casos.

A tabela com o número de casos possíveis para cada soma é esta:

Soma	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Casos favoráveis	1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1

- Quantos são os casos possíveis de somas?
- Faça uma tabela e um gráfico da distribuição de probabilidade.
- Qual é o jogador que tem mais probabilidade de ganhar? Por quê?
- Como você alteraria o jogo para que os dois jogadores tivessem chances iguais? Faça isso de dois modos diferentes.

INVENTE VOCÊ

Avalie os estudantes considerando as perguntas criadas por eles. Observe se elas são coerentes para a atividade 6, e se os estudantes utilizaram adequadamente a linguagem matemática.

REGISTRE
NO CADERNO



- Elabore mais duas perguntas para a atividade 6.

4 Probabilidade frequencista e lei dos grandes números

Os resultados eleitorais em duas cidades foram os mostrados nas tabelas ao lado.

Na cidade 2 é mais provável encontrar um eleitor do Partido **A** ou um do Partido **B**?

Analisando a tabela correspondente, podemos comparar os eleitores de cada um desses partidos e concluir que, nessa cidade, é mais provável encontrar um eleitor do Partido **B**, porque teve 2875 votos contra 2556 votos do Partido **A**.

Poderíamos também obter o resultado da questão proposta calculando a probabilidade de cada um dos eventos. Para isso, devemos considerar que a cidade 2 tem 8 950 eleitores (soma de todos os votos mostrados na tabela).

A probabilidade de encontrar alguém que tenha votado em **A** é:

$$P_A = \frac{2556}{8950} \approx 0,286 = 28,6\%$$

A probabilidade de encontrar alguém que tenha votado em **B** é:

$$P_B = \frac{2875}{8950} \approx 0,321 = 32,1\%$$

Mas e se nos dirigíssemos ao acaso a uma dessas cidades, em qual delas seria mais provável encontrar alguém que não tivesse votado?

Como o número de eleitores é diferente nas duas cidades, não basta olhar as frequências absolutas nas tabelas para fazer a comparação.

Na cidade 1 há 2 014 eleitores; na cidade 2, há 8 950.

Em 1, há 622 eleitores que optaram pela abstenção; logo, a probabilidade de encontrar alguém que não tenha votado é:

$$P_{\text{abstenção}} = \frac{622}{2014} \approx 0,309 = 30,9\%$$

Cidade 1

Abstenções	622
Partido A	495
Partido B	483
Partido C	228
Partido D	93
Outros	53
Branco/nulos	40
Total de votos	2 014

Cidade 2

Abstenções	1880
Partido A	2556
Partido B	2875
Partido C	1011
Partido D	301
Outros	238
Branco/nulos	89
Total de votos	8 950

Em 2, há 1880 eleitores que optaram pela abstenção. A probabilidade de encontrar alguém que não tenha votado é:

$$P_{\text{abstenção}} = \frac{1880}{8950} \approx 0,210 = 21,0\%$$

Nota-se que, em termos absolutos, há mais abstenções na cidade 2. No entanto, é mais provável encontrar alguém que não tenha votado na cidade 1.

Para chegar a essa conclusão, tivemos que fazer uma **análise relativa** entre o número de eleitores de cada cidade e os respectivos números de abstenções. Ou seja, calculamos as **frequências relativas** dividindo o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis.

Veja como ficariam as tabelas das duas cidades após o cálculo das frequências relativas.

Quando se toma a frequência relativa como a probabilidade de um evento, dizemos que estamos considerando a **probabilidade frequencista** ou o conceito frequencista de probabilidade.

Cidade 1

	f	fr (%)
Abstenções	622	30,9
Partido A	495	24,6
Partido B	483	24,0
Partido C	228	11,3
Partido D	93	4,6
Outros	53	2,6
Branco/nulos	40	2,0

Cidade 2

	f	fr (%)
Abstenções	1880	21,0
Partido A	2556	28,6
Partido B	2875	32,1
Partido C	1011	11,3
Partido D	301	3,4
Outros	238	2,7
Branco/nulos	89	1,0

FOCO NA TECNOLOGIA

Computador

Você vai conhecer um aplicativo que simula situações, como o lançamento de uma moeda, e ajuda a entender cálculos com probabilidade.

Para isso, acesse <<http://nlvm.usu.edu>> (acesso em: 21 mar. 2016). Na página inicial você poderá selecionar, entre algumas opções, o idioma que deseja para navegar no site. Aqui, optamos pela Língua Espanhola.

Clique em “Análisis de Datos & Probabilidad” (Análise de Dados e Probabilidade).

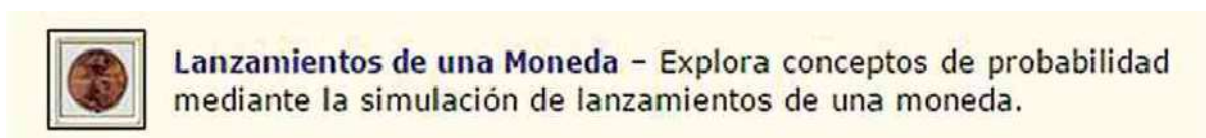
Em seguida, role a tela até aparecer “Análisis de Datos & Probabilidad (Grados 9 – 12)”.

The screenshot displays the NLVM website interface in Spanish. The main navigation bar includes links for 'Biblioteca', 'Información', 'eNLVM', and 'Comprar'. Below this, there's a section titled 'Análisis de Datos & Probabilidad (Todos los grados)' with a list of simulations categorized by grade level: Pre-K-2, 3-5, 6-8, and 9-12. Each category lists several simulations with icons and brief descriptions. For example, under 'Análisis de Datos & Probabilidad (Grados 9 - 12)', simulations include 'Calculadora de Ahorros', 'Calculadora de Préstamos', 'Diagrama de Dispersión', 'Gráfica de Barras', 'Gráfica de Cajas', 'Gráfica de Pastel', 'Histograma', 'Hagamos un Trato', 'Hamlet Ocurre', 'Lanzamientos de una Moneda', 'Modelo de Cajas', 'Prenos Whammy', and 'Ruleta'. The right side of the image shows a detailed description of the 'Este aplicativo usa un "gerador" de números aleatorios para crear o modelo de lançar uma moeda repetidamente e grava os resultados.' in Portuguese, explaining how the application uses a random number generator to simulate coin tosses and record results.

Este aplicativo usa um “gerador” de números aleatórios para criar o modelo de lançar uma moeda repetidamente e grava os resultados. Incentive os estudantes a trabalhar com diferentes quantidades de lançamentos e problematize com eles as situações possíveis para ampliarem a compreensão sobre probabilidade.

Ainda em “Análisis de Datos & Probabilidad (Grados 9 – 12)” há outros aplicativos que envolvem Estadística e Probabilidade, como: investigação de probabilidades por meio de jogo; verificação da ocorrência de eventos improváveis; uso de histograma para resumo gráfico de dados; extração aleatória de elementos para a aprendizagem de probabilidade; observação de diversos sistemas de votação e os resultados contraditórios que podem produzir; uso de roleta para trabalho com números e probabilidades.

Então, selecione “Lanzamientos de una Moneda” (Lançamentos de uma moeda).



National Library of
Virtual Manipulatives

Neste item, são explorados conceitos de probabilidade por meio da simulação dos lançamentos de uma moeda.

Proposta

- Descubra como o aplicativo funciona.
- Ao lançar uma moeda 10 vezes, é inesperado observar cinco ou mais caras sucessivas?
- Use este aplicativo várias vezes com o número de lançamentos igual a 10 e a probabilidade de caras igual a 50% ou 0,5.
- Você ficaria surpreso em ver 10 ou mais caras sucessivas em 100 lançamentos?

Lei dos grandes números

Cada um dos 30 estudantes de uma turma realizou este experimento: lançou um dado mais que 20 vezes e registrou o número de vezes que ocorreu o evento 6.

Após um tempo, como todos os dados eram iguais, juntaram os resultados e repetiram a experiência, obtendo assim um número elevado de lançamentos.

Se calcularmos as frequências relativas desses eventos, veremos que, a partir de um número grande de lançamentos, elas “tendem” para 16,7%, que é aproximadamente $\frac{1}{6}$. Há uma propriedade das probabilidades, conhecida como **lei dos grandes números**, que justifica esse fato.

De acordo com essa lei, para um grande número de experiências, tendo cada uma um resultado aleatório, a frequência relativa de obtenção de cada um desses resultados tende a estabilizar-se, convergindo para um certo número, que é a probabilidade desse resultado.

Número de lançamentos	Número de vezes que ocorreu o evento	fr
100	14	0,140
200	40	0,200
300	43	0,143
400	72	0,180
500	83	0,166
600	100	0,167
700	117	0,167
⋮	⋮	⋮
1 000	168	0,168

Lei dos grandes números: quando o número de experiências aumenta muito, a frequência relativa de um evento tende a estabilizar-se em determinado valor, que é adotado como **probabilidade** desse evento.

Essa lei, que tornou possível o estudo de probabilidades e análises estatísticas em populações muito grandes, foi enunciada pela primeira vez pelo matemático Jacques Bernoulli (1654-1705) e publicada postumamente em 1713. Você pode conhecer um pouco mais sobre a família Bernoulli no próximo **Para complementar**, mas antes retome o experimento do lançamento da moeda sugerido na seção **Foco na tecnologia – computador** e confirme se você obteve probabilidade de 50% para o resultado “cara” e 50% para o resultado “coroa”.

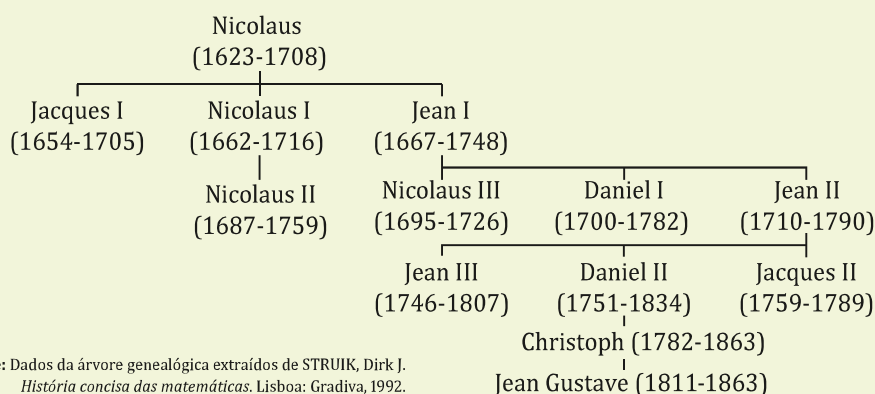
Uma família de matemáticos

Os Bernoulli estabeleceram-se na Basileia, Suíça, em 1583. Fugiam das lutas e perseguições religiosas que sufocavam sua terra natal, a cidade de Antuérpia, na Bélgica, então sob domínio espanhol. Tanto Antuérpia como Basileia floresciam em função de uma aristocracia mercantil. Os Bernoulli, que faziam parte dessa elite, assustaram-se com a fúria religiosa desencadeada nos Países Baixos pelos espanhóis.

Basileia, às margens do Reno, era já há alguns séculos um grande centro de irradiação cultural, onde floresciam as artes e as ciências. Dotada de uma universidade desde o século XV, desempenhou um importante papel na difusão do Humanismo. Foi nessa Basileia, de espírito tolerante e aberto, onde católicos e protestantes conviviam com serenidade, que os Bernoulli buscaram refúgio.

Treze membros da família (veja a árvore genealógica dos matemáticos da família Bernoulli) obtiveram grande destaque na Matemática e na Física, imprimindo seus nomes na história dessas ciências. Quatro deles foram eleitos sócios estrangeiros da Académie des Sciences de Paris. O primeiro a obter proeminência na Matemática foi Jacques Bernoulli. Ele nasceu e morreu na Basileia, mas viajou muito para encontrar-se com cientistas de outros países.

Jacques Bernoulli foi professor de Matemática na Universidade de Basileia, tendo sido um dos primeiros a estudar a teoria das probabilidades, sobre a qual escreveu a *Ars conjectandi*, publicada postumamente em 1713. Nesse livro encontra-se a primeira referência à lei dos grandes números.



Fonte: Dados da árvore genealógica extraídos de STRUIK, Dirk J. *História concisa das matemáticas*. Lisboa: Gradiva, 1992.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO

Se preferir, use uma calculadora para resolver as atividades a seguir.

10. Veja a tabela da distribuição por faixa etária da população de uma cidade.

Idade	Número de pessoas
0-9	1 569 000
10-19	1 778 200
20-29	1 663 140
30-39	1 349 340
40-49	1 171 520
50-59	1 161 060
60-69	920 480
≥ 70	847 260
Total	10 460 000

- a) Faça uma tabela das frequências relativas.
b) Em uma cidade semelhante a essa, de 80 000 habitantes, quantas pessoas você prevê que haja com idade entre 30 e 39 anos? E com menos de 30 anos?

11. Uma estação de rádio transmite músicas distribuindo-as ao longo de sua programação diária de acordo com a tabela.

Tipo de música	Porcentagem
Rock	45
Tecno	13
Dance	26
Pagode	10
Flashback	6

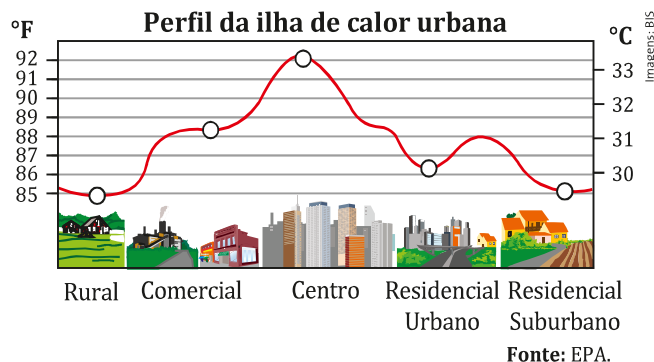
- a) Sintonizando a rádio ao acaso durante o dia, qual é a probabilidade de se ouvir pagode? E tecno?
b) Durante quantas horas por dia pode-se ouvir rock?

12. (Unifesp-SP) O quadro a seguir mostra o resultado de uma pesquisa realizada com 200 nadadores de competição da cidade de São Paulo, visando apontar o percentual desses nadadores que já tiveram lesões (dores) em certas articulações do corpo, decorrentes da prática de natação, nos últimos três anos.

Articulação	Percentual de nadadores
Ombro	80%
Coluna	50%
Joelho	25%
Pescoço	20%

Com base no quadro, determine:

- a) quantos nadadores do grupo pesquisado tiveram lesões (dores) no joelho ou no pescoço, considerando que 5% dos nadadores tiveram lesões nas duas articulações, joelho e pescoço.
- b) qual é a probabilidade de um nadador do grupo pesquisado, escolhido ao acaso, não ter tido lesões (dores) no ombro ou na coluna, considerando as manifestações de dores como eventos independentes.
13. (Enem-MEC) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31 °C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



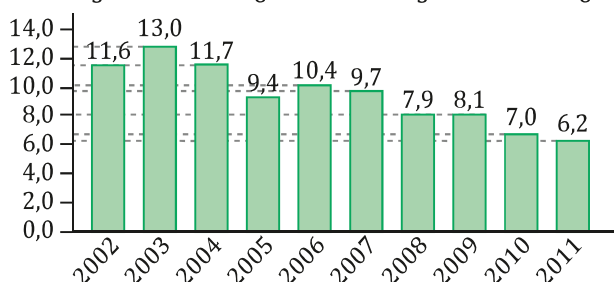
Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

14. (UEG-GO) O gráfico abaixo mostra a evolução da taxa de desemprego nos meses de junho de 2002 a 2011, para o conjunto das seis regiões metropolitanas brasileiras abrangidas pela pesquisa.

Escolhendo aleatoriamente um dos anos descritos no gráfico utilizado, a probabilidade de que no ano escolhido a taxa de desemprego, no mês de junho, seja superior a 9,3% é igual a

- a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{4}{6}$



Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 12 ago. 2011.

5 Probabilidade e Estatística

Vamos agora verificar como usar o conceito de média aritmética e desvio padrão na análise de dados estatísticos com o auxílio da probabilidade. Acompanhe.

Em uma escola, foi feita uma pesquisa com 400 estudantes sobre o número de irmãos de cada um deles. Recolhidos os dados e calculadas as frequências, foi organizada esta tabela.

Número de irmãos (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Total
f_i	25	52	68	123	79	33	11	6	2	1	400
fr_i (%)	6,25	13	17	30,75	19,75	8,25	2,75	1,5	0,5	0,25	100

Pelo conceito frequencista, a frequência relativa é um valor aproximado da probabilidade de que um estudante, escolhido ao acaso, tenha x_i irmãos. Exemplos:

- a) A probabilidade de que um estudante tenha 3 irmãos é de 30,75%.
- b) A probabilidade de que um estudante tenha mais que 5 irmãos é:

$$\frac{2,75 + 1,5 + 0,5 + 0,25}{100} = \frac{5}{100} \text{ ou } 5\%$$

No site <www.uff.br/cdme> (acesso em: 21 mar. 2016), o aplicativo Medidas de dispersão pode ser usado para que os estudantes compreendam os conceitos de variância e desvio padrão.

Portanto, escolher um estudante **ao acaso** e registrar o número de irmãos é uma experiência aleatória cujos resultados possíveis são números. Temos, assim, uma **variável aleatória** quantitativa que pode assumir os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9 com as probabilidades aproximadas $p_0, p_1, p_2, \dots, p_9$, que em percentual coincidem com os valores de frequências relativas. A média do conjunto de dados é:

$$\bar{x} = \frac{25 \cdot 0 + 52 \cdot 1 + 68 \cdot 2 + 123 \cdot 3 + 79 \cdot 4 + 33 \cdot 5 + 11 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 9}{400}$$

Como $\frac{25}{400} = \frac{6,25}{100}$, $\frac{52}{400} = \frac{13}{100}$, $\frac{68}{400} = \frac{17}{100}$, $\frac{123}{400} = \frac{30,75}{100}$, $\frac{79}{400} = \frac{19,75}{100}$, $\frac{33}{400} = \frac{8,25}{100}$, $\frac{11}{400} = \frac{2,75}{100}$, $\frac{6}{400} = \frac{1,5}{100}$, $\frac{2}{400} = \frac{0,5}{100}$, $\frac{1}{400} = \frac{0,25}{100}$, podemos reescrever o valor de \bar{x} usando as frequências relativas e obter \bar{x} em percentual, assim:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 6,25 \cdot 0 + 13 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 30,75 \cdot 3 + 19,75 \cdot 4 + 8,25 \cdot 5 + 2,75 \cdot 6 + 1,5 \cdot 7 + \\ &+ 0,5 \cdot 8 + 0,25 \cdot 9 = 292,75\% \text{ ou } \bar{x} = \frac{292,75}{100} \approx 2,93 \end{aligned}$$

Embora ninguém possa ter 2,93 irmãos, esse número mostra uma leve tendência para que os estudantes tenham, em média, 3 irmãos.

Podemos também calcular o desvio padrão, que é dado por:

$$DP = \sqrt{\frac{25 \cdot (0 - 2,93)^2 + 52 \cdot (1 - 2,93)^2 + 68 \cdot (2 - 2,93)^2 + \dots + 1 \cdot (9 - 2,93)^2}{400}}$$

que, usando as frequências relativas, pode ser escrito em percentual como

$$DP = \sqrt{6,25 \cdot (0 - 2,93)^2 + 13 \cdot (1 - 2,93)^2 + 17 \cdot (2 - 2,93)^2 + \dots + 0,25 \cdot (9 - 2,93)^2}$$

que resulta em $DP \approx 1,57$.

Um importante resultado da Estatística e que mostra a relevância da média e do desvio padrão é que, em geral, de 50% a 75% dos casos se concentram no intervalo $[\bar{x} - DP, \bar{x} + DP]$, definido como **zona** de normalidade de uma distribuição de dados.

No caso que estamos analisando, temos:

$$\bar{x} - DP = 2,93 - 1,57 = 1,36$$

$$\bar{x} + DP = 2,93 + 1,57 = 4,50$$

Podemos interpretar isso graficamente.

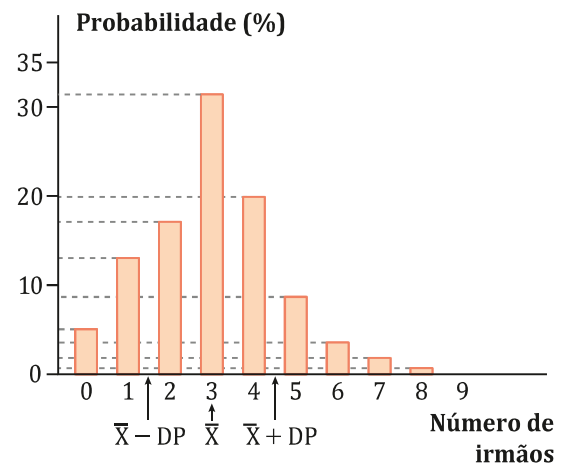
Somando as probabilidades correspondentes ao intervalo

$$]1,36; 4,50[: 17 + 30,75 + 19,75 = 67,5$$

a zona de normalidade indica que uma criança dessa pesquisa, escolhida ao acaso, tem 67,5% de probabilidade de pertencer ao intervalo

$$[\bar{x} - DP, \bar{x} + DP[$$

ou seja, ter mais de 1 irmão e menos de 5 irmãos.



Curva normal

Foi feito um estudo, em um hospital, sobre o “peso” de bebês entre 0 e 12 meses.

O resultado está mostrado na tabela a seguir.

“Peso” (kg)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Total
f_i	1	2	4	8	16	25	38	47	51	48	42	35	25	12	8	4	3	1	370
fr_i	,003	,005	,011	,022	,043	,067	,103	,127	,138	,130	,114	,095	,067	,032	,022	,011	,008	,003	1,001

Note que a soma das fr_i é 1, mas, como usamos valores aproximados, o resultado total também aparece aproximado.

Adotando as frequências relativas como valores das probabilidades, podemos fazer o gráfico da distribuição de probabilidades.

Calculando a média aritmética e o desvio padrão, teremos $\bar{X} = 10,4$ e $DP = 2,9$; logo:

$$[\bar{X} - DP, \bar{X} + DP] = [7,5; 13,3]$$

ou seja, há $0,103 + 0,127 + 0,138 + 0,130 + 0,114 + 0,095 \approx 0,707$ ou 70,7% de bebês com “peso” entre 7,5 kg e 13,3 kg.

Unindo os pontos médios dos retângulos, obteremos uma **curva de distribuição**.

Em uma curva de distribuição, a frequência ou probabilidade de um dado intervalo é igual à área limitada pelo eixo horizontal, pelas retas verticais que passam nos extremos do intervalo e pela curva de distribuição.

No exemplo que estamos analisando, a curva de distribuição seria a mostrada ao lado.

A área destacada, que corresponde à zona de normalidade, mostra onde está concentrada a maioria dos indivíduos pesquisados.

A curva de distribuição que obtivemos nesse caso tem algumas características que podemos ressaltar.

- Tem a forma de um sino (por isso, é também conhecida como “curva do sino”).
- É simétrica.
- O ponto máximo é aproximadamente 10,4, ou seja, a média aritmética.
- A maioria dos indivíduos estudados está na zona central.

Em Estatística, curvas desse tipo são chamadas de **curvas de distribuição normal**, **curvas normais** ou **curvas de Gauss**.

A curva de Gauss aparece no estudo de muitas variáveis estatísticas: altura, “peso”, comprimento dos pés, número de filhos, número de horas que se vê televisão, salários, tempo de reação a um medicamento etc.

Nessas distribuições normais, o desvio padrão tem influência sobre o aspecto da curva. Veja estes exemplos.

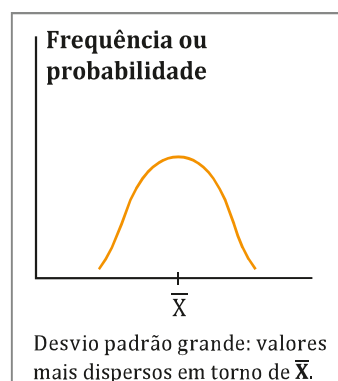
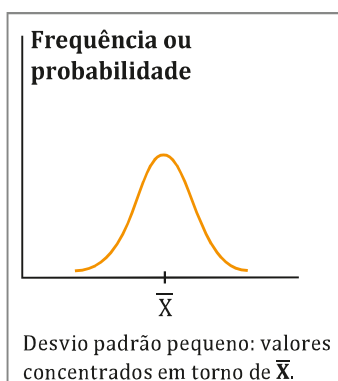


Gráfico da distribuição de probabilidades

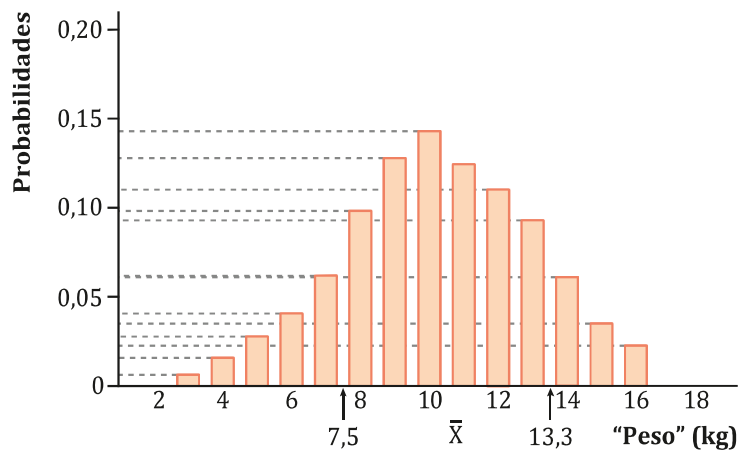
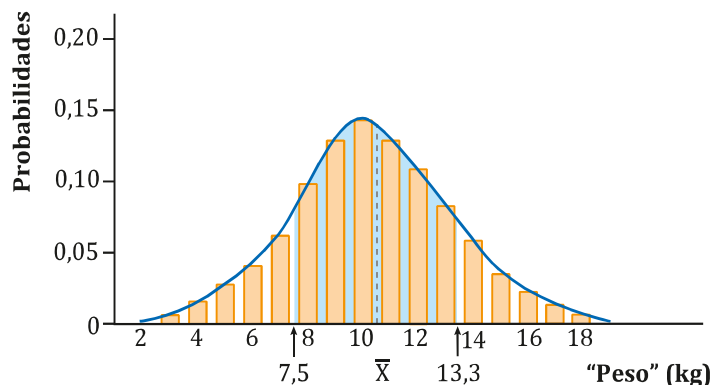


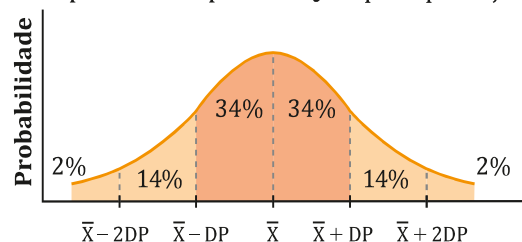
Gráfico da distribuição de probabilidades



Propriedades da distribuição normal

Uma distribuição normal fica completamente definida pela média e pelo desvio padrão. Qualquer que seja a distribuição normal, verificamos que:

- a curva tem sempre a forma de sino;
- a curva é simétrica em relação a \bar{X} ;
- o ponto máximo da função corresponde a \bar{X} ;
- ao intervalo $[\bar{X} - DP, \bar{X} + DP]$ correspondem 68%, aproximadamente, da distribuição, metade para cada lado da média;
- ao intervalo $[\bar{X} - 2DP, \bar{X} + 2DP]$ correspondem cerca de 96% da distribuição, metade para cada lado da média;
- os outros 4% da distribuição aparecem relacionados como mostrado no gráfico acima.



DE OLHO NA RESOLUÇÃO

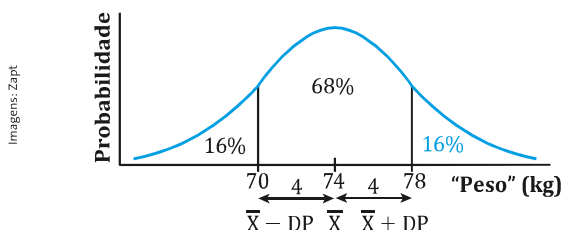
R3. Segundo um estudo, o “peso” médio de um jogador de futebol profissional é 74 kg, com desvio padrão é 4 kg.

- Qual a porcentagem de jogadores com mais de 78 kg?
- Em um país com 830 jogadores profissionais, quantos jogadores têm menos de 66 kg?

Resolução

É impossível responder a essas perguntas sem “pesar” todos os jogadores, mas o que estudamos até aqui nos permite fazer estimativas bastante boas.

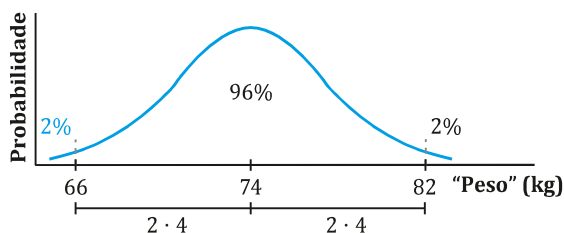
- Devemos lembrar que a distribuição dos “pesos” de uma população numerosa é uma distribuição normal. Então, conhecendo a média e o desvio padrão, podemos esboçar a curva de Gauss, vista abaixo.



Sabemos que, aproximadamente, 68% dos “pesos” estão no intervalo $[\bar{X} - DP, \bar{X} + DP]$, que nesse caso é $[70, 78]$; logo, 32% dos “pesos” estão fora desse intervalo.

Sendo a distribuição simétrica, concluímos que 16% têm menos de 70 kg e 16% têm mais de 78 kg.

- Para responder a essa pergunta, devemos lembrar que 96% dos “pesos” estão no intervalo $[\bar{X} - 2DP, \bar{X} + 2DP]$, ou seja, no intervalo $[66, 82]$, o que significa que os outros 4% estão fora desse intervalo.



Assim, haverá 2% dos 830 jogadores com “peso” inferior a 66 kg ou $0,02 \cdot 830 = 16,6$.

Portanto, é provável que haja pelo menos 16 jogadores com menos de 66 kg.

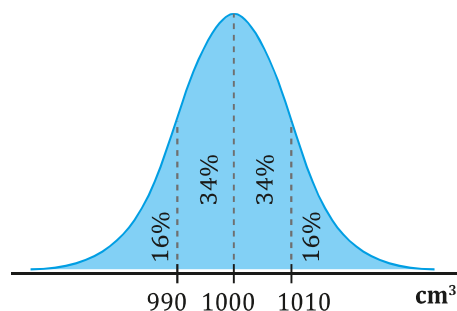
R4. Vamos retomar o problema da abertura deste capítulo:

Uma máquina de envasar automática de água mineral está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1000 cm³. Nesse processo, há um desvio padrão de 10 cm³, ou seja, há chance de que o conteúdo das garrafas tenha 10 cm³ a mais ou a menos do que o valor médio de 1 litro.

- Se o controle de qualidade da empresa selecionar uma garrafa já envasada ao acaso, qual é a probabilidade de que ela tenha menos de 990 cm³ de água mineral?
- Em um lote com 5000 dessas garrafas, quantas se espera encontrar com conteúdo correto entre 990 cm³ e 1010 cm³?

Resolução

Vamos admitir que o processo de envasamento das garrafas siga uma distribuição aproximadamente normal, com média de 1000 cm³ e desvio padrão de 10 cm³. Isso significa que a distribuição de valores do líquido em cada garrafa pode ser descrita pela curva de Gauss.



- Podemos afirmar então que 68% das garrafas têm conteúdo no intervalo $[990, 1010]$; 16% dos vasilhames têm conteúdo abaixo de 990 cm³ e outros 16% deles têm conteúdo acima de 1010 cm³, o que nos permite responder às questões iniciais.
- Se 16% das garrafas têm conteúdo inferior a 990 cm³, a probabilidade de se escolher uma dessas garrafas é de 16% ou 0,16. E, se 68% das garrafas têm o conteúdo no intervalo esperado, em 5000 garrafas devemos ter 3400 garrafas ($0,68 \cdot 5000 = 3400$) com o conteúdo dentro do intervalo esperado.



15. Observe a distribuição por idade dos estudantes de uma turma.

Idade	fr
15	38%
16	31%
17	18%
18	10%
19	3%

- a) Qual é a média aritmética das idades?
b) Qual é o desvio padrão?

16. No jogo de bilhar, a pontuação de um jogador em uma jogada é igual ao número de tacadas seguidas que ele consegue dar sem errar.

Um jogador de bilhar dá, em média, 45 tacadas por jogada, com um desvio padrão de 15.

Qual é a probabilidade de, em uma jogada, um jogador conseguir dar entre 60 e 75 tacadas?

17. Em uma fábrica de lâmpadas, quase todos os dias há lâmpadas que não passam no teste de qualidade. Ao longo de 300 dias, fez-se a estatística do número de lâmpadas defeituosas.

Lâmpadas defeituosas	Número de dias
0	3
1	16
2	59
3	75
4	68
5	31
6	22
7	15
8	7
9	3
10	1
Total	300

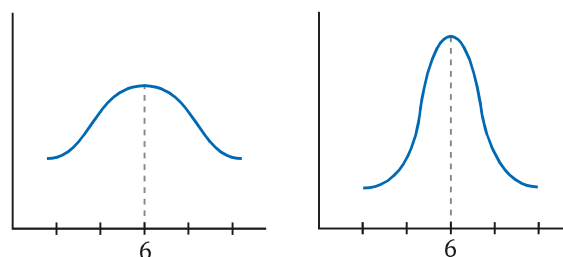
- a) Em média, quantas lâmpadas são jogadas fora diariamente por apresentarem defeito?
b) Qual é o desvio padrão?
c) Qual é a probabilidade de o número de lâmpadas com defeito estar entre 2 e 6?
d) Invente outras perguntas para essa atividade.

18. A tabela a seguir mostra o resultado de uma pesquisa feita com 30 casais sobre o número de filhos.

Número de filhos	Número de casais	Frequência relativa
0	1	0,033
1	4	0,133
2	5	0,167
3	7	0,233
4	6	0,2
5	3	0,1
6	2	0,067
7	1	0,033
8	1	0,033
Total	30	0,999

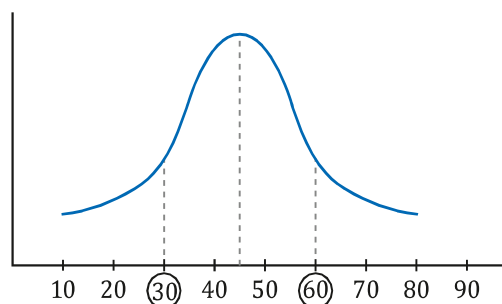
- a) Calcule a média aritmética e o desvio padrão.
b) Calcule a porcentagem relativa ao intervalo $[\bar{X} - DP, \bar{X} + DP]$.
c) Escolhendo-se ao acaso um dos casais, qual é a probabilidade de ele ter mais de 5 filhos? E menos de 3?
d) O que é mais provável nessa amostra: ter mais de 4 filhos ou menos?

19. As duas curvas de Gauss a seguir indicam média 6. Em qual delas o desvio padrão é maior? Por quê?



Imagens: BLS

20. Este gráfico representa uma distribuição normal de probabilidade.



- a) Qual é a média aritmética?
b) Qual parece ser o desvio padrão? Por quê?

Cálculo de desvio padrão por meio de planilha eletrônica

Podemos calcular o desvio padrão usando o computador, mais especificamente programas de planilha eletrônica. Veja a seguir alguns procedimentos para o cálculo do desvio padrão. As etapas aqui descritas são basicamente as mesmas para os demais programas de planilha eletrônica; portanto, qualquer um pode ser utilizado. Aqui, nos referimos ao LibreOffice.

No contexto da análise de dados, a calculadora e o computador ganham importância como instrumentos que permitem a abordagem de problemas de dados reais ao mesmo tempo em que o estudante pode ter a oportunidade de se familiarizar com as máquinas e os softwares.

1ª proposta

a) Use, para calcular o desvio padrão, as notas dos estudantes apresentadas na tabela a seguir.

b) Primeiro selecione a célula que receberá a fórmula (neste caso, foi a B18). Depois de selecionada a célula, clique no botão “Assistente de funções”.



A janela de funções vai aparecer. Escolha, então, em **Categoria**, a opção “Estatísticas” e, em **Função**, a opção “DESVPADP”, que significa desvio padrão da população.

Escolhida a função, basta clicar em “Próximo”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Nome do estudante	Nota							
2	Alberto	6,5							
3	Ana	5,5							
4	Benê	6,0							
5	Carla	8,0							
6	Cristina	7,0							
7	Catarina	3,5							
8	Fábio	6,5							
9	Maria Benedita	10,0							
10	Maria Cristina	6,5							
11	Otávio	5,0							
12	Paulo	8,0							
13	Rita	6,5							
14	Sônia	4,0							
15	Tarso	5,5							
16	Tyrso	5,0							
17	Vânia	6,0							
18	Desvio padrão								
19									
20									
21									
22									
23									
24									
25									

c) Selecione os valores para o cálculo do desvio padrão. Há pelo menos duas maneiras de selecionar os valores dessa coluna. Uma delas é clicar e arrastar o cursor por toda a coluna.

d) Feito isso, clique em “OK”. Aparecerá então o valor do desvio padrão.

2ª proposta:

Escolha uma das atividades que você realizou neste capítulo e use a planilha eletrônica para resolvê-la novamente.



PALAVRAS-CHAVE

REGISTRE
NO CADERNO



Agora que você concluiu o estudo deste capítulo, retome os conteúdos nele apresentados e suas anotações e produza um resumo sobre as principais ideias aprendidas. Não se esqueça de acrescentar exemplos e mesmo problemas e exercícios que ilustrem essas ideias.



1. Parado no ponto, Silva viu três ônibus passarem. Um era amarelo, um vermelho e o outro branco. Um ia para a Zona Norte, um para a Leste e o outro para a Sul, mas não necessariamente nessa ordem. Aproveitando a lentidão do trânsito, Silva pôde contar o número de ocupantes em cada veículo. O amarelo tinha o dobro do vermelho, que, por sua vez, tinha o triplo do branco. O que ia para a Zona Sul levava 25 pessoas a mais do que o destinado à Zona Norte. Qual a cor, o destino e a quantidade de pessoas de cada veículo?

FOCO NA TECNOLOGIA

Calculadora



Conheça sua calculadora

Além das teclas numéricas, as calculadoras possuem outros dois tipos de tecla.

- Teclas de operações: $+$ $-$ \times \div
- Teclas de funções: x^2 \sqrt{x} $+/-$ \cos etc.

Para usar as teclas de funções, você, geralmente, deve seguir a ordem: digitar o número de entrada e acionar a função. Exemplos:

- a) Digite 3 $.$ 5 , tecla x^2 . No visor: 12,25
- b) Digite 3 , tecla $+/-$. No visor: -3 ou minus 3

ATIVIDADE

1. Experimente você.

a) 3 x^2 \sqrt{x}

c) 5 $1/x$

e) 9 \sqrt{x} $+/-$

b) 3 $+/-$ $+/-$

d) 2 $1/x$ x^2 $+/-$

f) 2 \div 4 $+/-$ $1/x$

CÁLCULO RÁPIDO



Nesta seção, continuaremos a efetuar cálculos com porcentagens.

1. Em um depósito havia 6 000 L de água com 10% de salinidade. Houve evaporação da água e esse índice de salinidade subiu para 20%. Quantos litros de água evaporaram?
2. Juliana comprou um carro por R\$ 36 000,00. Ela deu R\$ 9 000,00 de entrada e o restante será financiado em 18 meses. Qual é a taxa percentual equivalente à quantia total que Juliana deu como entrada?
3. Márcio vendeu sua bicicleta por R\$ 420,00. Quando ele a comprou, pagou R\$ 600,00. Qual é a porcentagem que representa a diferença entre o valor de compra e o valor de venda da bicicleta?
4. Uma pessoa tinha R\$ 1 200,00 em ações na Bolsa de Valores de São Paulo. Quanto dinheiro ela perdeu em um dia no qual a bolsa fechou suas operações em baixa de 6%?
5. Benedito recebe R\$ 500,00 por seu trabalho em um mercadinho. Ele separa 15% do que ganha para almoçar durante o mês, 5% ele gasta na farmácia e dá R\$ 100,00 para ajudar a mãe com as despesas.
 - a) Quanto dinheiro sobra do salário recebido?
 - b) Qual é a porcentagem do dinheiro que ele dá para a mãe?
 - c) Benedito quer comprar um tênis que custa 75% do salário total dele. Ele poderá comprar esse tênis depois de separar o dinheiro para o almoço, pagar a farmácia e ajudar a mãe?



Sistemas lineares

Acompanhe as resoluções dos exercícios de I a V a seguir e veja se compreende cada uma delas. Anote no caderno as dúvidas que surgirem, se há termos desconhecidos, os pontos fáceis e aqueles mais difíceis da resolução. Converse com o professor ou com os colegas para sanar as dúvidas e retomar os métodos de resolução de **sistemas lineares**.

I. Toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ é denominada **equação linear**, em que:

- a_1, a_2, \dots, a_n são os coeficientes;
- x_1, x_2, \dots, x_n são as incógnitas;
- b é um termo independente.

Exemplos:

a) $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5$ é uma equação linear de três incógnitas.

b) $x + y - z + t = -1$ é uma equação linear de quatro incógnitas.

Dada a equação $4x - y + z = 2$, encontre uma de suas soluções.

Resolução

$$x = 0 \quad 4 \cdot 0 - 2 + z = 2$$

$$y = 2 \quad z = 4$$

Uma das soluções da equação é a tripla ordenada $(0, 2, 4)$, mas há outras.

II. Denomina-se sistema linear de m equações nas n incógnitas x_1, x_2, \dots, x_n todo sistema da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

sendo $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}, b_1, b_2, \dots, b_m$ números reais.

Se o conjunto ordenado de números reais $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$ satisfizer a todas as equações do sistema, será denominado solução do sistema linear.

Observações:

1ª) Se o termo independente de todas as equações do sistema for nulo, isto é, $b'_1 = b'_2 = \dots = b'_n = 0$, o sistema linear será dito homogêneo. Veja o exemplo.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ 5x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Uma solução evidente do sistema linear homogêneo é $x = y = z = 0$, denominada **solução trivial** do sistema homogêneo. Se o sistema homogêneo admitir solução em que as incógnitas não são todas nulas, a solução será chamada **solução não trivial**.

2ª) Se dois sistemas lineares, S_1 e S_2 , admitem a mesma solução, eles são ditos **sistemas equivalentes**.

Veja o exemplo.

$$\begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \text{ tem solução } x = 1 \text{ e } y = -2$$

$$\begin{cases} -x - 3y = 5 \\ x - \frac{y}{2} = 2 \end{cases} \text{ tem solução } x = 1 \text{ e } y = -2$$

III. Resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$.

1ª maneira: método da adição

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases} +$$

$$0 + 0 = 7 \text{ impossível}$$

Esse sistema não tem solução, pois sua resolução é impossível.

2ª maneira: método da substituição

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 0x - 0y - 0z = 2 \\ 8z = 0 \end{cases}$$

De (I): $x = 5 - y$

$$\text{Em (II): } -(5 - y) - y = 2$$

$$y - y = 7$$

$$0 = 7$$

Da mesma forma, concluímos que o sistema é impossível.

IV. Discuta os sistemas a seguir, utilizando o método de escalonamento ou eliminação de Gauss.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 4y - 6z = 4 \\ 3x + 6y - z = 3 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ -x + y - 8z = 0 \end{cases}$$

Resolução do item a

Um sistema linear pode ser escrito em forma matricial (de matrizes).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

matriz dos coeficientes matriz de incógnita matriz dos termos independentes

A matriz que representa coeficientes e termos independentes é chamada de **matriz completa do sistema**.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Discutir o sistema é analisar se ele é possível determinado ou indeterminado, ou impossível. Nomeando cada linha da matriz completa associada ao sistema I, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

Para eliminar a primeira incógnita em L_2 e L_3 , vamos fazer $-2L_1 + L_2$ e $-3L_1 + L_3$.

$$\begin{aligned} -2L_1 + L_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ -3L_1 + L_3 &\rightarrow \end{aligned}$$

Essa matriz fornece o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 0x - 0y - 0z = 2 \\ 8z = 0 \end{cases}$$

A segunda equação é impossível de ser resolvida; portanto, o sistema não possui solução, o que nos faz classificá-lo como impossível.

Resolução do item b

Vamos escalonar a matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} -2L_1 + L_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\ L_1 + L_2 &\rightarrow \end{aligned}$$

$$L_2 + L_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -3y + 2z = 0 \\ -5z = 0 \end{cases}$$

Temos que $z = 0$; $y = 0$ e $x = 0$.

A terna $(0, 0, 0)$ é solução do sistema linear e, portanto, o sistema é possível e determinado.

V. Resolva o sistema usando a Regra de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x + y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Resolução

Relembrando a Regra de Cramer

A Regra de Cramer é válida para qualquer sistema $m \times m$ em que o determinante da matriz incompleta do sistema seja diferente de zero. Em geral, temos:

Um sistema linear $m \times m$ com matriz incompleta A é possível e tem solução única

$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Nesse caso, $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, $1 \leq i \leq m$, sendo que A_i é a

matriz que se obtém trocando-se a coluna i dos coeficientes da variável x_i pelos termos independentes do sistema.

Pela Regra de Cramer, vamos calcular todos os determinantes do sistema dado.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0;$$

logo, o sistema tem solução única.

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-16}{-7} = \frac{16}{7}$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}$$

$$z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

A solução do sistema é: $x = \frac{16}{7}$; $y = \frac{9}{7}$; $z = \frac{1}{7}$.

Agora, use o que relembrou e resolva os problemas a seguir.

ATIVIDADES

1. Resolva estes sistemas da forma como preferir.

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y + z = -1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 6 \\ -x - y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ -2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} 3x + y + 2z = 2 \\ x + 2y - z = -1 \\ 3x - 2y - 3z = -11 \end{cases}$$

2. Discuta com os colegas sobre os sistemas a seguir.

$$\text{a)} \begin{cases} 5x + 3y - 11z = 13 \\ 4x - 5y + 4z = 18 \\ 9x - 2y - 7z = 25 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 9 \end{cases}$$

3. Determine m para que este sistema tenha solução trivial:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 5x + 3y + mz = 0 \end{cases}$$

- 4.** Observe o problema a seguir e a forma como três estudantes tentaram resolvê-lo.

Em uma prova de Matemática com uma questão de Álgebra e outra de Geometria, observou-se que:

25 estudantes acertaram as duas questões, 150 estudantes acertaram pelo menos uma das questões, 45 não acertaram a questão de Álgebra e 70 não acertaram a questão de Geometria. Quantos estudantes acertaram cada uma das questões?

Representando por x o número de estudantes que acertaram a questão de Álgebra e por y os que acertaram a questão de Geometria, Cleonice, Janderson e Afilton equacionaram o problema assim:

Cleonice $\begin{cases} x + y = 150 - 25 \\ x + 45 = y + 70 \end{cases}$

$$\text{Janderson} \begin{cases} x + y = 150 + 25 \\ x + 45 = y + 70 \end{cases}$$

$$\text{Ailton} \begin{cases} x + y - 25 = 150 \\ x + 45 = 150 - y + 70 \end{cases}$$

- a) Qual dos três estudantes fez o equacionamento correto da questão?
 - b) Resolva o problema.
- 5.** Clarice, Ivo e Ester tinham juntos 100 mil reais para aplicar por um ano. Clarice escolheu uma aplicação que rendia 15% ao ano. Ivo escolheu uma que rendia 20% ao ano e Ester aplicou a metade do dinheiro em um fundo que rendia 20% ao ano e a outra parte em uma aplicação de risco, com rendimento anual pós-fixado. Depois de um ano, Clarice e Ivo tinham juntos 59 mil reais; Clarice e Ester, 93 mil reais; e Ivo e Ester, 106 mil reais.
- a) Quanto dinheiro cada um tinha no início?
 - b) A aplicação de risco rendeu quanto para Ester?
- 6.** (Unicamp-SP) Um supermercado vende dois tipos de bola, conforme se descreve na tabela abaixo:

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)	Raio médio (cm)
Pequena	25	2
Grande	200	4

- a) Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora e resolva-o para determinar esses valores.
- b) Geralmente, cebolas são consumidas sem casca. Determine a área de casca correspondente a 600 g de cebolas pequenas, supondo que elas sejam esféricas. Sabendo que 600 g de cebolas grandes possuem $192\pi \text{ cm}^2$ de área de casca, indique que tipo de cebola fornece o menor desperdício com cascas.

- 7.** (Aman-RJ) Para que o sistema linear $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ ax + 2y = b \end{cases}$ seja possível e indeterminado, o valor de $a + b$ é:
- a) -1 d) 14
b) 4 e) 19
c) 9

- 8.** (UFU-MG) A prefeitura de uma cidade, preocupada com o meio ambiente e com o problema da falta de espaço físico adequado destinado a depósitos de lixo, criou uma cooperativa de reciclagem em parceria com os moradores de baixa renda. A Tabela 1 fornece os preços de venda (em reais) de cada kg de papel, vidro e plástico referentes à primeira semana dos meses de setembro de 2009 e setembro de 2010; a Tabela 2 expressa a quantidade total (em kg) vendida desses três materiais na primeira semana dos meses mencionados acima e o rendimento (em reais) referentes à venda dos materiais reciclados, obtidos nas referidas semanas.

Tabela 1

	Papel	Vidro	Plástico
Set. 2009	0,30	0,20	0,50
Set. 2010	0,40	0,30	1,0

Tabela 2

	Quantidade (kg)	Rendimento (reais)
Set. 2009	8 000	R\$ 2 580,00
Set. 2010	9 000	R

Sabe-se que, na primeira semana de setembro de 2010, foram vendidos 50% a mais de papel do que o vendido na primeira semana de 2009 e iguais quantidades que aquelas comercializadas na primeira semana de 2009, de vidro e plástico.

Interprete e analise o texto dado, descrevendo expressões matemáticas que conduzam ao valor de **R**. Determine-o.

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Nesta unidade você teve contato com diferentes contextos nos quais o conhecimento matemático é aplicado e permite tomada de decisão. Nos exames e provas seletivas, esse conhecimento tem sido bastante valorizado, ao mesmo tempo em que se exige a habilidade de leitura, a compreensão e uma generalização mais apurada da realidade que os problemas propõem. Veja alguns exemplos de questões com esses objetivos.

ENEM EM CONTEXTO

(Enem-MEC) Um casal realiza um financiamento imobiliário de R\$ 180 000,00, a ser pago em 360 prestações mensais, com taxas de juros efetiva de 1% ao mês. A primeira prestação é paga após a liberação dos recursos e o valor da prestação mensal é de R\$ 500,00 mais juros de 1% sobre o saldo devedor (valor devido antes do pagamento). Observe que, antes de cada pagamento, o saldo devedor se reduz em R\$ 500,00 e considere que não há prestação em atraso.

Efetuando o pagamento dessa forma, o valor, em reais, a ser pago ao banco na décima prestação é de:

- a) R\$ 2 075,00
- b) R\$ 2 093,00
- c) R\$ 2 138,00
- d) R\$ 2 255,00
- e) R\$ 2 300,00

Procure resolver a questão antes de continuar a leitura deste texto.

Resolução

Alguns problemas podem ser resolvidos de diferentes modos. Vamos resolver esse de duas maneiras. Compare cada uma delas com sua resolução.

1º modo:

Embora o casal pague uma prestação todo mês, apenas R\$ 500,00 servem para amortizar (diminuir) a dívida.

Então, no décimo mês, o casal terá pago 9 parcelas de R\$ 500,00 ($9 \cdot 500$ reais = 4,5 mil reais).

Assim, o saldo devedor será, em reais, de R\$ 175 500,00 ($R\$ 180\,000,00 - R\$ 4\,500,00 = R\$ 175\,500,00$).

O juro de 1% sobre esse valor resulta em: 1% de R\$ 175 500,00, que é o mesmo que R\$ 1 755,00.

Assim, a décima prestação é, em reais, de R\$ 2 255,00 ($R\$ 500,00 + R\$ 1\,755,00 = R\$ 2\,255,00$).

2º modo:

1º mês: 1% de R\$ 180 000, mais R\$ 500,00: R\$ 2 300,00

2º mês: 1% de R\$ 179 500, mais R\$ 500,00: R\$ 2 295,00

3º mês: 1% de R\$ 179 000, mais R\$ 500,00: R\$ 2 290,00

Observamos que a diferença é de R\$ 5,00, que vai sendo abatido em cada mês. Temos então uma P.A. com razão -5 .

PA (2300, 2295, 2290, ...), $r = -5$ e $a_{10} = ?$

Logo: $a_n = a_1 + (n - 1)r$

$a_{10} = 2\,300 + (10 - 1)(-5)$

$a_{10} = 2\,255$

Nos dois processos de resolução encontramos a resposta correta na alternativa *d*.

ATIVIDADES

Conteúdo envolvido nesta questão: Matemática financeira.

1. (Enem-MEC) Para aumentar as vendas do início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão de fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R\$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão de fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão de fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

- a) 15,00 b) 14,00 c) 10,00 d) 5,00 e) 4,00

Conteúdo envolvido nesta questão: Probabilidade.

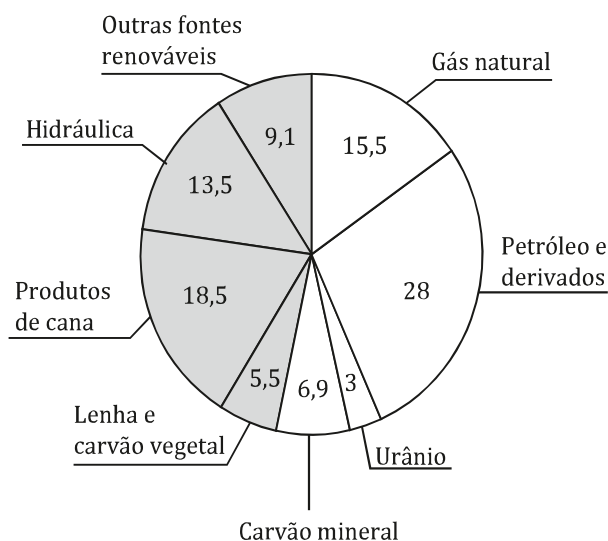
2. (Enem-MEC) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos pra motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado. No início do jogo vira-se uma carta do baralho da mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa, e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:



Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

- a) 9 b) 7 c) 5 d) 4 e) 3

3. (Unicamp-SP) A figura abaixo exhibe, em porcentagem, a previsão da oferta de energia no Brasil em 2030, segundo o Plano Nacional de Energia. Conteúdo envolvido nesta questão: Estatística.



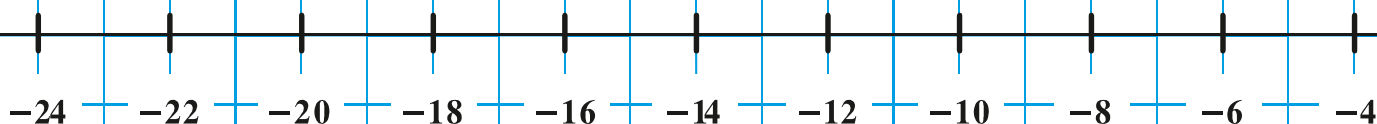
Segundo o plano, em 2030, a oferta total de energia do país irá atingir 557 milhões de tep (toneladas equivalentes de petróleo). Nesse caso, podemos prever que a parcela oriunda de fontes renováveis, indicada em cinza na figura, equivalerá a:

- a) 178,240 milhões de tep. c) 353,138 milhões de tep.
b) 297,995 milhões de tep. d) 259,562 milhões de tep.

Geometria analítica

Você já deve ter ouvido a seguinte frase: "Penso, logo existo". Agora... Você sabe quem fez essa afirmação? Quais foram as contribuições dessa pessoa para o estudo que vamos desenvolver nesta unidade?

"Penso, logo existo", expressão muitas vezes repetida e até mesmo razão de algumas anedotas ou brincadeiras entre palavras...



O autor dessa afirmação foi o filósofo, físico e matemático René Descartes (1596-1650), que fez grandes contribuições sobre o significado de conhecer. O seu livro *Discurso do método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências*, publicado em 1637, foi responsável por uma revolução de todo o pensamento ocidental, pois construiu o alicerce para o desenvolvimento da ciência.



O método filosófico desenvolvido por ele, chamado de método cartesiano, põe em dúvida tanto o mundo das coisas perceptíveis quanto o das abstratas, ou seja, é preciso duvidar de tudo. Para mostrar o alcance desse método, no terceiro apêndice de sua obra, Descartes descreve um tratado geométrico com os fundamentos do que hoje conhecemos como Geometria analítica, tema que estudaremos nesta unidade.

Nesta unidade, você vai...

- conhecer o método cartesiano aplicado à Geometria;
- resolver problemas geométricos pela Álgebra;
- estudar relações entre pontos, retas, circunferências e outras figuras geométricas.

Além disso, nas seções *Aprender a aprender*, vamos retomar o estudo dos seguintes temas: trigonometria do triângulo retângulo; relações trigonométricas em um triângulo qualquer; funções trigonométricas e Geometria métrica espacial.

4

Estudo analítico do ponto

Este e os três próximos capítulos têm como objetivo apresentar a Geometria analítica. O foco desse estudo é a compreensão da descrição algébrica das propriedades geométricas entre pontos, retas e outras figuras, por meio de pares ordenados e equações.

É importante a leitura desse texto com os estudantes. Conhecer os porquês e as motivações que geraram o interesse do ser humano pelo desenvolvimento do conhecimento científico permite que os estudantes se percebam como participantes dessa história e possíveis cientistas no futuro.

Como foi apresentado na abertura desta unidade, com o trabalho de Descartes e seus seguidores, chamados de cartesianos, deu-se início à busca de um método geral com base na razão para desvendar as ciências. A Matemática passou a ser denominada “rainha das ciências”. No terceiro e último capítulo de seu livro, intitulado *La géométrie*, Descartes exemplificou sua teoria apresentando um método racional de unificação da Geometria e da Álgebra, que recebeu o nome de **Geometria analítica**.

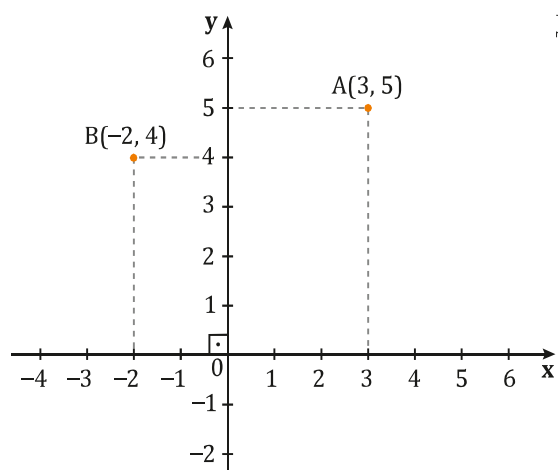
As figuras geométricas passaram a ser representadas no **plano cartesiano ortogonal**. Trata-se de um sistema de eixos ordenados e perpendiculares, de tal forma que cada ponto do plano é identificado por um par ordenado de números reais e vice-versa, correspondendo cada par ordenado de números reais a um único ponto desse plano.

Há muitas discordâncias sobre quem inventou a Geometria analítica e sobre a época em que isso ocorreu. Alguns historiadores a localizam na Antiguidade, salientando que o conceito de fixar a posição de um ponto por meio de coordenadas convenientes teria sido empregado por egípcios e romanos na medição de terras e pelos gregos na confecção de mapas.

Outros historiadores atribuem a invenção da Geometria analítica a Nicole d'Oresme, que nasceu na Normandia em torno de 1323. Oresme, em um de seus tratados de Matemática, antecipou outro aspecto da Geometria analítica ao representar certas leis em gráficos. O tratado de Oresme mereceu várias tiragens, e é possível, assim, que tenha influenciado matemáticos posteriores, inclusive Descartes.

A Geometria analítica pode ser atribuída também a Pierre de Fermat, contemporâneo de Descartes. Em uma carta para um amigo, escrita em setembro de 1636, ele afirma que suas ideias sobre a Geometria analítica já tinham, a essa altura, sete anos.

De qualquer modo, para que a Geometria analítica pudesse assumir sua apresentação atual, altamente prática, teve de aguardar o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Portanto, talvez seja mais correto concordar com a maioria dos historiadores, que consideram as decisivas contribuições dos matemáticos franceses Descartes e Fermat, no século XVII, como a origem essencial da matéria, pelo menos em seu espírito moderno. Só depois do impulso desses dois matemáticos encontramos a Geometria analítica na forma como a conhecemos e como vamos estudá-la nesta unidade. Para saber mais sobre Descartes e seu método, você pode pesquisar a respeito.



Ao ponto A corresponde o par $(3, 5)$. Ao par $(-2, 4)$ corresponde o ponto B.



Pierre de Fermat (1601-1665).

Rolland Lefebvre, Pierre Fermat, c.17th/18th, The Bridgman Art Library/Grupo Keystone

Situe-se

Desde o início de seus estudos, a Geometria tem sido um conjunto de conhecimentos importante para o desenvolvimento de seu pensar matemático.

Neste e nos três próximos capítulos, apresentamos a Geometria analítica, um tema importante da Matemática e que busca traduzir pontos, retas e demais figuras geométricas por meio da Álgebra.

Assim, propriedades e construções geométricas podem ser descritas por equações e variáveis.

1 O referencial cartesiano

Em todo o estudo da Geometria analítica, utilizaremos o **plano cartesiano** — um sistema formado por dois eixos perpendiculares entre si no ponto **O**, como se vê na figura ao lado.

Ox — eixo das abscissas

Oy — eixo das ordenadas

Cada ponto **P** do plano possui uma abscissa x_p e uma ordenada y_p , que indicamos pelo par (x_p, y_p) e chamamos de **coordenadas cartesianas de P**.

Os dois eixos dividem o plano cartesiano em quatro regiões ou **quadrantes**.

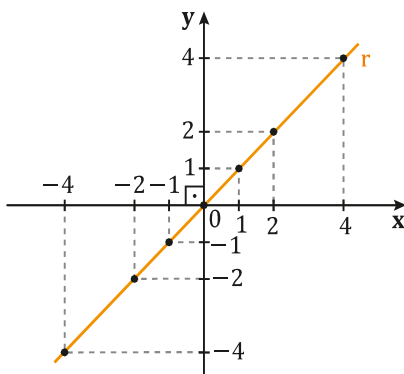
Os pontos do 1º quadrante, por exemplo, possuem as duas coordenadas positivas, e os do 3º quadrante possuem as duas coordenadas negativas.

Quanto às retas de um plano cartesiano, vamos, inicialmente, dar destaque a duas.

a) Bissetriz do 1º e do 3º quadrantes

Pertencem a essa reta (**r**) todos os pontos que têm abscissa igual à ordenada, ou seja:

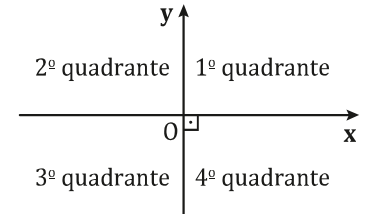
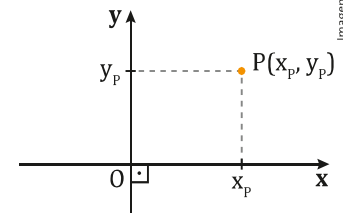
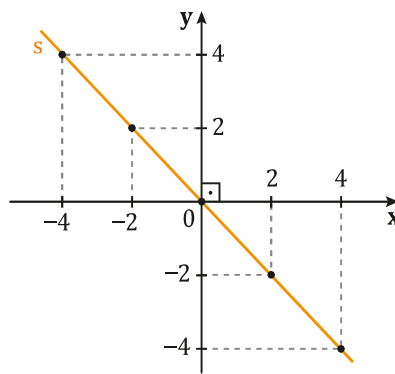
$$\text{se } A(x_A, y_A) \in r, \text{ então } x_A = y_A.$$



b) Bissetriz do 2º e do 4º quadrantes

Pertencem a essa reta (**s**) todos os pontos que têm abscissa igual ao oposto da ordenada, ou seja:

$$\text{se } A(x_A, y_A) \in s, \text{ então } x_A = -y_A.$$



FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Se tiver dúvidas durante a resolução desta sequência de atividades, revise seus conhecimentos: faça (ou refaça) as atividades propostas no **Aprender a aprender** da unidade 1; consulte o dicionário, se achar necessário; retome os tópicos referentes ao assunto no volume do 1º ano.

1. Localize no plano cartesiano os pontos $A(3, 4)$, $B(-2, 6)$, $C(-4, -5)$, $D(5, -2)$, $E(3, 0)$, $F(0, 4)$, $G(-3, 0)$ e $H(0, -3)$.
2. Usando um plano cartesiano para cada item, localize estes pontos.
 - a) $A(5, 5)$, $B(-3, -3)$, $C(0, 0)$, $D(2, 2)$
 - b) $A(-4, 4)$, $B(1, -1)$, $C(-2, 2)$, $D(3, -3)$
 - c) $A(-6, 0)$, $B\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, $C(\sqrt{2}, 0)$, $D(-\sqrt{3}, 0)$
 - d) $A(0, \pi)$, $B\left(0, -\frac{5}{2}\right)$, $C(0, -4)$, $D(0, -\sqrt{5})$

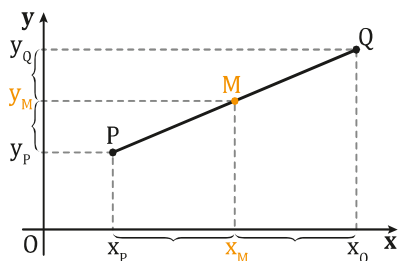
3. Considere os pontos $A(3, -5)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$ e $D(x_D, y_D)$. Determine:
 - a) x_B , x_C e x_D para que **A**, **B**, **C** e **D** pertençam à mesma reta paralela ao eixo y .
 - b) y_B , y_C e y_D para que **A**, **B**, **C** e **D** pertençam à mesma reta paralela ao eixo x .
4. Quais são os sinais das coordenadas de um ponto qualquer do 2º quadrante? E do 4º quadrante?
5. Determine **m** para que o ponto $M(m, 5)$ pertença ao(à):
 - a) eixo y .
 - b) 1º quadrante.
 - c) 2º quadrante.
 - d) bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.
 - e) bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.
 - f) 3º quadrante.
6. Determine **n** para que $N(-2, n)$ pertença ao(à):
 - a) eixo x .
 - b) 2º quadrante.
 - c) 3º quadrante.
 - d) bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.
 - e) bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.
 - f) 1º quadrante.

2 Ponto médio

Dados dois pontos $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$, vamos obter as coordenadas do ponto médio do segmento PQ .

Seja $M(x_M, y_M)$ o ponto médio de \overline{PQ} .

Suponhamos que \overline{PQ} não seja paralelo ao eixo x nem ao eixo y . Como M é ponto médio, então $PM = MQ$ e, pelo Teorema de Tales, a abscissa x_M está a igual distância de x_p e x_q , ou seja, x_M é a **média aritmética** de x_p e x_q . O mesmo raciocínio pode ser aplicado a y_M .



Teorema: Quaisquer que sejam os pontos $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$, se $M(x_M, y_M)$ é o ponto médio de \overline{PQ} , então:

$$x_M = \frac{x_p + x_q}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_p + y_q}{2}$$

As mesmas relações são válidas quando \overline{PQ} é paralelo ao eixo x ou ao eixo y .

FIQUE CONECTADO

Para ampliar sua visão sobre a Geometria, sugerimos a leitura do texto "A beleza da dissimetria", que está no livro *A vida secreta dos números*, de George G. Szpiro (Difel).

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

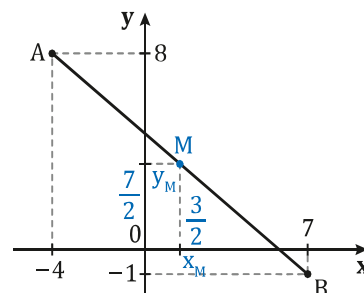
R1. Calcule as coordenadas do ponto médio do segmento AB cujas extremidades são $A(-4, 8)$ e $B(7, -1)$.

Resolução

Para encontrar as coordenadas do ponto médio, fazemos:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{-4 + 7}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{8 + (-1)}{2} \Rightarrow y_M = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Portanto, $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.



3 Baricentro de um triângulo

Seja $G(x_G, y_G)$ o **baricentro de um triângulo** ABC , $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. Vamos lembrar que:

- baricentro de um triângulo é o ponto de interseção das medianas desse triângulo.
- o baricentro divide cada mediana em dois segmentos tais que aquele que contém o vértice é o dobro do outro.

Na figura ao lado:

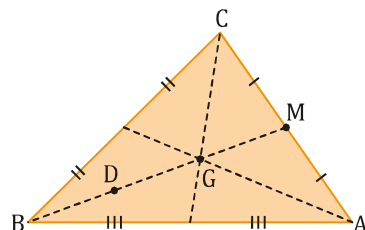
- M é o ponto médio de \overline{AC} ; então:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} & (1) \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} & (2) \end{cases}$$

- na mediana \overline{BM} , seja D o ponto médio de \overline{BG} ; logo, \overline{BM} fica dividido em 3 partes congruentes entre si pelos pontos D e G ; então:

$$G: \text{ponto médio de } \overline{DM} \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_D + x_M}{2} & (3) \\ y_G = \frac{y_D + y_M}{2} & (4) \end{cases}$$

$$D: \text{ponto médio de } \overline{BG} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{x_B + x_G}{2} & (5) \\ y_D = \frac{y_B + y_G}{2} & (6) \end{cases}$$



Imagens: Zapt

Substituindo (5) em (3), temos:

$$x_G = \frac{\frac{x_B + x_C}{2} + x_M}{2} \Rightarrow x_G = \frac{x_B + 2x_M}{3} \quad (7)$$

Substituindo (1) em (7), resulta $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$.

De forma análoga, obtemos $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Teorema: Se $G(x_G, y_G)$ é o baricentro do triângulo ABC, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, então:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

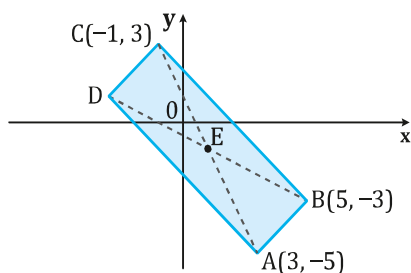
DE OLHO NA RESOLUÇÃO

Converse com os estudantes sobre a relação entre paralelogramos e retângulos.

Análise atentamente a resolução desta atividade resolvida e aproveite para relembra, ou aprender, algumas noções sobre figuras planas.

R2. $A(3, -5)$, $B(5, -3)$ e $C(-1, 3)$ são vértices de um paralelogramo ABCD. Determine o ponto de interseção das diagonais e o 4º vértice.

Resolução



Seja **E** o ponto comum às diagonais \overline{AC} e \overline{BD} ; então

E é ponto médio de \overline{AC} . Nesse caso:

$$\begin{cases} x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} \Rightarrow x_E = 1 \\ y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-5 + 3}{2} \Rightarrow y_E = -1 \end{cases}$$

Logo, $E(1, -1)$ é o ponto de interseção das diagonais.

E é ponto médio de \overline{BD} . Então:

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = x_E \Rightarrow \frac{5 + x_D}{2} = 1 \Rightarrow x_D = -3 \\ \frac{y_B + y_D}{2} = y_E \Rightarrow \frac{-3 + y_D}{2} = -1 \Rightarrow y_D = 1 \end{cases}$$

Logo, $D(-3, 1)$ é o 4º vértice.

R3. $M(2, -1)$, $N(-1, 4)$ e $P(-2, 2)$ são os pontos médios, respectivamente, dos lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} de um triângulo. Determine **A**, **B**, **C** e o baricentro **G** do $\triangle ABC$.

Resolução

M: ponto médio de \overline{AB} . Então:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = 2 \Rightarrow x_A + x_B = 4 \quad (1) \\ \frac{y_A + y_B}{2} = -1 \Rightarrow y_A + y_B = -2 \quad (2) \end{cases}$$

N: ponto médio de \overline{BC} . Então:

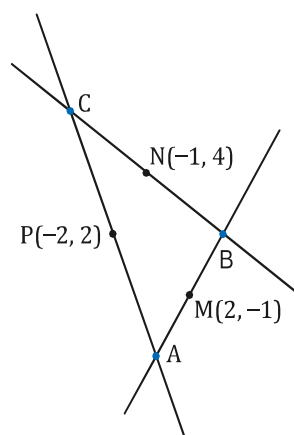
$$\begin{cases} \frac{x_B + x_C}{2} = -1 \Rightarrow x_B + x_C = -2 \quad (3) \\ \frac{y_B + y_C}{2} = 4 \Rightarrow y_B + y_C = 8 \quad (4) \end{cases}$$

P: ponto médio de \overline{AC} . Então:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = -2 \Rightarrow x_A + x_C = -4 \quad (5) \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 2 \Rightarrow y_A + y_C = 4 \quad (6) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Rightarrow \underbrace{x_A + x_C}_{-4} + 2x_B = 2 \Rightarrow x_B = 3$$

Substituindo em (1) e (3), temos $x_A = 1$ e $x_C = -5$.



$$(2) + (4) \Rightarrow \underbrace{y_A + y_C}_4 + 2y_B = 6 \Rightarrow y_B = 1$$

Substituindo em (2) e (4), temos $y_A = -3$ e $y_C = 7$.

Desse modo, temos que:

$A(1, -3)$, $B(3, 1)$ e $C(-5, 7)$

Para o ponto **G**, temos:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1 + 3 + (-5)}{3} \Rightarrow x_G = -\frac{1}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-3 + 1 + 7}{3} \Rightarrow y_G = \frac{5}{3}$$

Portanto, $G\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$.



7. Determine o ponto médio do segmento AB, sendo:
- $A = (1, 3)$ e $B = (-2, 5)$.
 - $A = (7, 0)$ e $B = (1, -4)$.
 - $A = (0, 0)$ e $B = (-3, 2)$.
8. O ponto médio de um segmento PQ é $M(5, 4)$. Quais são as coordenadas de Q se:
- $P(-3, 2)$?
 - $P(0, 0)$?
9. Sendo os pontos $A(2, 10)$ e $B(8, -2)$, quais são as coordenadas dos pontos que dividem o segmento AB em quatro segmentos congruentes?
10. Os vértices de um triângulo são $A(1, -3)$, $B(3, -5)$ e $C(-5, 7)$. Determine os pontos médios M , N e P , respectivamente, de \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , e os baricentros G_1 e G_2 , respectivamente, do $\triangle ABC$ e do $\triangle MNP$.

11. Um triângulo ABC é tal que os pontos médios de seus lados são $(-1, 3)$, $(1, 6)$ e $(3, 5)$. Quais são as coordenadas dos três vértices do triângulo?
12. Em um triângulo ABC, sabe-se que $A(2, -3)$, $B(-5, 1)$, C pertence ao eixo das ordenadas e o baricentro G pertence ao eixo das abscissas. Determine C e G.
13. Determine o baricentro de um triângulo ABC, sabendo que $A(0, -2)$ e que $M(6, 7)$ é o ponto médio de \overline{BC} .
14. (UFF-RJ) A palavra “perímetro” vem da combinação de dois elementos gregos: o primeiro, *perí*, significa “em torno de”, e o segundo, *metron*, significa “medida”. O perímetro do trapézio cujos vértices têm coordenadas $(-1, 0)$, $(9, 0)$, $(8, 5)$ e $(1, 5)$ vale:
- $10 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$
 - $16 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$
 - $22 + \sqrt{26}$
 - $17 + 2\sqrt{26}$
 - $17 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$

FOCO NA LEITURA



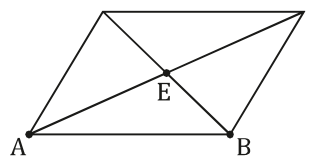
Atividades como as que você acaba de resolver e muitas outras que envolvem figuras geométricas podem ser mais bem entendidas se fizermos um desenho com as informações do enunciado.

Fazer um esboço, ou seja, um desenho simplificado da situação sem preocupação com medidas exatas, é uma habilidade importante para visualizar melhor o que se sabe e o que se quer responder em cada problema geométrico. Vamos fazer isso juntos para a questão a seguir.

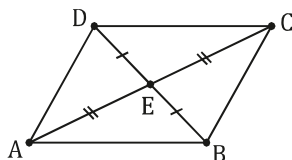
$A(-3, 5)$ e $B(1, 7)$ são vértices consecutivos de um paralelogramo, e $E(1, 1)$ é o ponto de interseção de suas diagonais. Determine os outros vértices desse paralelogramo.

Desenhando um paralelogramo qualquer, vamos posicionar no desenho os pontos A, B e E.

Em um esboço, não há preocupação com a posição real dos pontos no plano. O desenho deve nos ajudar a pensar sobre a resolução do problema.



- O que se pede na questão?
Os vértices C e D, que podemos denotar por $C(x_c, y_c)$ e $D(x_d, y_d)$.
- O que se sabe? Que relação geométrica envolvendo diagonais de um paralelogramo podem ajudar a encontrar C e D? Nesse caso, a propriedade que permite resolver a questão é que as diagonais de um paralelogramo se encontram em seus pontos médios, ou seja:



$AE = EC$ e $BE = ED$ ou E é ponto médio de \overline{AC} e E é ponto médio de \overline{BD} .

Algebricamente, essas relações geométricas são representadas por: $x_E = \frac{x_A + x_C}{2}$ e $y_E = \frac{y_A + y_C}{2}$

Substituindo os valores conhecidos, temos: $1 = \frac{-3 + x_c}{2}$ e $1 = \frac{5 + y_c}{2}$

Daí: $x_c = 5$ e $y_c = -3$. Encontramos o ponto $C(5, -3)$.

- Termine a resolução determinando o ponto D.

Análise bem as etapas de resolução apresentadas para esse problema e observe como a leitura do texto e a representação na forma de um esboço favorecem visualizar a situação e elaborar uma estratégia de resolução. Essas etapas serão usadas na resolução de boa parte dos problemas de Geometria analítica.

INVENTE VOCÊ

Aproveite esta proposta para esclarecer dúvidas dos estudantes. Eles podem criar os problemas em duplas ou trios e depois trocar para que uns resolvam os problemas criados pelos outros.

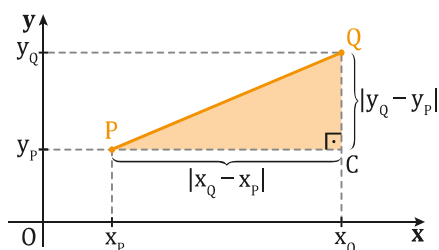
REGISTRE
NO CADERNO



1. Elabore um problema sobre baricentro cuja resposta seja $G(5, 6)$.

4 Distância entre dois pontos

Sejam os pontos $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$ representados no gráfico abaixo.



Como podemos calcular a distância entre **P** e **Q**?

Inicialmente, vamos supor que $x_p \neq x_q$ e $y_p \neq y_q$. O segmento PC mede $|x_q - x_p|$ e o segmento QC mede $|y_q - y_p|$.

A distância entre **P** e **Q** é igual à medida da hipotenusa do triângulo PQC, retângulo em C.

Para calcular essa medida, aplicamos o Teorema de Pitágoras.

$$(PQ)^2 = (PC)^2 + (QC)^2 \text{ ou } (PQ)^2 = (x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2$$

$$PQ = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

Essa relação é válida também quando $x_p = x_q$ e $y_p = y_q$.

Teorema: Quaisquer que sejam $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$ no plano cartesiano, temos:

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

Como $(x_q - x_p)^2 = (x_p - x_q)^2$ e $(y_q - y_p)^2 = (y_p - y_q)^2$, podemos também escrever:

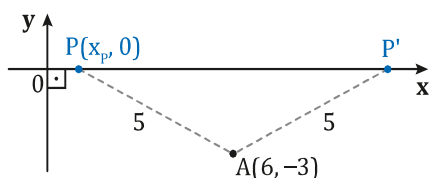
$$d_{PQ} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}.$$

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

- R4.** Determine, no eixo das abscissas, um ponto que dista 5 unidades de $A(6, -3)$.

Resolução

Imagens: Zapt



Seja **P** um ponto que pertence ao eixo **x**; então $P(x_p, 0)$.

Como $d_{PA} = 5$, temos:

$$\sqrt{(x_p - 6)^2 + [0 - (-3)]^2} = 5$$

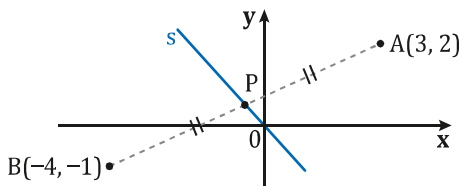
$$\text{Então } (x_p - 6)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow (x_p - 6)^2 = 16 \Rightarrow x_p - 6 = 4 \text{ ou}$$

$$x_p - 6 = -4; \text{ logo, } x_p = 2 \text{ ou } x_p = 10.$$

Portanto, $P(2, 0)$ ou $P'(10, 0)$.

- R5.** Determine, na bissetriz do 2º e do 4º quadrantes, o ponto equidistante de A(3, 2) e de B(-4, -1).

Resolução



Seja s a bissetriz dos quadrantes pares.

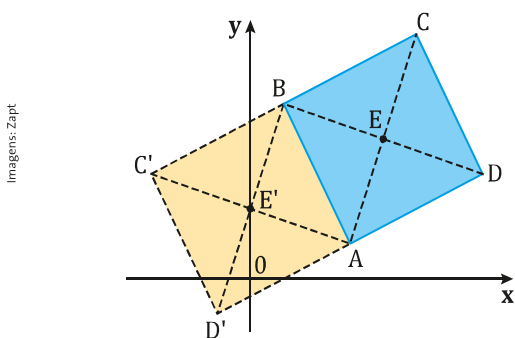
Se $P \in s$, então $P(x_p, -x_p)$.

Como $d_{PA} = d_{PB}$, temos:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_p - 3)^2 + (-x_p - 2)^2} &= \sqrt{[x_p - (-4)]^2 + [-x_p - (-1)]^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow (x_p - 3)^2 + (-x_p - 2)^2 &= (x_p + 4)^2 + (-x_p + 1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_p^2 - 6x_p + 9 + x_p^2 + 4x_p + 4 &= \\ = x_p^2 + 8x_p + 16 + x_p^2 - 2x_p + 1 &\Rightarrow -8x_p - 4 = 0 \Rightarrow x_p = -\frac{1}{2} \\ \text{Portanto, } P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

- R6.** Os pontos A(3, 1) e B(1, 5) são vértices consecutivos de um quadrado ABCD. Determine os outros vértices.

Resolução



Existem dois quadrados com vértices consecutivos A e B: ABCD e ABC'D'.

Para determinar C, D, C' e D', vamos obter, inicialmente, o ponto de interseção das diagonais.

Medida do lado do quadrado:

$$d_{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2} \Rightarrow d_{AB} = 2\sqrt{5}$$

Medida da diagonal do quadrado:

$$d_{AC} = d_{AB} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d_{AC} = 2\sqrt{10}$$

$$\begin{aligned} \text{E: ponto médio de } \overline{AC} \text{ e de } \overline{BD} \Rightarrow d_{AE} &= d_{BE} = \frac{d_{AC}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow d_{AE} &= d_{BE} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Seja $E(x_E, y_E)$, temos:

$$\begin{aligned} d_{AE} &= \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(x_E - 3)^2 + (y_E - 1)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_E^2 - 6x_E + 9 + y_E^2 - 2y_E + 1 &= 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_E^2 - 6x_E + y_E^2 - 2y_E &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{BE} &= \sqrt{10} \Rightarrow \sqrt{(x_E - 1)^2 + (y_E - 5)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_E^2 - 2x_E + 1 + y_E^2 - 10y_E + 25 &= 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_E^2 - 2x_E + y_E^2 - 10y_E &= -16 \quad (2) \end{aligned}$$

Subtraindo (2) de (1), obtemos:

$$-4x_E + 8y_E = 16 \Rightarrow x_E - 2y_E = -4 \Rightarrow x_E = 2y_E - 4 \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1), resulta:

$$\begin{aligned} (2y_E - 4)^2 - 6(2y_E - 4) + y_E^2 - 2y_E &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4y_E^2 - 16y_E + 16 - 12y_E + 24 + y_E^2 - 2y_E &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5y_E^2 - 30y_E + 40 &= 0 \Rightarrow y_E^2 - 6y_E + 8 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y_E = 2 \text{ ou } y_E = 4 \end{aligned}$$

Em (3):

$$y_E = 2 \Rightarrow x_E = 0$$

$$y_E = 4 \Rightarrow x_E = 4$$

Logo, E(4, 4) e E'(0, 2).

Determinação de C e D:

E é ponto médio de \overline{AC} , então:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = x_E \Rightarrow \frac{3 + x_C}{2} = 4 \Rightarrow x_C = 5 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = y_E \Rightarrow \frac{1 + y_C}{2} = 4 \Rightarrow y_C = 7 \end{cases}$$

E é ponto médio de \overline{BD} , então:

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = x_E \Rightarrow \frac{1 + x_D}{2} = 4 \Rightarrow x_D = 7 \\ \frac{y_B + y_D}{2} = y_E \Rightarrow \frac{5 + y_D}{2} = 4 \Rightarrow y_D = 3 \end{cases}$$

Portanto, C(5, 7) e D(7, 3).

Determinação de C' e D':

E' é ponto médio

$$\text{de } \overline{AC'}, \text{ então: } \begin{cases} \frac{3 + x_{C'}}{2} = 0 \Rightarrow x_{C'} = -3 \\ \frac{1 + y_{C'}}{2} = 2 \Rightarrow y_{C'} = 3 \end{cases}$$

E' é ponto médio

$$\text{de } \overline{BD'}, \text{ então: } \begin{cases} \frac{1 + x_{D'}}{2} = 0 \Rightarrow x_{D'} = -1 \\ \frac{5 + y_{D'}}{2} = 2 \Rightarrow y_{D'} = -1 \end{cases}$$

Portanto, C'(-3, 3) e D'(-1, -1).

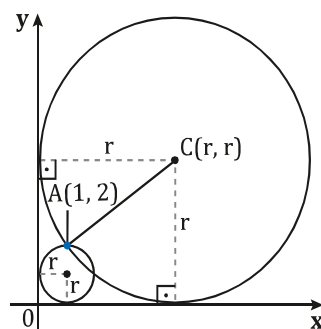
- R7.** Determine o centro da circunferência que passa pelo ponto A(1, 2) e tangencia os eixos coordenados.

Resolução

Há duas circunferências que satisfazem a condição solicitada; ambas têm o centro na bissetriz do 1º e do 3º quadrantes. Indicando o centro de uma delas por C(r, r), temos:

$$\begin{aligned} d_{CA} &= r \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{(r-1)^2 + (r-2)^2} &= r \Rightarrow \\ \Rightarrow r^2 - 2r + 1 + r^2 - 4r + 4 &= r^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow r^2 - 6r + 5 &= 0 \Rightarrow r = 1 \text{ ou } r = 5 \end{aligned}$$

Portanto, o centro de uma das circunferências tem coordenadas (5, 5) e o da outra, coordenadas (1, 1).



Cálculo de $A_{\triangle ABC}$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot d_{AE} \cdot d_{BD} + \frac{1}{2} \cdot d_{AE} \cdot d_{CF} = \frac{1}{2} \cdot d_{AE} (d_{BD} + d_{CF}) = \frac{1}{2} \cdot d_{AE} \cdot d_{CG} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{(x_A - x_C)(y_B - y_C) + (x_C - x_B)(y_A - y_C)}{y_B - y_C} \right| \cdot |y_B - y_C| \Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C|$$

$$\text{Como } x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = D,$$

$$\text{então } A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|.$$

O cálculo feito para a área do $\triangle ABC$ pode ser repetido para qualquer outro triângulo, o que resulta neste teorema.

Teorema: A área de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Você se lembra dos determinantes? Se não se lembra, vai aqui uma dica: basta saber que a representação

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \text{ é o mesmo que}$$

$$x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C.$$

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R8. Calcule a área do triângulo de vértices $A(4, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(-5, 0)$.

Resolução

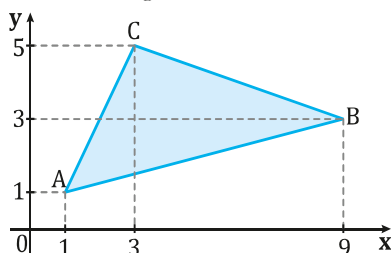
$$D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 10 - 5 + 6 = -13$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ logo } A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |-13|, \text{ e } A_{\triangle ABC} = \frac{13}{2}.$$

R9. Calcule a área do triângulo de vértices $A(1, 1)$, $B(9, 3)$ e $C(3, 5)$ sem utilizar a fórmula $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$.

Resolução

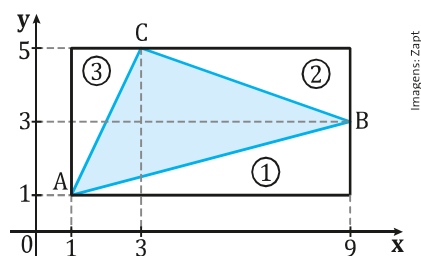
Vamos desenhar o triângulo ABC.



Poderíamos calcular a área desse triângulo fazendo $A_{\triangle} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$. No entanto, essa relação só seria de fácil

aplicação se o triângulo tivesse sua base horizontal ou vertical, o que não é o caso. Por isso, temos de procurar outro caminho.

Observe que podemos “cercar” o triângulo por um retângulo, como mostra a figura.



Veja que a área do triângulo ABC é encontrada quando fazemos a área do retângulo menos as áreas das regiões ①, ② e ③, que são triângulos retângulos.

Os lados do retângulo medem 8 ($9 - 1 = 8$) e 4 ($5 - 1 = 4$).

A área do retângulo é $8 \cdot 4 = 32$.

A área da região ① é a área do triângulo de catetos 8 ($9 - 1 = 8$) e 2 ($3 - 1 = 2$), ou seja, $A_{\text{①}} = \frac{8 \cdot 2}{2} = 8$.

Do mesmo modo, calculamos $A_{\text{②}} = 6$ e $A_{\text{③}} = 4$.

Então: $A_{\triangle ABC} = A_{\square} - A_{\text{①}} - A_{\text{②}} - A_{\text{③}} = 32 - 8 - 6 - 4 = 14$

Como você pôde perceber, essa última atividade resolvida mostra que há dois processos para se calcular a área do triângulo:

- o primeiro elimina o desenho, o concreto, o experimental (apesar de tê-los usado para determinar a fórmula), pois, dadas as coordenadas dos três vértices, é só montar o determinante, verificar o seu valor e teremos a área. Esse é o **método cartesiano**;

- o segundo processo requer o desenho, exige o concreto, o visual. Os cálculos vão depender da posição dos três vértices e vão variar para cada trio de vértices dados.

Você observará daqui para a frente que alguns dos problemas podem ser resolvidos fazendo-se um bom desenho, mas o “espírito” da Geometria analítica é a resolução de problemas geométricos por meio de recursos algébricos, que independem de se ter um desenho.

6 Condição de alinhamento de três pontos

Consideremos três pontos, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, pertencentes à mesma reta r .

Inicialmente, vamos analisar a seguinte possibilidade: r não é paralela a nenhum dos eixos coordenados e $A \neq B$, $A \neq C$, $B \neq C$.

Qualquer que seja a ordem de **A**, **B** e **C**, podemos construir os triângulos retângulos ABD e BCE semelhantes entre si; logo:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} \Rightarrow \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \frac{x_C - x_B}{y_C - y_B} \Rightarrow$$

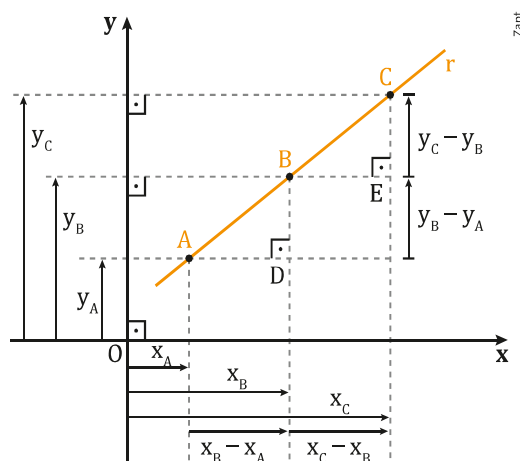
$$\Rightarrow x_B y_C - x_B y_B - x_A y_C + x_A y_B = x_C y_B - x_C y_A - x_B y_B + x_B y_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C = 0 \quad (1)$$

Notando que $x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C$ é o

determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$, podemos reescrever a equação (1):

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$



Agora, vamos analisar o determinante **D** quando r é paralela a um dos eixos.

- Se r é paralela ao eixo x , então $y_A = y_B = y_C$ e $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_A & 1 \\ x_C & y_A & 1 \end{vmatrix}$ é nulo (2ª e 3ª colunas proporcionais).
- Se r é paralela ao eixo y , então $x_A = x_B = x_C$ e $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_A & y_B & 1 \\ x_A & y_C & 1 \end{vmatrix}$ é nulo (1ª e 3ª colunas proporcionais).

Portanto, podemos enunciar: Se **A**, **B** e **C** são colineares, então $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$. (1)

Notemos que a recíproca (2) é também verdadeira, ou seja:

Se $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$, então **A**, **B** e **C** são colineares. (2)

Justificativa: Se **A**, **B** e **C** não fossem colineares, existiria o triângulo ABC cuja área $\frac{1}{2} \cdot |D|$ é não nula, e **D** não seria nulo, o que contraria $D = 0$.

De (1) e (2), podemos escrever a condição de alinhamento de três pontos.

Teorema: **A**, **B** e **C** são colineares $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R10. Verifique se os pontos a seguir são colineares.

a) $A(-3, -5)$, $B(1, 3)$ e $C(-1, -1)$.

b) $A(-1, 4)$, $B(5, -2)$ e $C(2, 3)$.

Resolução

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -3 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 + 5 - 1 + 3 - 3 + 5 = 0$$

Como $D = 0$, os pontos estão alinhados ou são colineares.

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 8 + 15 + 4 - 20 + 3 = 12 \neq 0$$

Como $D \neq 0$, esses pontos não são colineares.

R11. Quais são os valores de m para os quais os pontos

$A(-6, 0)$, $B(3, 3)$ e $C(m^2, m + 2)$ estão alinhados?

Resolução

Pela condição de alinhamento dos três pontos:

$$\begin{vmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ m^2 & m + 2 & 1 \end{vmatrix} = 18 + 3(m + 2) - 3m^2 - (-6)(m + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ ou } m = 3.$$

Daí o ponto C pode ser $C = (0, 2)$ ou $C = (9, 5)$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO

Se tiver dúvidas nesta sequência de atividades, releia o texto das páginas 80 a 86 e as atividades resolvidas.

24. Calcule a área dos triângulos de vértices:

a) $A(2, -3)$, $B(3, 2)$ e $C(-2, 5)$.

b) $A(-3, 2)$, $B(5, -2)$ e $C(1, 3)$.

c) $A(3, -4)$, $B(-2, 3)$ e $C(4, 5)$.

25. Calcule a área do triângulo da atividade 24, item a, sem usar determinante.

26. Calcule a área do paralelogramo ABCD, dados os vértices consecutivos $A(-2, 3)$, $B(4, -5)$ e $C(-3, 1)$.

27. Determine, em cada caso, o vértice $C(x_c, y_c)$ do $\triangle ABC$, dados $A_{\triangle ABC} = 4$, $A(3, 1)$ e $B(1, -3)$.

a) C pertence ao eixo x .

b) C pertence ao eixo y .

c) C pertence à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.

d) C pertence à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.

e) $x_c = 2y_c$

f) $y_c = 2x_c - 5$

28. Verifique se os pontos a seguir são colineares.

a) $A(3, -5)$, $B(-3, 3)$ e $C(-1, -2)$

b) $A(1, -1)$, $B(3, 3)$ e $C(4, 5)$

29. Determine m para que A , B e C sejam colineares.

a) $A(-12, -13)$, $B(-2, -5)$, $C(3, m)$

b) $A(2, -3)$, $B(-6, 5)$, $C(m, -5)$

c) $A(-7, 3)$, $B(5, 3)$, $C(m, 4)$

30. Determine, em cada caso, o ponto $P(x_p, y_p)$ alinhado com $A(7, 3)$ e $B(23, -6)$.

a) P pertence ao eixo x .

b) P pertence ao eixo y .

c) P pertence à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.

d) P pertence à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.

e) $y_p = 2x_p$

f) $x_p + y_p = 3$

31. Determine o ponto P pertencente às retas AB e CD , dados $A(1, 3)$, $B(-2, -6)$, $C(1, 1)$ e $D(-2, 4)$.

32. (ITA-SP) Sejam $A = (0, 0)$, $B = (0, 6)$ e $C = (4, 3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A , em unidades de distância, é igual a:

a) $\frac{5}{3}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{97}}{3}$

e) $\frac{10}{3}$

c) $\frac{\sqrt{109}}{3}$

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

REGISTRE
NO CADERNO

1. Em uma árvore de Natal, as lâmpadas amarelas piscam a cada 15 segundos, as vermelhas a cada 12 segundos e as verdes a cada 10 segundos. Supondo que às 23 h 47 min todas as lâmpadas piscaram ao mesmo tempo, quais lâmpadas piscarão simultaneamente às 24 h 00 min?

2. André, Bernardo e Cláudio dão um passeio de bicicleta. Cada um anda na bicicleta dos amigos e leva o chapéu de um dos outros. O que leva o chapéu de Cláudio anda na bicicleta de Bernardo. Quem anda na bicicleta de André?

3. (Enem-MEC) Você pode adaptar as atividades do seu dia a dia de uma forma que possa queimar mais calorias do que as gastas normalmente, conforme a relação seguinte:

- Enquanto você fala ao telefone, faça agachamentos: 100 calorias gastas em 20 minutos.
- Meia hora de supermercado: 100 calorias.
- Cuidar do jardim por 30 minutos: 200 calorias.
- Passear com o cachorro: 200 calorias em 30 minutos.
- Tirar o pó dos móveis: 150 calorias em 30 minutos.

- Lavar roupas por 30 minutos: 200 calorias.

Disponível em: <http://cyberdiet.terra.com.br>. Acesso em: 27 abr. 2010 (adaptado).

Uma pessoa deseja executar essas atividades, porém, ajustando o tempo para que, em cada uma, gaste igualmente 200 calorias.

A partir dos ajustes, quanto tempo a mais será necessário para realizar todas as atividades?

- a) 50 minutos. d) 120 minutos.
b) 60 minutos. e) 170 minutos.
c) 80 minutos.

APRENDER A APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO

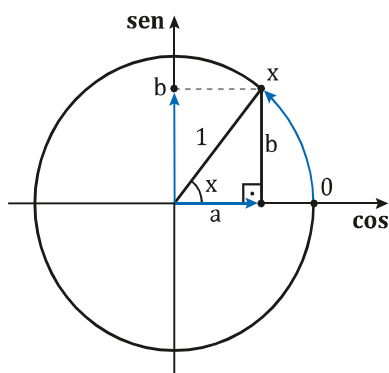


Trigonometria do triângulo retângulo

A figura e a tabela são para você recordar as definições de seno e cosseno de um ângulo, bem como os valores de seno e cosseno dos chamados **ângulos notáveis**, em graus e radianos.

$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{1} = b$$

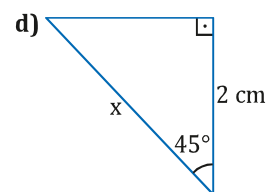
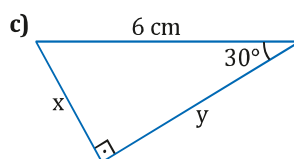
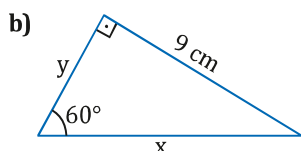
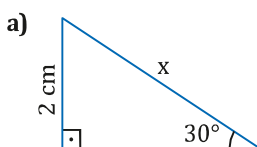
$$\text{cos } x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{1} = a$$



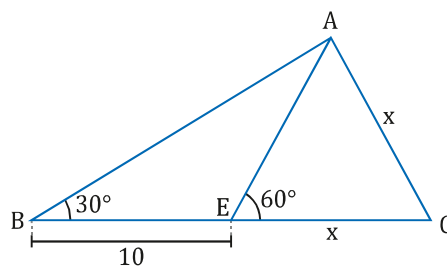
x	0(0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)
sen x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

ATIVIDADES

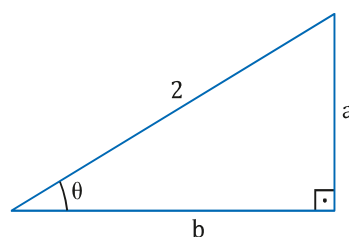
1. Em cada caso, use as informações dadas na figura e calcule os valores de x e y.



2. De uma rua plana, uma pessoa avista um helicóptero sob um ângulo de 30°. A pessoa anda 10 m na direção do helicóptero e o avista ainda à mesma altura e à sua frente, dessa vez sob um ângulo de 60°. A que altura está o helicóptero?
3. Um observador, do alto da torre de uma plataforma marítima de petróleo, a uma altura de 50 m, avista um barco. Sabendo que o ângulo de depressão em relação à proa do barco é de 60°, a que distância da plataforma o barco está?
4. Determine a medida x do lado AC do triângulo ABC.

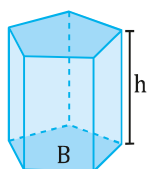


5. Seja θ a medida (em radianos) de um ângulo agudo tal que $\cos \theta = \frac{1}{3}$.
- a) Calcule os valores de sen θ e tg θ .
- b) Determine a e b na figura.



Imagens: Zapt

Recorde como calcular o volume de um prisma reto



$$V = \text{Área da base} \times \text{altura}$$

6. Um prisma reto de altura igual a 9 cm tem como base um triângulo. Sabendo que dois dos lados desse triângulo medem 3 cm e 4 cm e que o ângulo formado por esses lados mede 45° , determine o volume do prisma.

FOCO NA TECNOLOGIA

A proposta desta seção é a apropriação, pelo estudante, de recursos da tecnologia. Conheça mais lendo as **Orientações Didáticas**.

REGISTRE
NO CADERNO



- O menor país do mundo em extensão é o Estado do Vaticano, com uma área de $0,4 \text{ km}^2$. Se o território do Vaticano tivesse a forma de um quadrado, qual seria a medida aproximada de seus lados?
- Minha calculadora tem visor com capacidade para registrar 8 algarismos. Digitei nela o maior número possível, do qual subtraí o número de habitantes do estado de São Paulo em 2016, obtendo 55 264 613 como resultado. Qual era a população do estado de São Paulo em 2016?

PALAVRAS-CHAVE

REGISTRE
NO CADERNO



As palavras-chave deste capítulo são:

- Plano cartesiano
- Relações entre pontos
 - Ponto médio
 - Pontos colineares
 - Distância entre pontos

Escreva no caderno tudo o que você aprendeu no capítulo em relação a esses assuntos.

CÁLCULO RÁPIDO

REGISTRE
NO CADERNO



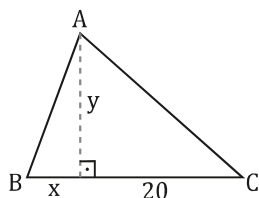
Na socialização das respostas, destaque que, para achar o ponto médio, basta calcular as médias aritméticas de cada par de coordenadas.

Obter rapidamente pontos médios e distâncias entre pontos facilita a resolução de problemas da Geometria analítica. Vamos então realizar algumas atividades de cálculo rápido com essa finalidade, e outras de cálculo algébrico.

- Obtenha mentalmente o ponto médio de \overline{AB} , sendo:

a) $A(0, 0)$ e $B(4, 6)$	d) $A(2, -3)$ e $B(2, -1)$
b) $A(4, 10)$ e $B(0, 0)$	e) $A(-2, -5)$ e $B(4, 1)$
c) $A(1, 2)$ e $B(3, 1)$	f) $A(5, 3)$ e $B(-3, -3)$
- Obtenha a distância entre pontos **A** e **B** que possuem a mesma abscissa ou mesma ordenada.

a) $A(4, 1)$ e $B(4, 5)$	d) $A(-3, 2)$ e $B(5, 2)$
b) $A(4, 1)$ e $B(4, -5)$	e) $A(-1, -4)$ e $B(-1, 3)$
c) $A(0, 2)$ e $B(6, 2)$	f) $A(6, -3)$ e $B(-2, -3)$
- Analise a figura e responda às questões.



Imagens: Zapit

Na atividade 2, destaque o valor do módulo da diferença entre coordenadas como sendo a resposta a cada item.

- O que representa a expressão $(x + 20)$?
 - E a expressão $\frac{(x + 20) \cdot y}{2}$?
- Calcule o valor numérico destas expressões algébricas.

a) $a^2 - b^2$ para $a = -1$ e $b = 2$	b) $\frac{x + y}{x - y}$ para $x = 8$ e $y = 5$
c) $\frac{1 - a^2}{a - 1}$ para $a = -2$	d) $\frac{m - n}{\sqrt{m}}$ para $m = 9$ e $n = 1$
e) $x^2 - 2xy + y^2$ para $x = -1$ e $y = -2$	
 - Resolva mentalmente as equações.

a) $3x - 2 = 22$	d) $-\frac{2}{3}x = 6$
b) $\frac{1}{2}x = 8$	e) $-2x + 4 = 8$
c) $-x - 3 = -1$	f) $\frac{x - 4}{2} = 2$

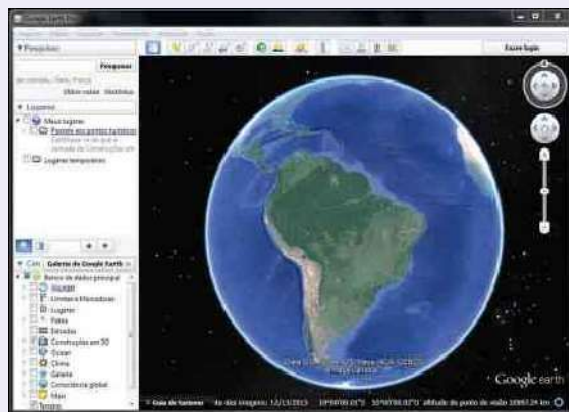
Aqui há uma boa possibilidade de trabalho com Geografia na exploração das características sociais e geográficas de comunidades próximas aos estudantes a partir da utilização dos recursos do aplicativo *Google Earth*.

De olho no nosso planeta

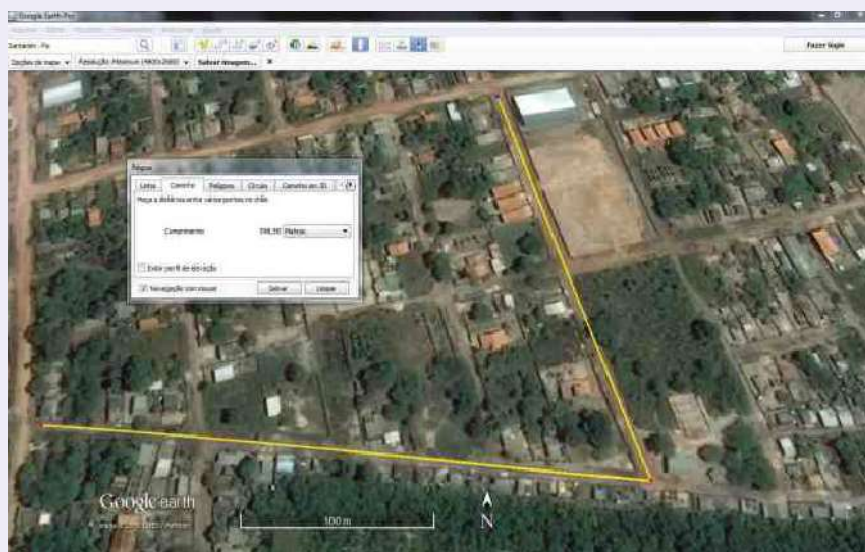
O *Google Earth* é um aplicativo que oferece o mapeamento do planeta pela superposição de imagens de satélite, fotografias aéreas e recursos de animação gráfica. As imagens são reais, mas não são fornecidas em tempo real. No entanto, a atualização é constante.

Por meio desse programa, é possível navegar virtualmente pelos países mais longínquos, visualizar com mais detalhes o relevo da Terra, verificar a sinuosidade de um rio e a topografia dos terrenos que o circundam, localizar a cidade ou, até mesmo, a edificação em que moramos. Tudo sendo apreciado em perspectiva.

Inicialmente, esse programa era muito requisitado, pela curiosidade e pelo prazer de navegar pelo mundo sem ter de sair do lugar; mas, com seu aprimoramento, vem se destacando como ferramenta útil para uma grande variedade de aplicações. Pode ser usado, por exemplo, na análise de traçados de estradas, na revisão de áreas construídas ou para traçar retas e estimar medidas em regiões inacessíveis ou de grandes dimensões.



Tela inicial do *Google Earth*.



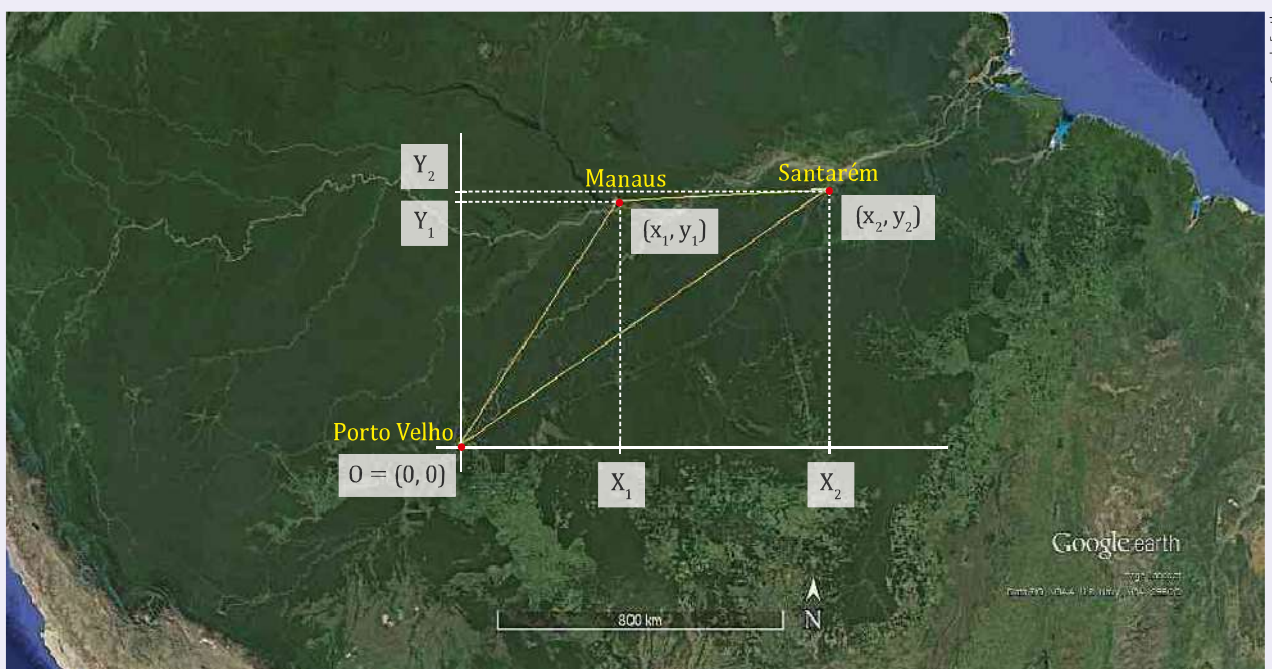
2016 CNES Astrium/Google Earth

O que permite tais análises é o fato de as imagens serem georreferenciadas (cada ponto é identificado pela latitude e longitude), e mesmo a versão mais simples do programa, distribuída gratuitamente na internet, dispõe de recurso para traçar e medir segmentos de reta.

Tem se intensificado, também, o número de pessoas que aproveitam os momentos de navegação pelas imagens para monitorar os descuidos ambientais, já que é possível localizar áreas de desmatamento, queimadas e ocupação ilegal de reservas protegidas. Esse hábito vem crescendo, conforme se pode verificar nos *sites* de ONGs (organizações não governamentais) que se dedicam a programas para controle ambiental e também em *blogs* pessoais de cidadãos que se dispõem a contribuir com a preservação do meio ambiente, denunciando, por meio da exposição de imagens, as ações que trazem malefícios ao planeta.

Pode-se, por exemplo, estimar uma área do território brasileiro com elevado índice de devastação de floresta tropical utilizando-se as ferramentas básicas do programa e os conhecimentos de Geometria analítica. O exemplo representado na imagem a seguir ilustra uma das estratégias para resolver a questão: qual é a área da região inscrita no triângulo?

Do *Google Earth* podemos saber, como registrado anteriormente, as coordenadas cartográficas. Estas podem ser utilizadas para o cálculo da área, por projeções ortogonais, com uso da Trigonometria, mas seria um método bastante trabalhoso. Como dispomos de traçados de segmentos de reta e de suas medidas reais, podemos fazer um plano cartesiano, passando (ou não) por um dos vértices do triângulo.



Utilizando esse plano cartesiano, podemos determinar as medidas dos segmentos OX_1 , OX_2 , OY_1 , OY_2 , obtendo os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do segundo e terceiro vértices. A área será dada, então, pelo cálculo:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

É interessante perceber que pode ser utilizado qualquer polígono para representar a região delimitada, uma vez que todo polígono pode ser segmentado em dois ou mais triângulos. No caso, a área total será dada pela soma das áreas dos triângulos que compõem a região.



ATIVIDADE



1. Que tal pesquisar sua região e seu bairro com esse recurso da tecnologia? Vocês podem calcular a área total do terreno da escola. Aceita o desafio?

5

Estudo analítico da reta

Uma vez que este capítulo é continuidade do anterior, sempre que possível, relacione-o aos conhecimentos que os estudantes têm sobre funções afim. Por isso, é muito importante que a seção **Aprender a aprender** sobre funções afim, no capítulo 1, já tenha sido estudada.

A Geometria analítica nos permite discutir questões como:

- saber se um ponto pertence a uma reta ou, caso contrário, a que distância se localiza dela;
- averiguar se dois pontos distintos pertencem a um dos semiplanos determinados por uma reta e a qual deles;
- verificar se duas ou mais retas são coincidentes ou distintas; se distintas, quando são concorrentes ou paralelas; se concorrentes, quais ângulos formam; se paralelas, a distância entre elas.

Situações como essas podem ser solucionadas por meio de uma abordagem algébrica ou geométrica.

Sítue-se

Neste capítulo, vamos analisar as questões acima e outras relacionadas à reta sob a perspectiva da Geometria analítica, isto é, vamos buscar relações e fórmulas algébricas que nos permitam analisar propriedades geométricas envolvendo retas e pontos.

1 Equação geral de uma reta: Álgebra e Geometria

Sejam os pontos $A(0, 2)$, $B(3, 0)$ e $C(-3, 4)$, pertencentes à mesma reta r .

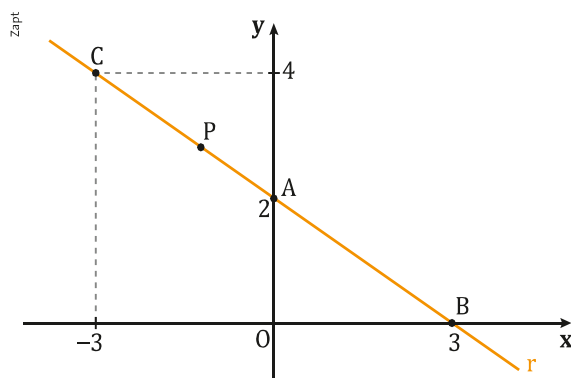
Se $P(x, y)$ é um ponto qualquer de r , temos:

$$P, A \text{ e } B \text{ são colineares, então: } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 6 = 0 \quad (1)$$

$$P, A \text{ e } C \text{ são colineares, então: } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x - 3y + 6 = 0 \quad (2)$$

$$P, B \text{ e } C \text{ são colineares, então: } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4x - 6y + 12 = 0 \quad (3)$$

As equações (1), (2) e (3) são equivalentes entre si. Podemos, então, associar qualquer uma dessas equações à reta r .



FIQUE CONECTADO

Mesmo entre os grandes matemáticos, a vida nem sempre é fácil! Saiba mais sobre isso lendo a crônica "Tributo tardio a um trágico herói", no livro *A vida secreta dos números*, de George G. Szpiro (Difel).

Generalizando, sejam r a reta determinada pelos pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ distintos (logo, $x_A \neq x_B$ ou $y_A \neq y_B$) e $P(x, y)$ um ponto qualquer de r . Pela condição de alinhamento de P, A e B , temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_A y_B - x_B y_A = c$, temos:

$$ax + by + c = 0, \text{ em que } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0$$

Portanto, temos a seguinte propriedade:

A cada reta r do plano cartesiano associamos uma equação da forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, e (x, y) são as coordenadas de um ponto qualquer de r .

Vamos, agora, analisar a validade da sua recíproca.

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos distintos e $P(x_p, y_p)$ um ponto qualquer, cujas coordenadas satisfazem a equação $ax + by + c = 0$, com a, b e c reais e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Temos:

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \\ ax_p + by_p + c = 0 \end{cases}$$

que é um sistema linear homogêneo em a, b e c , com soluções diferentes da solução nula. Logo:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ ou seja, } A, B \text{ e } P \text{ são colineares.}$$

Portanto, podemos enunciar que:

A toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com a, b e c reais, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, corresponde uma única reta r do plano cartesiano, cujos pontos têm coordenadas satisfazendo a equação.

A equação $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, é denominada **equação geral** da reta r .

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R1. Seja r a reta determinada por $A(-5, -1)$ e $B(-1, 1)$. Obtenha:

- uma equação de r .
- o ponto de abscissa -8 pertencente a r .
- o ponto de interseção de r com o eixo x .
- o ponto de interseção de r com a bissetriz do 1° e do 3° quadrantes.
- em r , o ponto cuja distância ao ponto $C(-4, 2)$ seja igual a 5.
- uma equação da mediatriz m do segmento AB .

Resolução

a) Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer de r , temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = x(1-1) - y(-5-1) + 1(-5-1) = -1 - x - (-5y) - x - y - 5 = 0 \Rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

Portanto, r tem equação $x - 2y + 3 = 0$.

- b) Um ponto **P** pertence a **r** se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem uma equação de **r**. Logo:

$$P(-8, y_p) \in r \Rightarrow -8 - 2y_p + 3 = 0 \Rightarrow y_p = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Portanto, } P\left(-8, -\frac{5}{2}\right).$$

- c) Basta achar o ponto **Q** de **r** que tenha ordenada zero.

$$\text{Logo, } Q(x_q, 0) \text{ e } x_q - 2 \cdot 0 + 3 = 0 \Rightarrow x_q = -3.$$

$$\text{Portanto, } Q(-3, 0).$$

- d) Basta achar o ponto **S** de **r** que tenha abscissa igual à ordenada. Assim, sendo $x_s = y_s$, temos:

$$x_s - 2x_s + 3 = 0 \Rightarrow x_s = 3$$

$$\text{Portanto, } S(3, 3).$$

- e) Seja $T(x_T, y_T)$ o ponto solicitado. Então:

$$T \in r \Rightarrow x_T - 2y_T + 3 = 0 \Rightarrow x_T = 2y_T - 3 \quad (1)$$

$$d_{TC} = 5 \Rightarrow \sqrt{[x_T - (-4)]^2 + (y_T - 2)^2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_T + 4)^2 + (y_T - 2)^2 = 25 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$(2y_T - 3 + 4)^2 + (y_T - 2)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2y_T + 1)^2 + (y_T - 2)^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y_T^2 + 4y_T + 1 + y_T^2 - 4y_T + 4 = 25 \Rightarrow 5y_T^2 = 20 \Rightarrow$$

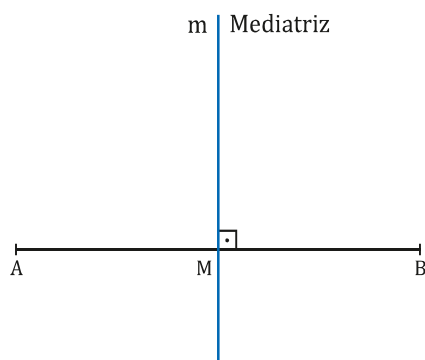
$$\Rightarrow y_T^2 = 4 \Rightarrow y_T = 2 \text{ ou } y_T = -2$$

Em (1):

- para $y_T = 2$, obtemos $x_T = 1$;
- para $y_T = -2$, obtemos $x_T = -7$.

Portanto, $T(1, 2)$ ou $T(-7, -2)$.

- f) Lembramos que **mediatriz** de um segmento é a reta que o intersecta perpendicularmente em seu ponto médio.



Seja $D(x, y)$ um ponto qualquer de **m**. Logo:

$$d_{DA} = d_{DB} \Rightarrow \sqrt{[x - (-5)]^2 + [y - (-1)]^2} =$$

$$= \sqrt{[x - (-1)]^2 + (y - 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 5)^2 + (y + 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x + 25 + y^2 + 2y + 1 =$$

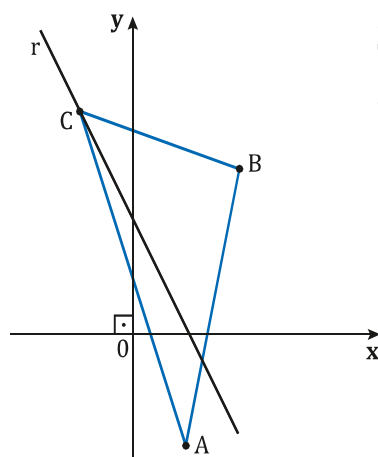
$$= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x + 4y + 24 = 0 \Rightarrow 2x + y + 6 = 0$$

Portanto, **m** tem equação $2x + y + 6 = 0$.

- R2.** Em um triângulo ABC, $A(1, -2)$, $B(2, 3)$, **C** pertence à reta $r: 2x + y - 2 = 0$ e a área é igual a 8. Determine **C**.

Resolução



Temos:

$$r: 2x + y - 2 = 0$$

$$C \in r \Rightarrow 2x_c + y_c - 2 = 0 \Rightarrow y_c = 2 - 2x_c \quad (1)$$

$$\text{Como o } \triangle ABC \text{ tem área 8, então: } \frac{1}{2} \cdot |D| = 8 \Rightarrow D = \pm 16.$$

Cálculo de **D**:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = 3 - 2x_c + 2y_c - 3x_c - y_c + 4 = -5x_c + y_c + 7 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$D = -7x_c + 9$$

Para:

$$D = 16 \Rightarrow -7x_c + 9 = 16 \Rightarrow x_c = -1$$

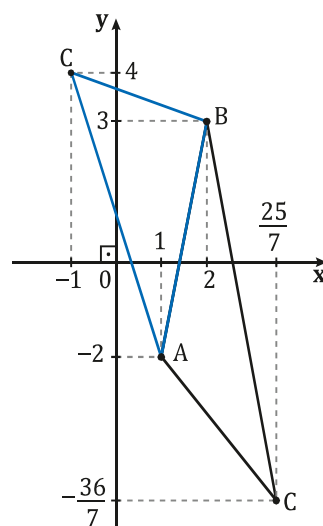
$$D = -16 \Rightarrow -7x_c + 9 = -16 \Rightarrow x_c = \frac{25}{7}$$

Daí, em (1) obtemos:

$$x_c = -1 \Rightarrow y_c = 4$$

$$x_c = \frac{25}{7} \Rightarrow y_c = -\frac{36}{7}$$

$$\text{Portanto, } C(-1, 4) \text{ ou } C\left(\frac{25}{7}, -\frac{36}{7}\right).$$



PARA COMPLEMENTAR

Peça aos estudantes que, em duplas, leiam este **Para complementar**. Depois, incentive-os a explicar para toda a classe o que entenderam. É importante que percebam as relações entre as noções de alinhamento de três pontos (**A**, **B** e **C**), área nula de um triângulo e condição para um ponto (x, y) pertencer à reta que passa por **A** e **B**.

Uma única ideia e suas consequências

Vimos no capítulo 4 que a área de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é igual à metade do valor do módulo do determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

A partir daí, foram extraídas duas consequências.

A primeira delas: se **A**, **B** e **C** estão alinhados, a figura formada unindo-se os três pontos por segmentos tem área nula e, reciprocamente, se $D = 0$, os três pontos não formam um triângulo e só podem estar alinhados.

A segunda consequência é a dedução da equação de uma reta, conhecidos dois de seus pontos, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Porque, se $P(x, y)$ é um ponto qualquer da reta, ele deve estar alinhado com **A** e **B**, e teremos determinante **D** nulo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Antes de resolver esta sequência de atividades, revise os conceitos de ponto médio, reta suporte, abscissa, ordenada, bissetriz, mediatriz, mediana e baricentro. Anote-os no caderno e tenha-os sempre à mão, porque você os utilizará bastante neste capítulo.

Resolva primeiro as atividades 1, 2, 4, 7 e 9 e, se tiver dúvidas, consulte a atividade R1. Depois, resolva o problema 10 e, se preciso, consulte a atividade R2. Somente então resolva as demais atividades.

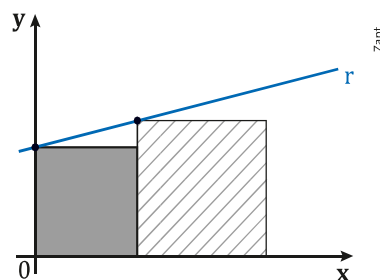
1. Obtenha uma equação da reta AB nos casos a seguir.

- a) $A(3, 5)$, $B(-2, 1)$
- b) $A(-2, 4)$, $B(6, -1)$
- c) $A(2, -4)$, $B(0, 0)$
- d) $A(6, 1)$, $B(6, -5)$
- e) $A(5, -2)$, $B(-6, -2)$

2. Obtenha uma equação da(o):

- a) bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.
- b) bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.
- c) eixo x .
- d) eixo y .

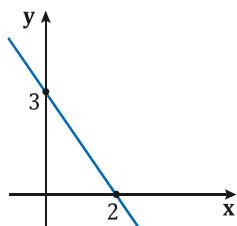
3. (UFPR) Na figura a seguir estão representados, em um sistema cartesiano de coordenadas, um quadrado cinza de área 4 unidades, um quadrado hachurado de área 9 unidades e a reta r que passa por um vértice de cada quadrado. Nessas condições, a equação da reta r é:



- a) $x - 2y = -4$
 - b) $4x - 9y = 0$
 - c) $2x + 3y = -1$
 - d) $x + y = 3$
 - e) $2x - y = 3$
4. Considere o triângulo de vértices $A(3, 4)$, $B(-1, 2)$ e $C(2, -1)$. Obtenha uma equação:
- a) da reta suporte de \overline{AB} .
 - b) da reta suporte da mediana \overline{CM} .
5. Determine na reta $r: x - y - 1 = 0$ um ponto cuja distância a $A(2, 4)$ seja $\sqrt{17}$.
6. Determine na reta $r: x + 5y - 7 = 0$ o ponto equidistante de $A(-1, -3)$ e de $B(3, 5)$.
7. Determine, na reta r de equação $2x + 3y - 12 = 0$, o ponto de:
- a) abscissa -1 .
 - b) ordenada 6 .
 - c) interseção com o eixo x .
 - d) interseção com o eixo y .
 - e) interseção com a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.
 - f) interseção com a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.

8. (UFPel-RS) A equação da reta, representada no gráfico ao lado, é:

- a) $y = \frac{3}{2}x + 3$
b) $y = -\frac{3}{2}x + 3$
c) $y = \frac{2}{3}x + 3$
d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$



9. Desenhe no plano cartesiano as retas:

- a) $r: 3x - 2y + 6 = 0$; $s: x + 3y - 6 = 0$.
b) $t: 2x - 3y = 0$; $u: x - 3 = 0$; $v: y + 2 = 0$.

10. A área de um triângulo ABC vale $\frac{3}{2}$; dois de seus vértices são A(2, -3) e B(3, -2) e o baricentro pertence à reta de equação $3x - y - 8 = 0$. Determine C.

INVENTE VOCÊ

Faça com os estudantes um planejamento para a elaboração deste problema. Ajude-os a pensar sobre o que perguntarão e como perguntarão, de modo que a reta esteja envolvida.

REGISTRE
NO CADERNO



1. Elabore um problema envolvendo a reta $r: 2x - 3y = 0$.

2 Posições relativas entre duas retas

Sejam as retas $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

As coordenadas dos pontos de r e s satisfazem as equações, respectivamente, de r e s ; essas equações formam o sistema de equações simultâneas.

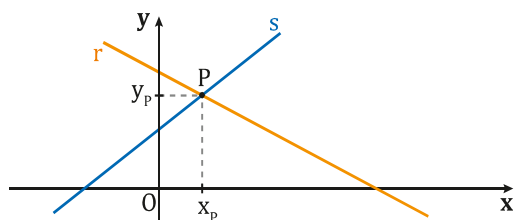
$$(S) \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

Temos três possibilidades.

- 1ª) r e s são **concorrentes entre si**.

Existe um único ponto $P(x_p, y_p)$, interseção de r e s ; logo, pela regra de Cramer, o sistema (S) é **possível e determinado** e (x_p, y_p) é a solução de (S).

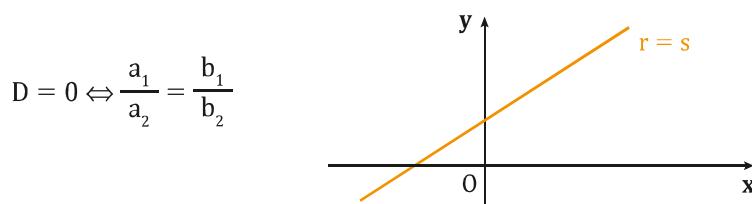
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



Imagens: Zapit

- 2ª) r e s são **coincidentes**.

Todos os pontos de r estão em s e vice-versa; logo, (S) é **possível e indeterminado**.



Além disso, as equações de r e s devem ser equivalentes, pois correspondem aos

mesmos pontos; daí, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

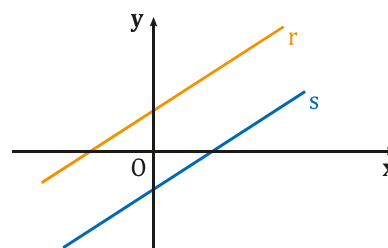
- 3ª) r e s são **paralelas**.

Não há pontos comuns a r e s ; logo, (S) é **impossível**.

$$D = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Nesse caso, as equações de r e s não podem ser equivalentes, porque

correspondem a conjuntos de pontos distintos; daí, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.



Resumindo, quando $a_2 \cdot b_2 \cdot c_2 \neq 0$, podemos afirmar que:

- **r** e **s** são concorrentes entre si se $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ou seja, se não houver proporcionalidade entre os coeficientes de **x** e de **y**.
- **r** e **s** são coincidentes se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ou seja, se houver proporcionalidade entre os coeficientes de **x** e de **y** e os termos independentes.
- **r** e **s** são paralelas se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, ou seja, se houver proporcionalidade apenas entre os coeficientes de **x** e de **y**.

Enfatize aos estudantes essa característica da Geometria analítica, ou seja, obter conclusões de natureza geométrica sem desenhos, apenas a partir de propriedades algébricas.

Exemplos:

- a) **r**: $2x + 3y - 6 = 0$ e **s**: $x + 4y + 12 = 0$ são concorrentes entre si, pois $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{4}$.
Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ x + 4y + 12 = 0 \end{cases}$, obtemos as coordenadas $(12, -6)$ do ponto de interseção de **r** e **s**;
- b) **r**: $3x - 4y + 5 = 0$ e **s**: $6x - 8y + 10 = 0$ são coincidentes, pois $\frac{3}{6} = \frac{-4}{-8} = \frac{5}{10}$;
- c) **r**: $7x + 2y + 1 = 0$ e **s**: $14x + 4y - 5 = 0$ são paralelas, pois $\frac{7}{14} = \frac{2}{4} \neq \frac{1}{-5}$.

Observe que a decisão sobre a posição das retas não depende de um desenho. Bastam as equações das retas.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

- R3.** Analise a posição relativa das retas
r: $kx + 2ky - 4 = 0$ e **s**: $x + ky - k = 0$ em função de **k**.

Resolução

Note, inicialmente, que $k \neq 0$, pois os coeficientes de **x** e de **y** na equação de **r** não podem ser simultaneamente nulos.

Basta analisar o sistema linear:

$$\begin{cases} kx + 2ky = 4 \\ x + ky = k \end{cases}, \text{ para } k \neq 0.$$

Temos:

- **r** e **s** são concorrentes se $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, ou seja, se $\frac{k}{1} \neq \frac{2k}{k}$ ou se $k \neq 0$ e $k \neq 2$.
- **r** e **s** são coincidentes se $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, ou seja, se $\frac{k}{1} = \frac{2k}{k} = \frac{4}{k}$ ou $k = 2$.

Logo, temos:

$k \neq 0$ e $k \neq 2 \Rightarrow$ **r** e **s** são concorrentes entre si.

$k = 2 \Rightarrow$ **r** e **s** são coincidentes.

- R4.** Dois lados de um paralelogramo estão contidos nas retas **r**: $x - 6y + 8 = 0$ e **s**: $3x - 2y + 8 = 0$ e uma das dia-

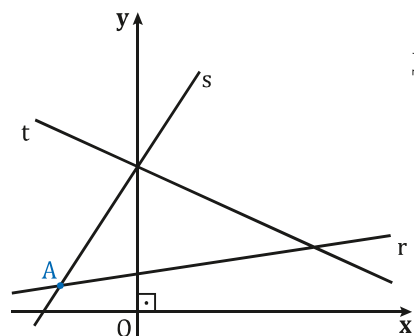
gonais está contida na reta **t**: $x + 2y - 8 = 0$. Quais são os vértices desse paralelogramo?

Resolução

Um dos vértices é o ponto de interseção de **r** e de **s**; resolvendo o sistema $\begin{cases} x - 6y + 8 = 0 \\ 3x - 2y + 8 = 0 \end{cases}$, obtemos $x = -2$ e $y = 1$.

Logo, um dos vértices é **A**(-2, 1).

Observe como um esboço ajuda a pensar na resolução de um problema.



- $A \notin t$, pois $-2 + 2 \cdot 1 - 8 \neq 0$.

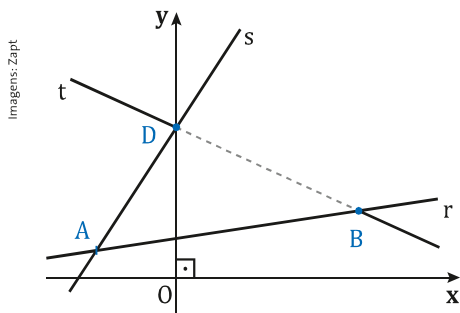
Observe que, se **A** pertencesse a **t**, não seria possível determinar os outros vértices do paralelogramo e haveria infinitas soluções para o problema.

Então, a interseção de **t** com **r** e a interseção de **t** com **s** são dois outros vértices do paralelogramo.

Resolvendo $\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ x - 6y + 8 = 0 \end{cases}$, obtemos $x = 4$ e $y = 2$.

Resolvendo $\begin{cases} x + 2y - 8 = 0 \\ 3x - 2y + 8 = 0 \end{cases}$, obtemos $x = 0$ e $y = 4$.

Logo, temos os vértices $B(4, 2)$ e $D(0, 4)$.



Sendo **E** o ponto médio de \overline{BD} , temos:

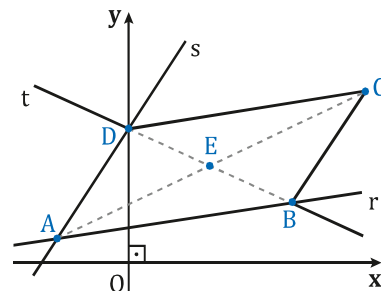
$$\begin{cases} x_E = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow x_E = 2 \\ y_E = \frac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow y_E = 3 \end{cases}$$

Logo, $E(2, 3)$.

E é o ponto médio da outra diagonal \overline{AC} ; então:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = x_E \Rightarrow \frac{-2 + x_C}{2} = 2 \Rightarrow x_C = 6 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = y_E \Rightarrow \frac{1 + y_C}{2} = 3 \Rightarrow y_C = 5 \end{cases}$$

Portanto, $C(6, 5)$.



FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO

Antes de resolver estas atividades, releia as atividades resolvidas. Elas podem ser úteis em caso de dúvidas.

- 11.** Obtenha uma equação da reta que passa por $P(6, -4)$ e é paralela ao:

- a) eixo **x**.
b) eixo **y**.

- 12.** Verifique quais dos pontos a seguir pertencem à reta **r** de equação $2x + 3y - 6 = 0$.

$A\left(-1, \frac{8}{3}\right), B(5, 1), C(0, 2), D(3, 0), E(-1, -1)$

- 13.** Seja a reta **r** que apresenta como equação

$$(k^2 - 2k)x + (k^2 - 4)y + k - 2 = 0.$$

Determine **k** para que **r**:

- a) seja paralela ao eixo **x** e dê a equação de **r**.
b) seja paralela ao eixo **y** e dê a equação de **r**.
c) passe pela origem do sistema.

- 14.** Analise a posição relativa entre **r** e **s**.

- a) $r: 4x - y + 2 = 0, s: 2x + 2y - 1 = 0$
b) $r: 3x - 2y - 1 = 0, s: 9x - 6y + 2 = 0$
c) $r: x + 2y - 3 = 0, s: -3x - 6y + 9 = 0$

- 15.** Determine o ponto comum às retas
 $r: 2x - 3y + 7 = 0$ e $s: 4x - y - 11 = 0$.

- 16.** Os lados de um triângulo estão contidos nas retas de equações $x + 2y - 5 = 0, 2x - y = 0$ e $3x + y + 5 = 0$. Quais são os vértices do triângulo?

- 17.** Determine **k** para que as retas de equações
 $2x + y - 16 = 0, 4x - 2y - 2 = 0$ e $2kx + (k-1)y + 3 = 0$ sejam concorrentes no mesmo ponto.

- 18.** Discuta, em função de **m**, a posição relativa entre as retas **r** e **s** em cada caso.

- a) $r: mx + 3my = 0, s: 2x + my - 4 = 0$
b) $r: mx - y = 1, s: (m-1)x + 2my = 4$
c) $r: x + y - m = 0, s: m^2x + y - m = 0$

- 19.** Determine **p** e **q** para que as retas de equações
 $x - y - 2 = 0$ e $2x + py - q = 0$ sejam coincidentes.

- 20.** Os pontos $A(-1, 7)$ e $B(1, 8)$ são vértices consecutivos de um retângulo $ABCD$, cujas diagonais se cruzam em $E\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$. Quais são as equações das retas suportes dos lados desse retângulo?

3 Equação reduzida

Seja $ax + by + c = 0$ a equação de uma reta r não paralela ao eixo y , ou seja, com $b \neq 0$.

Isolando y , temos:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Fazendo $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = n$, obtemos a equação de r :

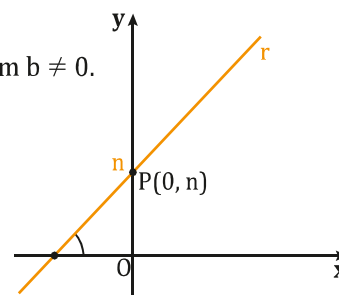
$$y = mx + n$$

Essa equação é denominada **equação reduzida** de r .

Lembrando o que foi estudado sobre função do 1º grau, o coeficiente n é denominado **coeficiente linear** de r , e m é denominado **coeficiente angular** de r .

O termo coeficiente linear se justifica porque n é a ordenada do ponto $P(0, n)$ em que a reta r intersecta o eixo Oy .

Vejamos por que m recebe o nome de coeficiente angular de r .



Imagens: Zapt

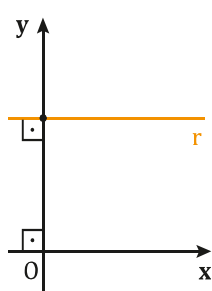
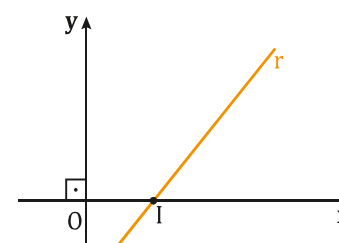
Inclinação de uma reta

Seja r uma reta do plano cartesiano.

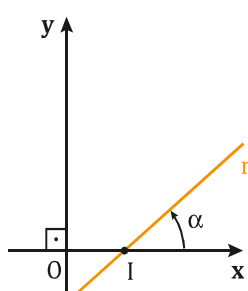
Se r não é paralela ao eixo x , indicando por I a interseção de r com o eixo x , o ângulo que a semirreta Ix descreve (entre 0° e 180°), ao girar em sentido anti-horário até estar contida em r , é denominado **inclinação** de r .

Se r é paralela ao eixo x , a inclinação de r é o ângulo nulo.

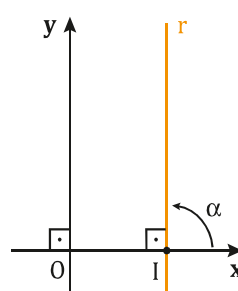
Indicaremos a medida da inclinação de r por α .



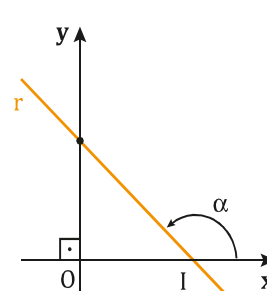
$$\alpha = 0^\circ$$



$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\alpha = 90^\circ$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$

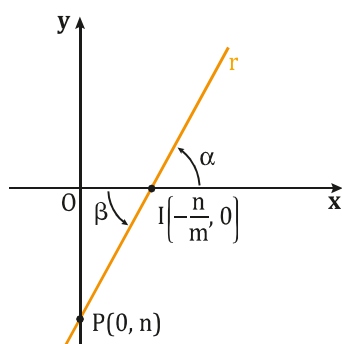
Notamos que $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ (α em graus).

Se a reta r tem equação $y = mx + n$ e inclinação α , vamos calcular $\text{tg } \alpha$.

Se $m > 0$:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta = -\frac{OP}{OI} = -\frac{|n|}{\left|-\frac{n}{m}\right|} = |m|$$

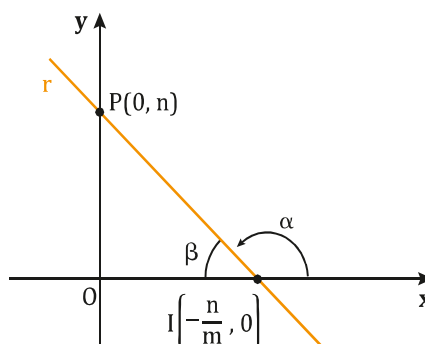
Como $m > 0$, $\text{tg } \alpha = m$.



Se $m < 0$:

$$\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta = -\frac{OP}{OI} = -\frac{|n|}{\left|-\frac{n}{m}\right|} = -|m|$$

Como $m < 0$, $|m| = -m$, $\text{tg } \alpha = m$.



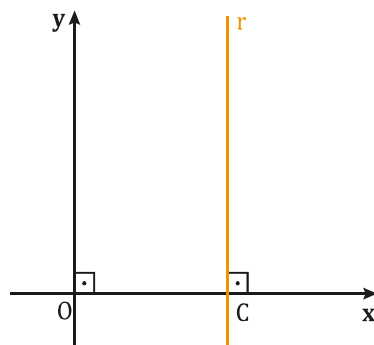
Se $m = 0$, r é paralela a Ox ou coincidente com Ox . Nos dois casos, $\alpha = 0$ e temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = m$$

Concluimos que o coeficiente m da equação reduzida de r corresponde à tangente da inclinação de r , o que justifica sua denominação de **coeficiente angular da reta**.

Se a reta r é paralela ao eixo Oy , sua equação é da forma $x = C$.

Nesse caso, não existe m porque $\alpha = 90^\circ$ e $\operatorname{tg} 90^\circ$ não existe.



Cálculo do coeficiente angular, conhecendo-se dois pontos de uma reta

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pontos distintos de uma reta r não paralela ao eixo y .

A medida α , em graus, da inclinação de r é tal que

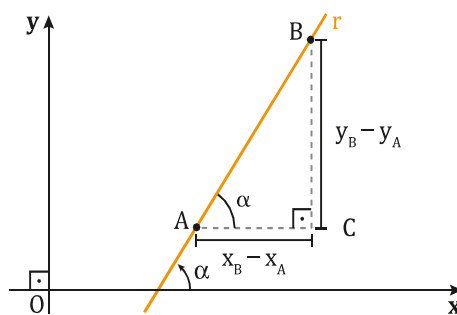
$\alpha = 0^\circ$ ou $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ou $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

- Se $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, então $m = \operatorname{tg} \alpha > 0$.

No $\triangle ABC$, temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



- Se $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, então $m = \operatorname{tg} \alpha < 0$.

No $\triangle ABC$, temos:

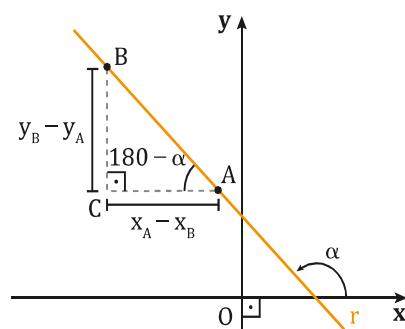
$$\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \Rightarrow -\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} \Rightarrow m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Logo, $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ nas duas possibilidades.

É fácil perceber que, se $\alpha = 0^\circ$, a fórmula $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ ainda é válida.

Portanto:



Quaisquer que sejam os pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ de uma reta r não paralela ao eixo y , seu **coeficiente angular** (ou **declividade**) m é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemplo:

O coeficiente angular da reta determinada por $A(4, -3)$ e $B(-5, -7)$ é dado por

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}; \text{ assim, } m = \frac{-7 - (-3)}{-5 - 4}; \text{ logo, } m = \frac{4}{9}.$$

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R5. Qual é o coeficiente angular da reta de equação $3x - 4y + 7 = 0$?

Resolução

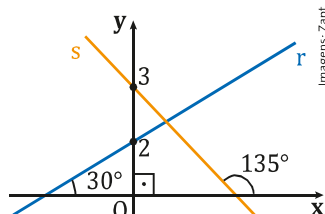
Escolha algumas destas atividades resolvidas para discutir com a classe sobre a resolução apresentada.

Basta determinar a forma reduzida da equação da reta:

$$3x - 4y + 7 = 0 \Leftrightarrow 3x + 7 = 4y \Leftrightarrow \frac{3x + 7}{4} = y, \text{ ou seja:}$$

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}; \text{ logo, } m = \frac{3}{4}.$$

R6. Quais são as equações reduzidas das retas **r** e **s** mostradas na figura?



Resolução

Para resolver o problema, devemos observar que na figura temos:

$$\begin{cases} m_r = \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow m_r = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ n_r = 2 \end{cases} \quad \text{Logo, } r: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2.$$

$$\begin{cases} m_s = \operatorname{tg} 135^\circ \Rightarrow m_s = -1 \\ n_s = 3 \end{cases} \quad \text{Logo, } s: y = -x + 3.$$

R7. Uma reta **r** tem coeficiente angular 2 e coeficiente linear -8. Encontre as coordenadas do ponto **P** onde essa reta intersecta o eixo **x**.

Resolução

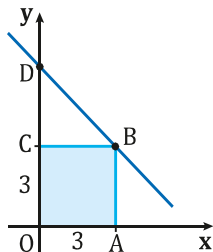
Sendo $m = 2$ e $n = -8$, a equação da reta é $y = 2x - 8$. O ponto **P** tem ordenada $y = 0$. Como $P \in r$, suas coordenadas satisfazem a equação $y = 2x - 8$. Assim, $0 = 2x - 8$ e $x = 4$; logo, $P(4, 0)$.

R8. A figura abaixo mostra o quadrado OABC de lado 3. Sabendo que $D(0, 6)$, escreva a equação reduzida da reta BD.

Resolução

Sabemos que $D(0, 6)$ e, pela figura, vemos que $B(3, 3)$. Assim, o coeficiente angular da reta BD é dado por:

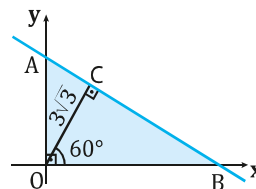
$$m = \frac{6 - 3}{0 - 3} = -1$$



O coeficiente linear da reta é $n = 6$.

Logo, a equação procurada é $y = -x + 6$.

R9. Na figura abaixo, \widehat{OCB} e \widehat{AOB} medem ambos 90° ; o ângulo \widehat{COB} mede 60° ; e $OC = 3\sqrt{3}$. Qual é a equação reduzida da reta AB?



Resolução

O coeficiente angular de \overline{AB} é calculado ao observarmos que $\widehat{OBC} = 30^\circ$. Assim, $m = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

O cálculo de n é feito observando o $\triangle OCA$, no qual:

$\widehat{COA} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$;

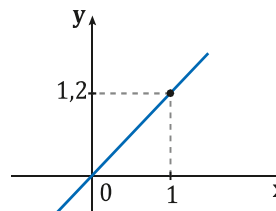
$$\text{logo, } \cos \widehat{COA} = \frac{OC}{OA} \text{ ou } \cos 30^\circ = \frac{OC}{OA} \text{ ou } \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{OA}.$$

Assim, $OA = 6$.

Como $n = OA$, $n = 6$; então, a equação procurada será $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 6$.

R10. O valor de um número real **x** vai aumentar 20%, dando um resultado **y**. Expresse **y** em função de **x** e represente graficamente essa função.

Resolução



Para achar 20% do número, basta multiplicá-lo por $\frac{20}{100}$ ou 0,2.

O valor **y** será dado por $y = x + 0,2x$ ou $y = 1,2x$.

Se $x = 1$ e $y = 1,2$, então a representação gráfica será uma reta de coeficiente angular 1,2 que representa o fator de aumento de **x**.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Organize um resumo com o que já estudou sobre coeficiente angular. Ele será útil ao resolver esta sequência de atividades.

21. Comparando a declividade das retas dadas por $y = 2x + 13$ e $y = 4x - 11$, qual apresenta maior inclinação? Por quê?

22. Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** pertencem à reta dada por $y = -6x + 5$. Se as abscissas desses quatro pontos formam uma P.A. de razão 1, o que ocorrerá com as ordenadas desses pontos?

Peça aos estudantes que justifiquem a resolução dos exercícios 25, 26, 29, 30 e 31. Isso os auxiliará no desenvolvimento de argumentações.

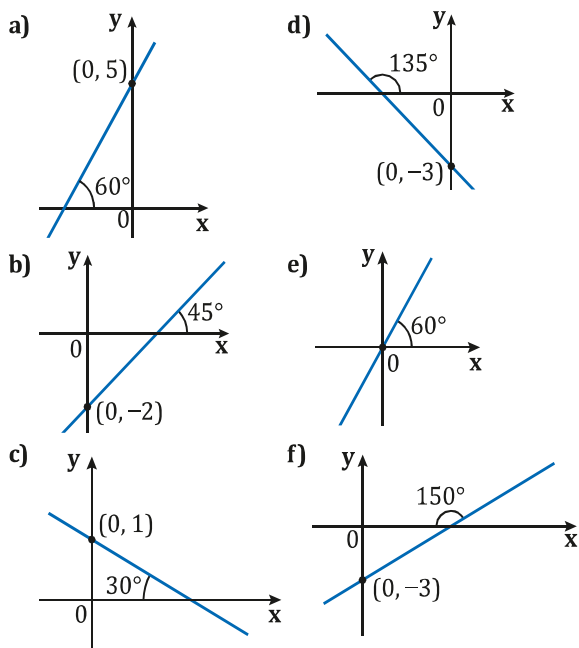
23. Calcule o coeficiente angular de \overline{AB} nos casos a seguir:

- a) $A(2, 1), B(4, 5)$ c) $A(-3, -4), B(-1, -4)$
b) $A(1, 2), B(-3, 7)$

24. Determine o coeficiente angular da reta r , dada a sua equação geral.

- a) $3x + 4y - 6 = 0$ c) $5x + 7 = 0$
b) $5x - 2y + 3 = 0$ d) $6y - 5 = 0$

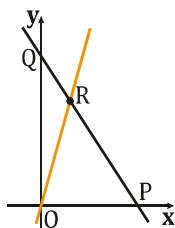
25. Qual é a equação de cada reta mostrada nas figuras?



26. (Unicamp-SP) As retas de equações

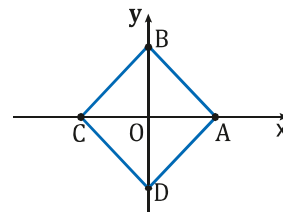
$$y = ax + b \text{ e } y = cx$$

são ilustradas na figura a seguir. Sabendo que o coeficiente b é igual à média aritmética dos coeficientes a e c :



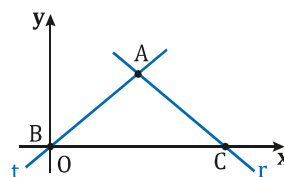
- a) expresse as coordenadas dos pontos P , Q e R em termos dos coeficientes a e b .
b) determine a , b e c sabendo que a área do triângulo POR é o dobro da área do triângulo ORQ e que o triângulo OPQ tem área 1.

27. Na figura, $ABCD$ é um quadrado de lado $6\sqrt{2}$. Qual é a equação da reta que passa por B e C ?



28. (UFT) Qual o perímetro do triângulo ABC representado na figura ao lado, sabendo-se que as retas r e t são definidas pelas equações:

$$r: -\frac{3}{4}x - y + 6 = 0 \text{ e } t: \frac{3}{4}x - y = 0$$



- a) 18 unidades de medida. d) 15 unidades de medida.
b) 17 unidades de medida. e) 14 unidades de medida.
c) 16 unidades de medida.

29. (UFU-MG) Considere as retas r_1 e r_2 , descritas pelas equações cartesianas $y_1 = a \cdot x + d$ e $y_2 = b \cdot x + c$, respectivamente, em que a , b , c e d são números reais. Sabe-se que a , b , c e d formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão -2 e que a soma desses números é igual a 5.

Com base nessas informações, é correto afirmar que a área do triângulo limitado pelas retas r_1 , r_2 e a reta de equação $y = 0$ é igual a:

- a) 24 b) 16 c) 12 d) 32

30. Um triângulo equilátero tem vértices $O(0, 0)$, $A(-4, 0)$ e B , sendo que B tem ordenada positiva. Considerando a altura relativa ao lado \overline{OB} desse triângulo, determine a equação da reta que a contém.

31. Faça o que se pede a seguir.

- a) O valor de um número real x diminuirá 25%, dando um resultado y . Expresse y em função de x e represente graficamente a função.
b) Use uma calculadora ou uma tabela trigonométrica e dê a inclinação dessa reta.

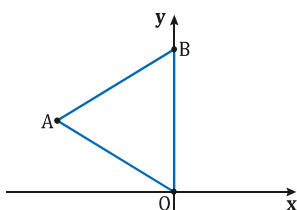
INVENTE VOCÊ

A elaboração de atividades favorece a compreensão do texto matemático, bem como o desenvolvimento da escrita e da leitura em Matemática.

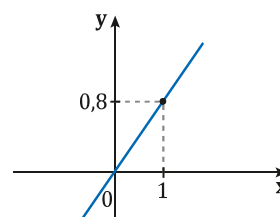
REGISTRE
NO CADERNO



2. Invente um problema envolvendo a equação reduzida de uma reta relacionada à figura abaixo.



3. Elabore uma atividade como a atividade 31, cujo gráfico seja:



Imagens: Zap



Uma mesma questão pode ser resolvida com diferentes ferramentas matemáticas, dependendo do conhecimento de quem o resolve. Observe três interpretações diferentes do significado da expressão “tendência de crescimento linear” presente no texto da questão a seguir.

(PUC-MG) A tabela a seguir, obtida a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.

Número de espécies ameaçadas de extinção	239	276	313	350	387	424
Ano	1983	1987	1991	1995	1999	2003

Se mantida, nos anos subsequentes, a tendência linear de crescimento mostrada na tabela, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:

- a) 461 b) 498 c) 535 d) 572

1ª interpretação:

Entendendo a relação que a cada ano associa o número de espécies ameaçadas como uma função afim, temos: $f(x) = ax + b$.

Vamos escolher dois pontos para determinar **a** e **b**, por exemplo: $\begin{cases} f(1999) = a \cdot 1999 + b = 387 \\ f(2003) = a \cdot 2003 + b = 424 \end{cases}$

$$4a = 37 \Rightarrow a = \frac{37}{4} \Rightarrow \frac{37 \cdot 1999}{4} + b = 387 \Rightarrow 4b = 1548 - 73963 \Rightarrow b = -\frac{72415}{4}$$

Se $f(x) = \frac{37}{4}x - \frac{72415}{4}$, então $f(2011) = \frac{37}{4} \cdot 2011 - \frac{72415}{4} = \frac{1992}{4} = 498$ e a resposta é a alternativa **b**.

2ª interpretação:

Pela Geometria analítica, se os pares de pontos (ano, número de espécies ameaçadas) pertencem a uma reta no plano cartesiano, pelo esboço os pontos **A**, **B** e **C(2011, n)** devem estar alinhados, ou seja, pertencer à mesma reta.

Isso pode ser feito buscando-se a equação da reta por **A** e **B** e substituindo **C** na equação para se encontrar o valor de **n**, o que gera cálculos e representações muito semelhantes à 1ª interpretação da questão.

Ou podemos analisar o coeficiente angular α da reta.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}; \text{ substituindo, temos:}$$

$$\frac{424 - 387}{2003 - 1999} = \frac{n - 424}{2011 - 2003} \Rightarrow n = 498, \text{ que é a resposta da questão.}$$

3ª interpretação:

Ao observar a sequência dos valores com crescimento linear, temos que os valores dos anos estão igualmente espaçados de 4 em 4 anos. Podemos então pensar na sequência $a_1 = 239$, $a_2 = 276$, $a_3 = 313$, $a_4 = 350$, $a_5 = 387$ e $a_6 = 424$ como uma P.A. de razão $r = 37$. Isso porque:

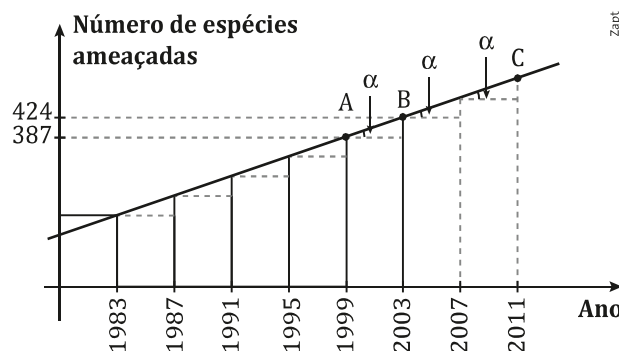
$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots a_5 - a_4 = 37$$

O que se pede é o valor de a_8 , porque:

$$2011 = 2003 + 2 \cdot 4 \text{ e } a_8 = a_6 + 2r = 424 + 2 \cdot 37 = 498$$

Analise as três leituras da expressão “tendência de crescimento linear”. Você concorda com elas? Você resolveria o problema de maneira diferente das apresentadas?

Volte às atividades de 21 a 31. Qual (ou quais) delas pode(m) ser interpretada(s) e resolvida(s) com outro instrumental matemático que não a Geometria analítica?



4 Posição relativa entre duas retas a partir de suas equações reduzidas

Aqui se estabelece de modo ainda mais evidente a relação entre o que o estudante sabe sobre funções afim e retas analisadas pela Geometria analítica.

Sejam as retas r e s , não perpendiculares ao eixo x , de coeficientes angulares $m_r = \operatorname{tg} \alpha_r$ e $m_s = \operatorname{tg} \alpha_s$, e coeficientes lineares n_r e n_s .

$$r: y = m_r x + n_r$$

$$s: y = m_s x + n_s$$

Como $0 \leq \alpha_r < \pi$, $0 \leq \alpha_s < \pi$, $\alpha_r \neq \frac{\pi}{2}$, $\alpha_s \neq \frac{\pi}{2}$, temos:

$$r // s \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_r = \alpha_s \\ e \\ n_r \neq n_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha_r = \operatorname{tg} \alpha_s \\ e \\ n_r \neq n_s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_r = m_s \\ e \\ n_r \neq n_s \end{cases}$$

Portanto:

Duas retas não perpendiculares ao eixo x são **paralelas** se têm coeficientes angulares iguais e coeficientes lineares distintos.

$$r // s \text{ se } m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$

Além disso, temos:

$$r \text{ e } s \text{ coincidem} \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s \text{ e } n_r = n_s$$

Duas retas não perpendiculares ao eixo x são **coincidentes** se têm coeficientes angulares e coeficientes lineares iguais.

$$r = s \Leftrightarrow m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

É evidente que:

Duas retas r e s que não têm coeficientes angulares são paralelas ou coincidentes, pois são perpendiculares ao eixo x .

Nesse caso, o paralelismo ou a coincidência das retas depende da análise das equações das retas.

Como consequência das condições de paralelismo ou coincidência de r e s , temos que:

Duas retas não perpendiculares ao eixo x são **concorrentes** se têm coeficientes angulares diferentes.

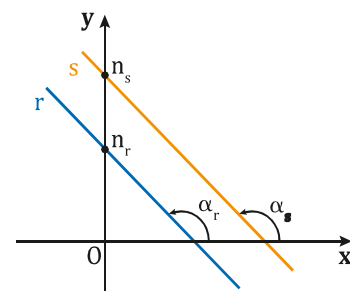
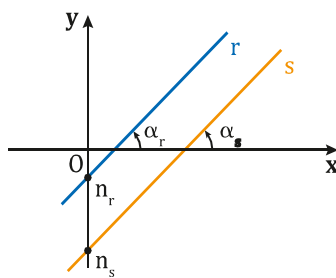
$$r \text{ e } s \text{ são concorrentes} \Leftrightarrow m_r \neq m_s$$

Exemplos:

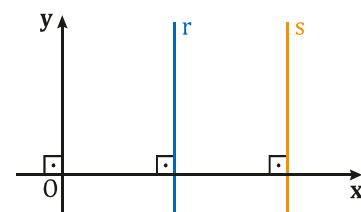
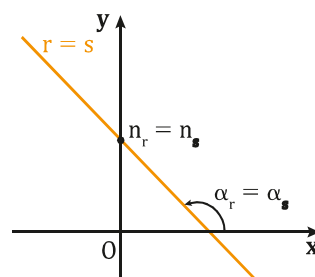
a) $r: 2x + 5y - 6 = 0$ e $s: 6x + 15y + 1 = 0$ são paralelas, pois $m_r = -\frac{2}{5}$ e $m_s = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$, e $n_r = \frac{6}{5}$ e $n_s = -\frac{1}{15}$.

b) $r: 3y + 5 = 0$ e $s: 2y - 7 = 0$ são paralelas, pois $m_r = -\frac{0}{3} = 0$ e $m_s = -\frac{0}{2} = 0$, e $n_r = -\frac{5}{3}$ e $n_s = \frac{7}{2}$.

c) $r: 4x + 7 = 0$ e $s: 3x - 1 = 0$ são paralelas, pois ambas são perpendiculares ao eixo x e o intersectam em pontos distintos.



Imagens: Zapt



d) Para obter uma equação da reta s que passa por $P(6, 7)$ e é paralela à reta

$$r: 2x + 3y - 1 = 0$$

$$m_r = -\frac{2}{3}$$

$$s \parallel r \Rightarrow m_s = m_r \Rightarrow m_s = -\frac{2}{3}$$

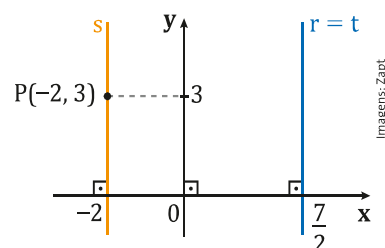
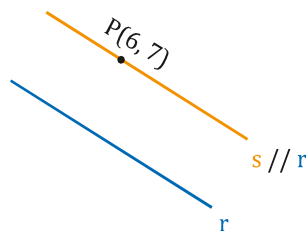
$$m_s = \frac{y - y_p}{x - x_p} = \frac{y - 7}{x - 6} = -\frac{2}{3}$$

$$y - 7 = -\frac{2}{3}(x - 6)$$

$$\text{ou } s: 2x + 3y - 33 = 0.$$

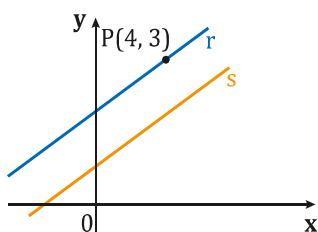
e) A reta paralela a $r: 2x - 7 = 0$ e que passa por $P(-2, 3)$ tem equação: $x = -2$.

A reta t de equação $x = \frac{7}{2}$ coincide com r .



DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R11. As retas r e s são paralelas. Qual é a equação geral da reta r , que passa por $P(4, 3)$, se a equação da reta s é $2x - 7y + 1 = 0$?



Resolução

Vamos obter a equação reduzida de s .

$$s: 2x - 7y + 1 = 0 \text{ ou } s: y = \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}.$$

Da equação, temos $m_s = \frac{2}{7}$ e, como $r \parallel s$, temos

$$m_r = m_s = \frac{2}{7}.$$

A reta r passa por $P(4, 3)$; logo, sua equação poderá ser encontrada se fizermos:

$$m_r = \frac{y - y_p}{x - x_p} = \frac{y - 3}{x - 4} \text{ ou } y - 3 = \frac{2}{7}(x - 4).$$

$$\text{Assim, } r: y = \frac{2}{7}x + \frac{13}{7} \text{ ou } r: 2x - 7y + 13 = 0.$$

R12. Para que valor de k as retas $r: 2x - 3y + 9 = 0$ e $s: kx - 12y + 7 = 0$ são paralelas?

Resolução

Vamos obter o coeficiente angular de r e s .

$$m_r = \frac{2}{3} \text{ porque } r: y = \frac{2}{3}x + 3.$$

$$m_s = \frac{k}{12} \text{ porque } s: y = \frac{k}{12}x + \frac{7}{12}.$$

$$\text{Para que } r \parallel s, m_r = m_s; \text{ logo, } \frac{2}{3} = \frac{k}{12} \text{ ou } k = 8.$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



32. Verifique se r e s são paralelas.

a) $r: 3x - 4y - 2 = 0$

$s: 6x - 8y + 1 = 0$

b) $r: 5x - 3y + 1 = 0$

$s: 6x + 4y - 1 = 0$

c) $r: 5y - 3 = 0$

$s: 2y + 7 = 0$

33. Obtenha a equação da reta que passa por P e é paralela à reta s .

a) $P(5, 2)$, $s: 3x - 4y + 2 = 0$

b) $P(4, 6)$, $s: 2x - 3y - 1 = 0$

c) $P(5, 4)$, $s: 4y - 7 = 0$

d) $P(3, -6)$, $s = \overline{AB}$ com $A(2, 5)$ e $B(-1, 3)$

34. Dois lados de um retângulo estão contidos nas retas de equações $2x - 3y + 5 = 0$ e $3x + 2y - 7 = 0$ e $A(2, -3)$ é um de seus vértices. Obtenha as equações das retas suportes dos outros lados.

35. Ache o valor de k para que $4x + 10y + 13 = 0$ e $6x + ky + 11 = 0$ sejam paralelas.

36. Para qual valor de k as retas

$x + ky + 2 = 0$ e $kx + 4y + 3 = 0$ não são paralelas?

37. (Unemat) Dada a equação de reta (s): $2x - y + 1 = 0$, a equação de reta paralela a s pelo ponto P(1, 1) será:

- a) $2x - y = 0$ d) $2x - y - 1 = 0$
 b) $2x + y + 1 = 0$ e) $2x - y + 2 = 0$
 c) $2x + y - 1 = 0$

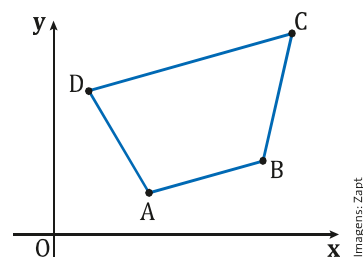
38. Do quadrilátero ABCD, sabemos que:

- \overline{AB} e \overline{CD} são paralelos;
- a equação da reta AD é $y = -x + 6$;
- a equação da reta BC é $y = 5x - 36$;

• a equação da reta CD é $y = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$;

• A(4, 2).

Quais são as coordenadas dos vértices B, C e D?



5 Perpendicularismo de retas

Sejam as retas r e s , não paralelas a nenhum dos eixos coordenados, de coeficientes angulares

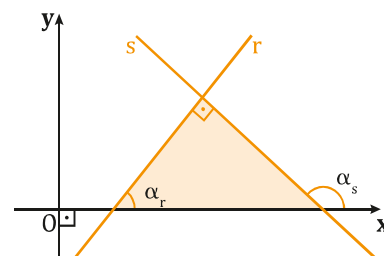
$$m_r = \operatorname{tg} \alpha_r \text{ e } m_s = \operatorname{tg} \alpha_s.$$

Se r e s são perpendiculares entre si, então, no triângulo assinalado, temos:

$$\alpha_s = \frac{\pi}{2} + \alpha_r \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_s = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_r \right)$$

$$\text{Mas } \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_r \right) = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_r \right) = -\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_r \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_r \right)} = -\frac{\cos \alpha_r}{\operatorname{sen} \alpha_r} =$$

$$= -\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} \alpha_r}{\cos \alpha_r}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_r}. \text{ Logo, } \operatorname{tg} \alpha_s = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_r} \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$



Portanto, $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$ ①

Analisemos a recíproca, isto é, se $m_r \cdot m_s = -1$, e vejamos o que ocorre com o ângulo formado por r e s .

Se β um dos ângulos formados por r e por s , temos:

$$\alpha_s = \alpha_r + \beta \quad \text{①}$$

$$\text{De } m_r \cdot m_s = -1, \text{ obtemos: } m_s = -\frac{1}{m_r} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_s = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_r}$$

Repetindo os cálculos anteriores:

$$\operatorname{tg} \alpha_s = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_r} = -\frac{\cos \alpha_r}{\operatorname{sen} \alpha_r} = -\frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_r \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_r \right)} = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_r \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha_r \right)$$

$$\text{Como } \frac{\pi}{2} < \alpha_s < \pi \text{ e } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \alpha_r < \pi, \text{ temos: } \alpha_s = \frac{\pi}{2} + \alpha_r \quad \text{②}$$

$$\text{De ① e ②, obtemos } \beta = \frac{\pi}{2}. \text{ Portanto, } m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s \quad \text{②}$$

De ① e ②, podemos escrever:

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1 \text{ ou } m_r = -\frac{1}{m_s}$$

É evidente que essa condição não pode ser aplicada quando uma das retas é perpendicular ao eixo x ; mas, nesse caso, não há dificuldade, pois a reta perpendicular a ela é paralela ao eixo x .

Exemplos:

a) $r: 3x + 4y - 1 = 0$ e $s: 4x - 3y + 2 = 0$ são perpendiculares, pois $m_r \cdot m_s = -\frac{3}{4} \left(\frac{4}{3} \right) = -1$.

b) $r: 4x - 7 = 0$ e $s: 5y + 3 = 0$ são perpendiculares, pois r é perpendicular ao eixo x e s é perpendicular ao eixo y .

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R13. Sejam $A(-3, 1)$ e $r: x + 2y - 4 = 0$. Obtenha:

- a reta s que passa por A e é perpendicular a r .
- a projeção ortogonal de A sobre r .
- o ponto simétrico de A em relação a r .

Resolução

a) $s \perp r \Rightarrow m_s \cdot m_r = -1$

$$m_r = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_r = -\frac{1}{2}$$

Logo, $m_s = 2$ e a equação de s é:

$$y - 1 = 2[x - (-3)] \Rightarrow y = 2x + 7$$

- b) $A \notin r$, pois $-3 + 2 \cdot 1 - 4 = 0$ é falsa; então, a projeção ortogonal de A sobre r é o ponto B , interseção de r com s .

Resolvendo $\begin{cases} x + 2y - 4 = 0 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$, obtemos $x = -2$ e $y = 3$.

Portanto, $B(-2, 3)$.

- c) O simétrico de A em relação a r é o ponto $C \in s$ tal que $d_{CB} = d_{AB}$, ou seja, B é o ponto médio de \overline{AC} .

$$\frac{x_A + x_C}{2} = x_B \Rightarrow \frac{-3 + x_C}{2} = -2 \Rightarrow x_C = -1$$

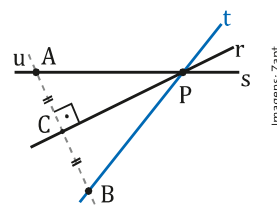
$$\frac{y_A + y_C}{2} = y_B \Rightarrow \frac{1 + y_C}{2} = 3 \Rightarrow y_C = 5$$

Portanto, $C(-1, 5)$.

R14. Obtenha uma equação da reta t , simétrica de $s: x + y - 7 = 0$ em relação à reta $r: 2x - y + 4 = 0$.

Resolução

Note, inicialmente, que r e s são concorrentes num ponto P ; a reta t passa por P e por um ponto B , simétrico, em relação a r , de um ponto qualquer $A \in s$, $A \neq P$.



Determinação de P :

Resolvendo $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + y - 7 = 0 \end{cases}$, obtemos $x = 1$ e $y = 6$.

Logo, $P(1, 6)$.

Escolha de $A \in s$, $A \neq P$:

Para $x = 6$, em $x + y - 7 = 0$ resulta $y = 1$. Logo, $A(6, 1)$.

Obtenção da equação da reta u , por A , $u \perp r$:

$$m_r = 2 \rightarrow m_u = -\frac{1}{2}$$

$$m_u = \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y - 1}{x - 6} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 6) \Rightarrow x + 2y - 8 = 0$$

Determinação de C , interseção de r e de u :

Resolvendo $\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + 2y - 8 = 0 \end{cases}$, obtemos $x = 0$ e $y = 4$.

Logo, $C(0, 4)$.

Determinação de B :

C é ponto médio de \overline{AB} , então:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = x_C \Rightarrow \frac{6 + x_B}{2} = 0 \Rightarrow x_B = -6 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = y_C \Rightarrow \frac{1 + y_B}{2} = 4 \Rightarrow y_B = 7 \end{cases}$$

Logo, $B(-6, 7)$.

Obtenção da equação de $t = \overline{PB}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6x - 6y + 7 + 36 - 7x - y = 0 \Rightarrow x + 7y - 43 = 0$$

Logo, $t: x + 7y - 43 = 0$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



39. Verifique se r e s são retas perpendiculares.

a) $r: 5x - 7y = 0$

c) $r: 3x - 5y + 2 = 0$

$s: 7x + 5y - 1 = 0$

$s: 5x - 3y - 2 = 0$

b) $r: 4x + 6y - 1 = 0$

d) $r: 3x - 7 = 0$

$s: 2x + 3y + 1 = 0$

$s: 2y + 5 = 0$

40. Obtenha, em cada caso, a equação da reta r que passa por P e é perpendicular à reta s .

a) $P(2, 3)$, $s: 4x - 5y - 1 = 0$

b) $P(3, -2)$, $s: x + 2y - 3 = 0$

c) $P(5, -6)$, $s: 2x + 3 = 0$

d) $P(-2, 4)$, $s: 3y + 7 = 0$

41. Sejam $P(-2, 5)$ e $r: x - 2y + 6 = 0$. Determine:

a) a projeção ortogonal de P sobre r .

b) o simétrico de P em relação a r .

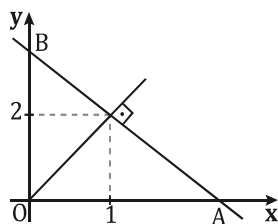
42. Obtenha a equação da reta simétrica de $r: 2x - y = 0$ em relação à reta $s: x - y + 3 = 0$.

43. Seja o triângulo de vértices $A(-1, 3)$, $B(6, -4)$ e $C(8, 6)$. Determine as equações das retas suportes das alturas do $\triangle ABC$.

44. Dado o triângulo de vértices $A(3, 6)$, $B(-1, 3)$ e $C(2, -1)$, obtenha as equações das mediatrizes de \overline{AB} e \overline{BC} .

45. (Unicamp-SP) A área do triângulo OAB esboçado na figura ao lado é:

- a) $\frac{21}{4}$ c) $\frac{25}{4}$
b) $\frac{23}{4}$ d) $\frac{27}{4}$



46. (UEM-PR) Considere, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, os pontos $A(0, 0)$, $B(0, 5)$ e

$C(a, 2a)$, em que $a > 0$, e diga quais alternativas são verdadeiras e quais são falsas.

- a) O triângulo ABC pode ser equilátero.
b) A reta de equação $y = -\frac{1}{2}x + 20$ é perpendicular à reta que contém os pontos A e C.
c) Se $a = 2$, então o triângulo ABC é retângulo.
d) Se a área do triângulo ABC mede 10 unidades de área, então C tem coordenadas (5, 10).
e) Se D é um ponto tal que ABCD seja um losango, então as coordenadas de D são (4, 3).

6 Feixe de retas concorrentes

conteúdo opcional

Equação de uma reta passando por um ponto

Consideremos, no plano cartesiano, as retas que passam por um mesmo ponto $P(x_0, y_0)$.

- A reta **perpendicular** ao eixo x tem por equação $x = x_0$.
- Cada uma das outras retas tem um coeficiente angular **m** e sua equação reduzida é $y = mx + n$, com a condição de **P** pertencer a ela.

Logo: $y_0 = mx_0 + n \Rightarrow n = y_0 - mx_0$

Substituindo em $y = mx + n$, temos: $y = mx + y_0 - mx_0 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

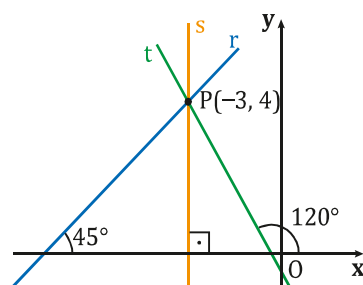
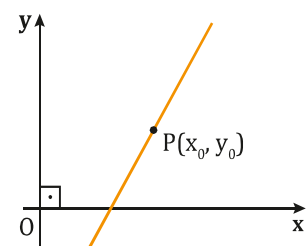
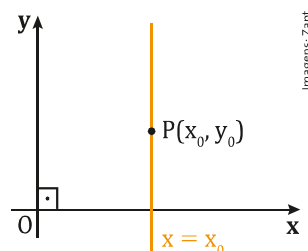
Portanto:

A equação de uma reta que passa por $P(x_0, y_0)$ é:
 $y - y_0 = m(x - x_0)$ ou $x = x_0$

Exemplo:

Na figura ao lado, as três retas passam por $P(-3, 4)$.

- a) **s** tem equação $x = -3$.
b) **r** tem coeficiente angular $m_r = \text{tg } 45^\circ = 1$ e equação
 $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 4 = 1 \cdot [(x - (-3))] \Rightarrow$
 $\Rightarrow y - 4 = x + 3 \Rightarrow y = x + 7$.
c) **t** tem coeficiente angular $m_t = \text{tg } 120^\circ = -\sqrt{3}$
e equação $y - 4 = -\sqrt{3} [x - (-3)] \Rightarrow y = -\sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 4$.

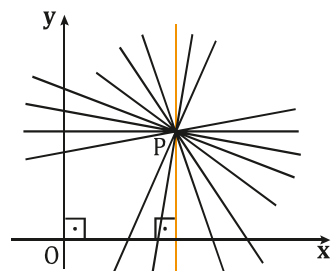


Equação de um feixe de retas concorrentes

O conjunto das retas coplanares que passam por um mesmo ponto **P** é denominado **feixe de retas concorrentes em P**; **P** é chamado de **centro** desse feixe.

Na equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, em que $P(x_0, y_0)$:

- a cada valor real de **m** corresponde uma única reta do plano cartesiano que passa por **P**;



- fazendo m variar em \mathbb{R} , teremos **todas as retas** do plano cartesiano que passam por P , com exceção da reta perpendicular ao eixo x , que tem equação $x = x_0$.

Portanto:

O feixe de retas concorrentes em $P(x_0, y_0)$ tem equação $x = x_0$ ou $y - y_0 = m(x - x_0)$, $m \in \mathbb{R}$.

Exemplos:

- O feixe de retas concorrentes em $P(-3, 0)$ tem equação $x = -3$ ou $y = m(x + 3)$, com m variável real.
- A equação $y + 2 = m(x - 1)$, com m variável real, fornece as retas que passam por $P(1, -2)$, exceto a reta $x = 1$.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R15. Sejam os feixes de retas concorrentes de equações $mx - y - m + 2 = 0$ e $kx - y + k + 3 = 0$, com m e k reais. Obtenha:

- a equação da reta comum aos dois feixes;
- as interseções das retas perpendiculares ao eixo x pertencentes a esses feixes com a reta bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.

Resolução

- A reta comum aos dois feixes é a que passa pelos centros desses feixes. Como:

$$mx - y - m + 2 = 0 \Leftrightarrow y - 2 = m(x - 1)$$

$$kx - y + k + 3 = 0 \Leftrightarrow y - 3 = k(x + 1)$$

os centros dos feixes são $P(1, 2)$ e $Q(-1, 3)$ e a reta solicitada tem equação:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x - y + 3 + 2 - 3x - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

Outro modo:

Para determinarmos o centro do feixe de equação $mx - y - m + 2 = 0$, basta atribuir a m dois valores diferentes e resolver o sistema resultante.

$$\left. \begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow -y + 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \\ m = 1 \Rightarrow x - y - 1 + 2 = 0 \Rightarrow x - y + 1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1$$

Portanto, o centro do primeiro feixe é $P(1, 2)$.

De forma análoga, no outro feixe obtemos $Q(-1, 3)$.

- A reta r perpendicular ao eixo x do feixe de equação $mx - y - m + 2 = 0$ tem equação $x = 1$; a reta s perpendicular ao eixo x do feixe de equação $kx - y + k + 3 = 0$ tem equação $x = -1$; a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes tem equação $x + y = 0$.

$$\text{Resolvendo os sistemas } \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = -1 \\ x + y = 0 \end{cases},$$

obtemos os pontos solicitados: $(1, -1)$ e $(-1, 1)$.

FAZER E APRENDER

**REGISTRE
NO CADERNO** 

47. As retas de equações $x + 4y - 11 = 0$ e $2x - y - 4 = 0$ pertencem a um feixe de retas que passam por P .

- Dê a equação desse feixe.
- Verifique se a reta de equação $x - y - 1 = 0$ pertence a esse feixe.
- Determine c para que a reta de equação $x + y + c = 0$ pertença a esse feixe.

48. Obtenha a equação da reta r do feixe de retas que passam por $P(-4, -5)$, tal que:

- r seja perpendicular ao eixo x .
- r seja perpendicular ao eixo y .
- r seja paralela à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.
- $0 \in r$.

49. Sejam os feixes de retas concorrentes de equações $mx - y + 2 = 0$ e $px - y + p - 4 = 0$, com m e p reais.

- Obtenha a equação da reta comum a esses dois feixes.
- Determine os pontos de interseção da bissetriz do 1º e do 3º quadrantes com as retas desses feixes que são perpendiculares ao eixo x .

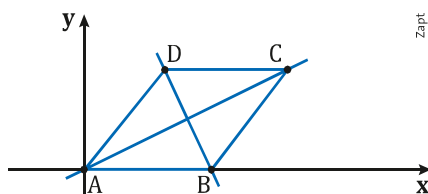
50. (UFSCar-SP) Considere a reta

$$r: (a + 1)^2x + (a^2 - a)y - 4a^2 + a - 1 = 0.$$

- Mostre que essa reta passa por um ponto cujas coordenadas não dependem do parâmetro a .
- Determine a de modo que r seja perpendicular à reta $s: x - 1 = 0$.



4. Elabore um exercício envolvendo a reta $t: x - 2y - 5 = 0$ e o ponto $(-3, 1)$.
5. Invente um problema envolvendo área, perímetro e equação das diagonais a partir da figura abaixo.



Os problemas criados pelos estudantes para o item 5 são produções que permitem avaliar a aprendizagem dos principais conteúdos de Geometria analítica estudados até aqui.

Escolha as coordenadas de A, B, C e D de modo a garantir que ABCD seja um paralelogramo.

7 Inequação do 1º grau com duas variáveis

conteúdo opcional

Inequação do 1º grau nas variáveis reais x e y é toda inequação da forma:

$$ax + by + c > 0 \text{ ou } ax + by + c < 0 \text{ ou } ax + by + c \geq 0 \text{ ou } ax + by + c \leq 0,$$

em que a , b e c são números reais conhecidos, com a e b não simultaneamente nulos.

Exemplos:

a) $2x + 4y - 5 < 0$

c) $2x + 0y + 7 \leq 0$

b) $-3x + 5y + 15 > 0$

d) $0x + 3y - 5 \geq 0$

Uma inequação do 1º grau com duas variáveis admite infinitas soluções. Ou seja, existem infinitos pontos do plano cartesiano cujas coordenadas satisfazem a inequação dada.

Exemplo:

$(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-2, 1)$ são algumas soluções de $x + 2y - 4 < 0$, pois

$0 + 2 \cdot 0 - 4 < 0$, $1 + 2 \cdot 1 - 4 < 0$, $(-2) + 2 \cdot 1 - 4 < 0$ são verdadeiras.

Para descobrir as soluções de uma inequação linear com duas variáveis, vamos estudar os semiplanos com sua fronteira, que é a reta.

Semiplanos

Seja a reta r de equação $ax + by + c = 0$. Temos dois casos a considerar:

1º) r é perpendicular ao eixo x , isto é, $b = 0$;

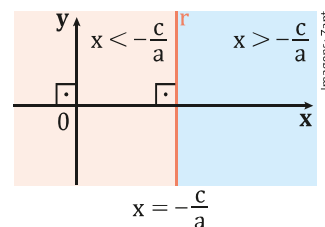
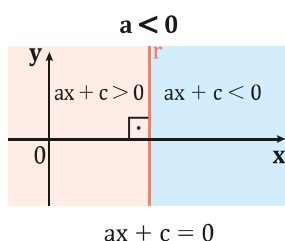
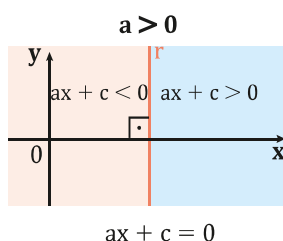
r tem equação $x = -\frac{c}{a}$.

Todo ponto à direita de r tem abscissa $x > -\frac{c}{a}$ e todo ponto à esquerda de r tem abscissa $x < -\frac{c}{a}$.

Para $a > 0$, temos $x > -\frac{c}{a} \Leftrightarrow ax + c > 0$ e $x < -\frac{c}{a} \Leftrightarrow ax + c < 0$.

Para $a < 0$, temos $x > -\frac{c}{a} \Leftrightarrow ax + c < 0$ e $x < -\frac{c}{a} \Leftrightarrow ax + c > 0$.

Então, para os semiplanos determinados por $r: ax + c = 0$, temos:



2º) r não perpendicular ao eixo x , isto é, $b \neq 0$

r tem equação reduzida: $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Qualquer que seja $A(x_A, y_A) \in r$, vale: $y_A = -\frac{a}{b}x_A - \frac{c}{b}$

Todo ponto B , de abscissa $x_B = x_A$, acima de r , tem ordenada $y_B > y_A$,
ou seja: $y_B > -\frac{a}{b}x_B - \frac{c}{b}$

Todo ponto C , de abscissa $x_C = x_A$, abaixo de r , tem ordenada $y_C < y_A$,
ou seja: $y_C < -\frac{a}{b}x_C - \frac{c}{b}$

Então, todo ponto do semiplano acima de r : $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ satisfaz a condição $y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ e todo ponto do semiplano abaixo de r satisfaz a condição $y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

Para $b > 0$, temos: $y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Leftrightarrow ax + by + c > 0$ e $y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Leftrightarrow ax + by + c < 0$

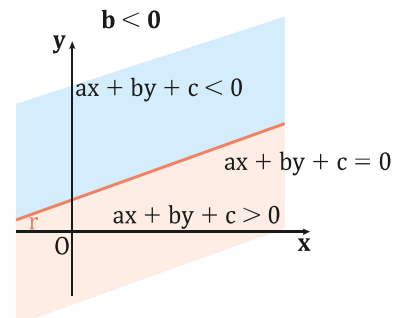
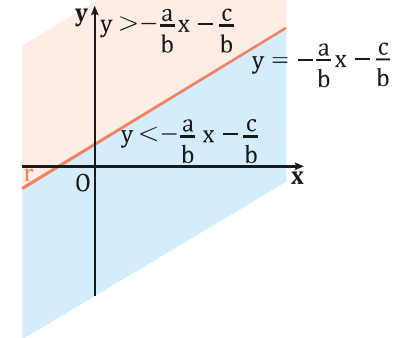
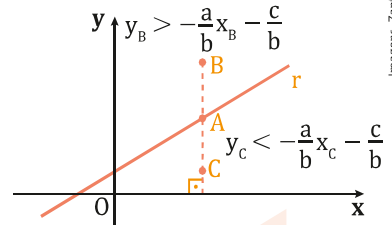
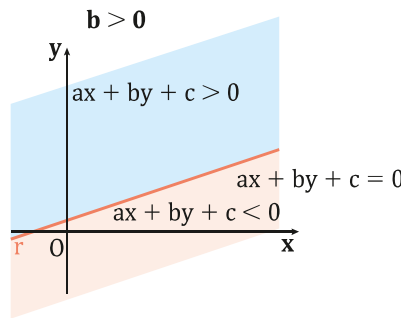
Para $b < 0$, temos:

$$y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ax + by + c < 0 \text{ e } y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + by + c > 0$$

Portanto, para os semiplanos determinados por r : $ax + by + c = 0$, temos:



DE OLHO NA RESOLUÇÃO

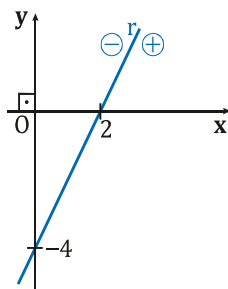
R16. Resolva graficamente as inequações a seguir.

a) $2x - y - 4 > 0$

b) $2x - y - 4 \geq 0$

Resolução

Inicialmente, desenhemos a reta r : $2x - y - 4 = 0$.



A seguir, substituímos as coordenadas de um ponto qualquer, não pertencente a r , em $E(x, y) = 2x - y - 4$.

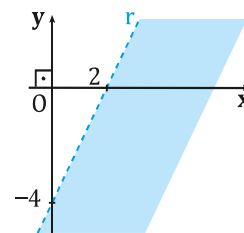
Por exemplo, para $O(0, 0)$, temos:

$$E(0, 0) = 2 \cdot 0 - 0 - 4 \Rightarrow E(0, 0) = -4 < 0$$

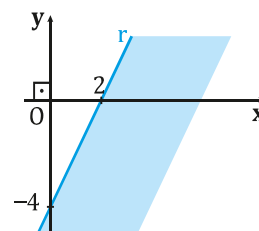
Logo, dos dois semiplanos abertos determinados por r , o que contém o ponto O torna $E(x, y)$ negativo e o outro torna $E(x, y)$ positivo.

O sinal \ominus indica que $E(x, y) < 0$ para todo ponto daquele semiplano aberto.

a) Portanto, a solução de: $2x - y - 4 > 0$ é o semiplano aberto que não contém O (r está tracejada para indicar que seus pontos não são soluções de $2x - y - 4 > 0$).



b) Reunindo as soluções de $2x - y - 4 > 0$ com as soluções de $2x - y - 4 = 0$, obtemos as soluções de $2x - y - 4 \geq 0$; portanto, temos o semiplano que não contém O .



R17. Resolva graficamente:

a) o sistema $\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ 2x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$

b) o sistema $\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ 2x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x + y - 2 < 0 \\ 2x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$

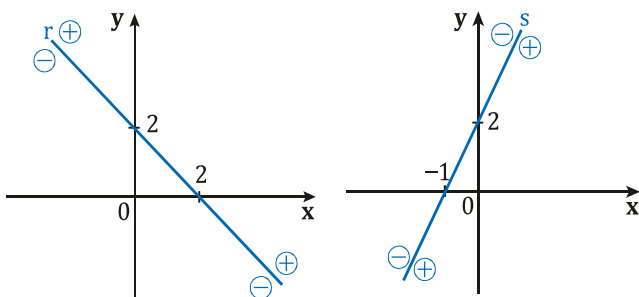
c) a inequação $(x + y - 2)(2x - y + 2) \leq 0$

d) a inequação $\frac{x + y - 2}{2x - y + 2} \geq 0$

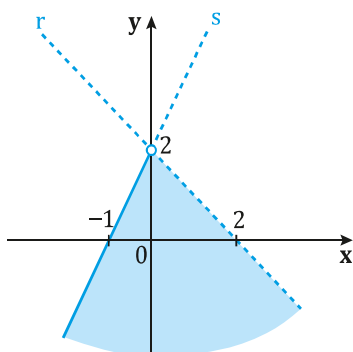
Resolução

Desenhando:

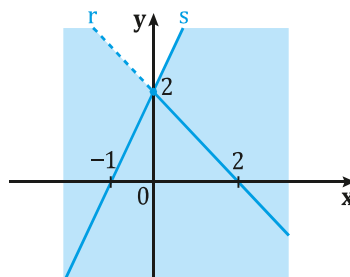
r: $x + y - 2 = 0$ e s: $2x - y + 2 = 0$, temos:



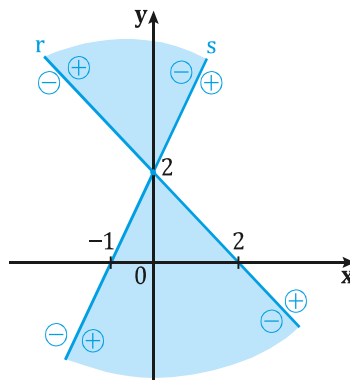
a) Fazendo a interseção da região $x + y - 2 < 0$ com a região $2x - y + 2 \geq 0$, obtemos:



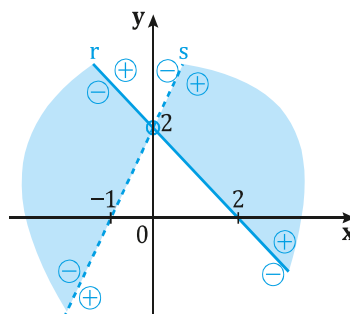
b) Fazendo a reunião da região $x + y - 2 < 0$ com a região $2x - y + 2 \geq 0$, obtemos:



c) Temos de reunir as regiões nas quais $x + y - 2$ e $2x - y + 2$ tenham sinais contrários com os pontos para os quais $x + y - 2 = 0$ ou $2x - y + 2 = 0$.



d) Temos de reunir as regiões nas quais $x + y - 2$ e $2x - y + 2$ tenham o mesmo sinal com os pontos para os quais $x + y - 2 = 0$ e $2x - y + 2 \neq 0$.



Imagens: Zapt

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO

51. Represente os pontos (x, y) que satisfazem cada condição.

a) $2x - 3y + 6 < 0$

c) $3x - 5 \leq 0$

b) $x - 2y + 4 \geq 0$

d) $-2y + 7 \geq 0$

52. Represente os pontos (x, y) que satisfazem:

a) $x - y + 1 \leq 0$ e $x + 2 > 0$

b) $x - 2y > 0$ ou $x + y - 3 \leq 0$

53. Resolva graficamente as inequações.

a) $(x - y + 2)(2x - y + 4) > 0$

b) $\frac{2x - 3y - 6}{x - y - 1} \geq 0$

54. Sejam $A(k, 2)$, $B(-1, 3k)$ e $r: 3x + 2y - 6 = 0$.

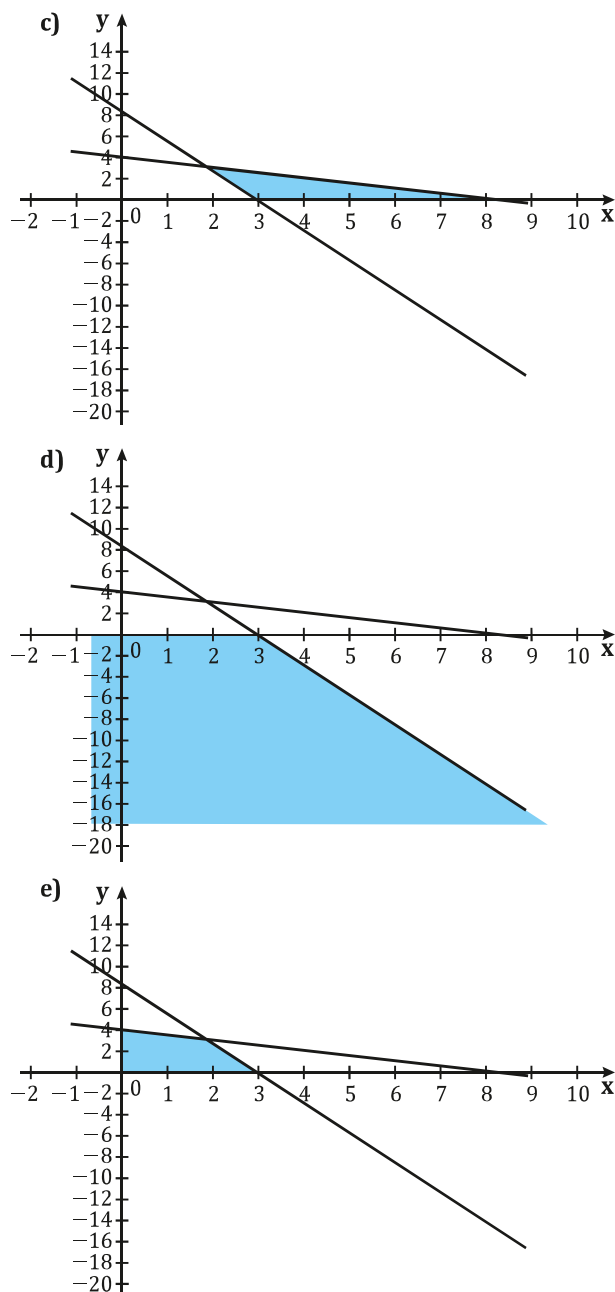
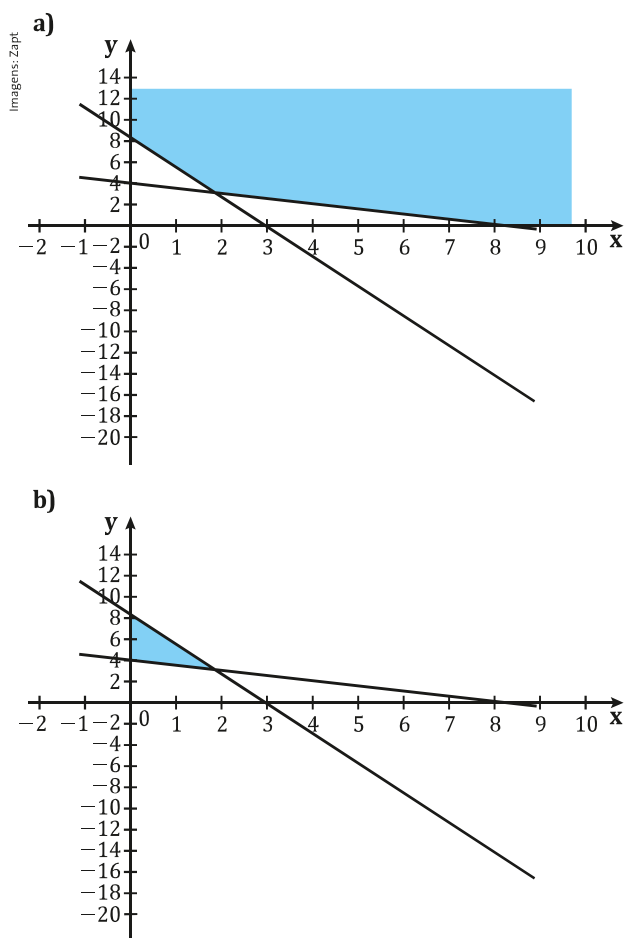
Determine k para que **A** e **B** pertençam a:

a) semiplanos opostos em relação a r .

b) um mesmo semiplano determinado por r .

55. (Unesp-SP) Uma fábrica utiliza dois tipos de processos, P_1 e P_2 , para produzir dois tipos de chocolates, C_1 e C_2 . Para produzir 1000 unidades de C_1 são exigidas 3 horas de trabalho no processo P_1 e 3 horas em P_2 . Para produzir 1000 unidades de C_2 são necessárias 1 hora de trabalho no processo P_1 e 6 horas em P_2 . Representando por x a quantidade diária de lotes de 1000 unidades de chocolates produzidas pelo processo P_1 e por y a quantidade diária de lotes de 1000 unidades de

chocolates produzidas pelo processo P_2 , sabe-se que o número de horas trabalhadas em um dia no processo P_1 é $3x + y$, e que o número de horas trabalhadas em um dia no processo P_2 é $3x + 6y$. Dado que no processo P_1 pode-se trabalhar no máximo 9 horas por dia e no processo P_2 pode-se trabalhar no máximo 24 horas por dia, a representação no plano cartesiano do conjunto dos pontos (x, y) que satisfazem, simultaneamente, às duas restrições de número de horas possíveis de serem trabalhadas nos processos P_1 e P_2 , em um dia, é:



PARA COMPLEMENTAR

Matemática e programação linear

Uma das aplicações da Matemática envolve o estudo de funções de duas variáveis que estão relacionadas por uma expressão do tipo: $f(x, y) = ax + by + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$), cujo domínio é um polígono no plano Oxy. Um exemplo aplicado pode ser visto a seguir.

Uma fábrica produz dois tipos de geradores, tipo **A** e tipo **B**, e cada um deles deve passar por duas máquinas, **C** e **D**. Para fazer um gerador do tipo **A**, a máquina **C** deve trabalhar 2 horas e a máquina **D** deve trabalhar 4 horas. Para fazer uma unidade do tipo **B**, as máquinas **C** e **D** devem trabalhar, respectivamente, 4 e 2 horas. As máquinas podem trabalhar 24 horas por dia. Sabe-se que a fábrica tem um lucro de R\$ 3 000,00 por um gerador do tipo **A** e um lucro de R\$ 5 000,00 por um do tipo **B**. Além disso, ela vende toda a sua produção. Sendo assim, perguntamos: quantos geradores de cada tipo a fábrica deve produzir para que seu lucro seja máximo?

Chamemos de x a quantidade do tipo **A**, e de y a do tipo **B**, e observemos as restrições sobre x e y . Se são fabricados x geradores do tipo **A**, o tempo gasto pela máquina **C** é $2x$, e se são fabricados y geradores do

tipo **B**, o tempo gasto pela máquina **C** é $4y$, ou seja, o tempo total usado pela máquina **C** é $2x + 4y$, que deve ser menor que 24 horas. Analogamente, temos uma restrição para a máquina **D**. Devemos ter, então:

$$\begin{aligned}x &\geq 0 \\y &\geq 0 \\2x + 4y &\leq 24 \\4x + 2y &\leq 24\end{aligned}$$

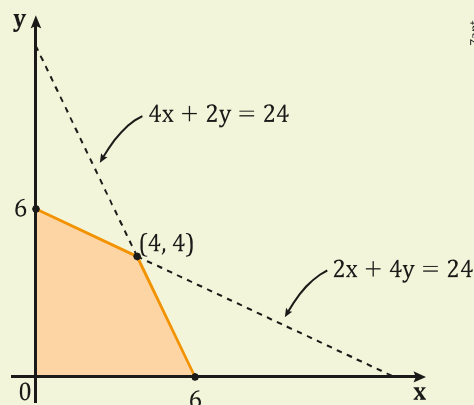
que nos fornece a região mostrada na figura, cujos vértices são $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(4, 4)$ e $(0, 6)$. A função que queremos maximizar é a função lucro:

$$f(x, y) = 3000x + 5000y$$

Existe um ramo da Álgebra, chamado **programação linear**, que prova que funções como $f(x, y)$ definidas numa região poligonal assumem seus valores máximos ou mínimos nos vértices do polígono. No caso do nosso exemplo:

[...] Como $f(0, 0) = 0$, $f(6, 0) = 18000$, $f(4, 4) = 32000$ e $f(0, 6) = 30000$, obtém-se o lucro máximo no ponto $(4, 4)$, ou seja, ao se produzir 4 geradores do tipo **A** e 4 do tipo **B**.

Fonte: BOLDRINI, J. L. e outros. *Álgebra linear*. São Paulo: Harbra, 1978 p. 138-139.



CÁLCULO RÁPIDO

REGISTRE
NO CADERNO



Continuaremos a fazer cálculos rápidos com álgebra.

1. Calcule mentalmente:

a) $(2a + b)(2a - b)$ c) $(2x + 2y)(2x - 2y)$
b) $(3x - 5)(3x + 5)$ d) $(u + v)(u - v)$

2. Calcule mentalmente:

a) $(x + 7)^2$ c) $(a - 3)^2$ e) $(-a - 2)^2$
b) $(x - 7)^2$ d) $(5 - y)^2$ f) $4(-x + 3)^2$

3. Calcule mentalmente:

a) $(1 - 10x)^2$ c) $(-6x)^2$ e) $(a - b)(a + b)$
b) $(5x - 1)(x + 3)$ d) $(x + 6)(x - 6)$ f) $4x(x + 2)^2$

4. Solva mentalmente estes sistemas.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = 3x \\ x - y = -6 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ \frac{3}{2}x - y = -6 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2a - b = 5 \\ -3a - b = 15 \end{cases}$ h) $\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases}$

PALAVRAS-CHAVE

REGISTRE
NO CADERNO



A palavra-chave deste capítulo é **reta**.

O que você pode escrever a respeito disso?

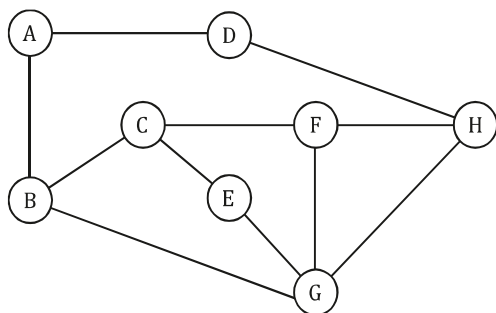
Faça no caderno um resumo contendo as principais informações sobre a reta; dê exemplos, ilustre.

O esquema a seguir pode auxiliar na elaboração desse resumo.

- Equação geral de uma reta
- Ponto de uma reta e ponto de interseção de duas retas
- Equação reduzida de uma reta
 - concorrentes
 - perpendiculares ou não perpendiculares
- Posições relativas de duas retas
 - paralelas
 - coincidentes
- Inequações e semiplanos



1. (UFF-RJ) No mapa a seguir estão indicados os depósitos de uma rede de supermercados e as rotas possíveis entre eles.

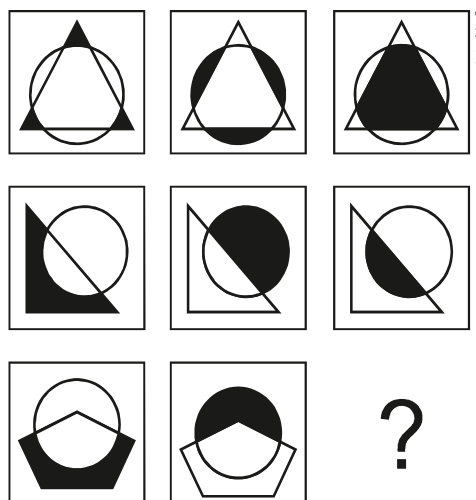


Um caminhão saindo do depósito **A** pode chegar ao depósito **H** de várias maneiras. Por exemplo, os trajetos $A \rightarrow D \rightarrow H$ e $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow H$ são duas possibilidades. A quantidade total de trajetos que um caminhão da empresa pode fazer, partindo do depósito **A** com destino ao depósito **H**, sem passar mais de uma vez pelo mesmo depósito, é igual a:

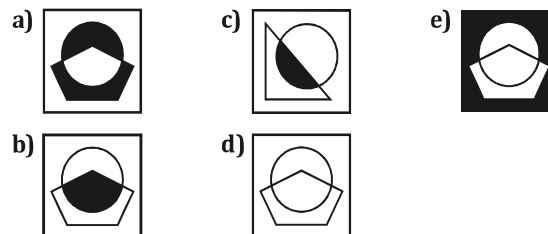
- a) 8 b) 12 c) 16 d) 30 e) 64

2. Em uma corrida de 62 voltas, o piloto **A** chegou na frente do piloto **B** por 26 s. O piloto **A** demorou 15 s no boxe, enquanto o **B** parou 10 s. Em média, quantos segundos por volta o piloto **A** ganhou do piloto **B**?

3. (CP-MG Simulado) As três sequências abaixo seguem a mesma ordem lógica.



Que opção completa corretamente a terceira sequência?



FOCO NA TECNOLOGIA

Calculadora

1. Caminhando em linha reta ao longo de uma praia, um banhista vai de um ponto **A** a um ponto **B**, cobrindo a distância $AB = 1200$ m. Quando está em **A**, ele avista um navio parado em **N** de tal maneira que o ângulo $N\hat{A}B$ é de 60° ; e, quando está em **B**, verifica que o ângulo $N\hat{B}A$ é de 45° .
- a) Faça no caderno uma figura ilustrativa da situação descrita.
- b) Calcule a que distância da praia encontra-se o navio.
2. Nas contas de água emitidas por uma certa companhia de saneamento, a tarifa é apresentada por faixas de consumo, de acordo com a tabela a seguir:

Faixa de consumo (em m^3)	Tarifa (em R\$/ m^3)
00 – 10	1,52
11 – 20	2,37
21 – 50	5,92
acima de 50	6,52

Por exemplo, para um consumo de $16 m^3$, o valor da tarifa é:
 $10 \cdot 1,52 + 6 \cdot 2,37$.

Com base nesses dados:

- a) obtenha a expressão que dá o valor da tarifa na última faixa de consumo.
- b) em uma residência que consumiu $46 m^3$ em determinado mês, qual foi o valor médio, em reais, pago por m^3 consumido?
- c) qual foi o consumo, em m^3 , quando a tarifa foi de R\$ 24,68, em determinado mês?

APRENDER A APRENDER

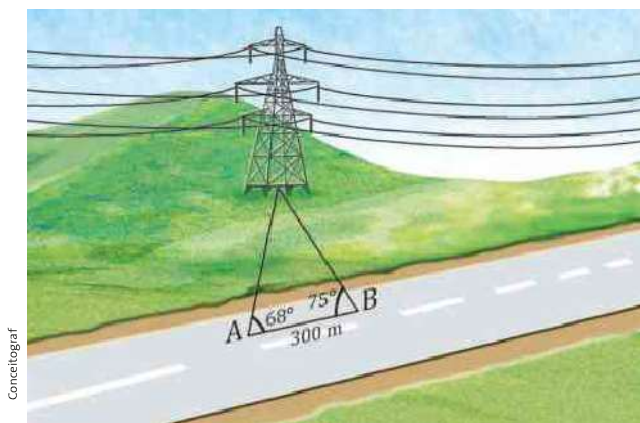


Relações trigonométricas em um triângulo qualquer

Você já aprendeu que há problemas em Trigonometria que não podem ser resolvidos recorrendo-se a triângulos retângulos. Isso porque há problemas que envolvem para sua resolução triângulos acutângulos (aqueles que têm todos os ângulos agudos) ou obtusângulos (que têm um ângulo obtuso). Por exemplo:

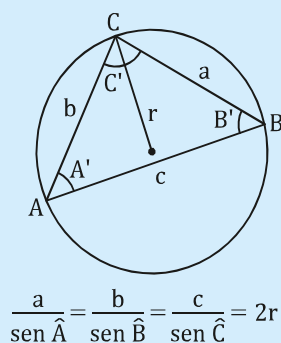
Um topógrafo precisa saber a que distância de uma estrada se encontra uma torre de alta tensão. Para isso, ele percorre um trecho retilíneo da estrada e faz as medições indicadas na figura. Qual é a distância aproximada da torre à estrada?

Para resolver problemas desse tipo, precisamos ampliar o que já sabemos sobre trigonometria no triângulo retângulo para triângulos quaisquer, de modo que todas as propriedades que valiam antes para seno, cosseno e tangente continuem válidas e possam ser utilizadas na resolução de novos problemas.



Uma dessas ampliações é conhecida como **teorema dos senos** ou **lei dos senos**.

Em todo triângulo ABC, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos, e a constante de proporcionalidade é a medida do diâmetro da circunferência que circunscreve o triângulo.

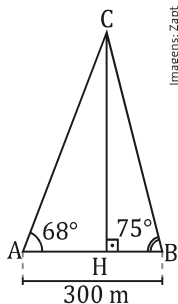


Circunferência circunscrita a um triângulo é aquela que passa pelos três vértices desse triângulo. Nesse caso, dizemos que a circunferência circunscreve o triângulo e que o triângulo está inscrito na circunferência.

Veja como usamos a lei dos senos para resolver o problema do topógrafo.

Primeiro, fazemos um esboço que represente esquematicamente a situação do problema.

Vamos chamar de C o ponto onde se encontra a torre. O que desejamos encontrar é a altura desse triângulo, em relação ao lado AB. Antes disso, vamos calcular a medida de



um dos lados, \overline{AC} ou \overline{BC} , para podermos trabalhar nos triângulos retângulos formados pela altura \overline{CH} .

A medida do terceiro ângulo do triângulo ABC pode ser obtida assim:

$$m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180^\circ \Leftrightarrow 68^\circ + 75^\circ + m(\hat{C}) = 180^\circ \Leftrightarrow m(\hat{C}) = 37^\circ$$

A partir da lei dos senos, temos:

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Leftrightarrow \frac{BC}{\sin 68^\circ} = \frac{AC}{\sin 75^\circ} = \frac{300}{\sin 37^\circ}$$

Consultando a tabela trigonométrica, temos:

$$\sin 68^\circ \approx 0,92718$$

$$\sin 75^\circ \approx 0,96593$$

$$\sin 37^\circ \approx 0,60182$$

Substituindo:

$$BC \approx \frac{0,92718 \cdot 300}{0,60182} \text{ e } AC \approx \frac{0,96593 \cdot 300}{0,60182}$$

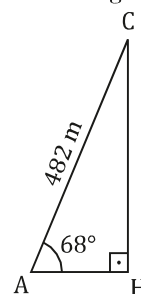
Obtemos $BC \approx 462$ metros e $AC \approx 482$ metros. Para calcular CH, podemos usar um dos triângulos retângulos, por exemplo $\triangle ACH$.

Nesse triângulo, temos:

$$\sin 68^\circ = \frac{CH}{AC} \Leftrightarrow CH =$$

$$= AC \cdot \sin 68^\circ \approx 482 \cdot 0,92718 \approx 447$$

Concluindo, a torre dista aproximadamente 447 metros da estrada.



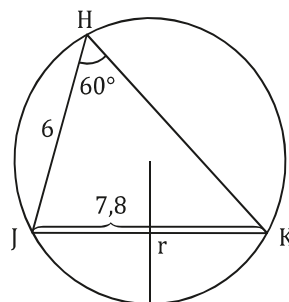
Veja agora este exercício parcialmente resolvido.

Em um triângulo HJK, inscrito em um círculo de raio r, $m(\hat{H}) = 60^\circ$, $JK = 7,8$ cm e $h = 6$ cm. Calcule a medida de \hat{K} , \hat{J} , \overline{HK} e r.

Resolução

Pelo teorema dos senos, podemos calcular a medida do ângulo K.

Veja o esboço a seguir:



$$\frac{7,8}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sin \hat{K}} \Leftrightarrow \sin \hat{K} \approx 0,6661$$

Consultando a tabela trigonométrica, temos $m(\hat{K}) \approx 42^\circ$.

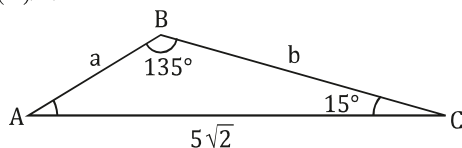
$$\text{Daí } m(\hat{J}) = 180^\circ - 42^\circ - 60^\circ = 78^\circ.$$

Agora é a sua vez. Resolva estes exercícios.

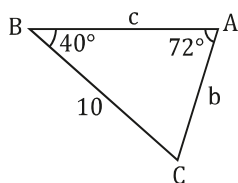
1. Siga as instruções.
 - a) Leia o problema a seguir mas não o resolva. Determine a medida da base do triângulo isósceles DEF, sabendo que os segmentos DE e EF medem 9 cm e que o ângulo D mede 45° .
 - b) Faça um esboço do triângulo mencionado no item a.
 - c) Responda: quais são os dados que o problema fornece?
 - d) Você resolveria o problema sem saber que o triângulo é isósceles? Por quê?
 - e) Agora resolva o problema.

2. Calcule em cada triângulo os elementos solicitados.

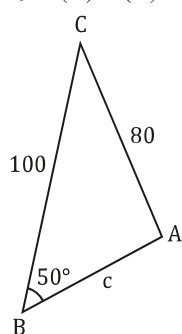
- a) $m(\hat{A})$, a, b.



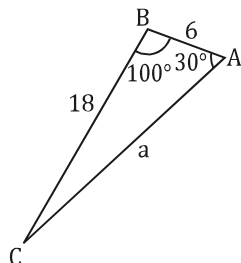
- b) $m(\hat{C})$, b, c.



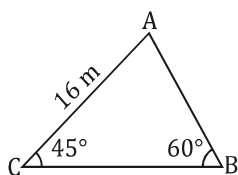
- c) $m(\hat{A})$, $m(\hat{C})$, c.



- d) $m(\hat{C})$, a.

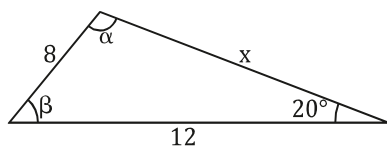


3. Aplique a lei dos senos no triângulo ABC para calcular a medida do lado AB.



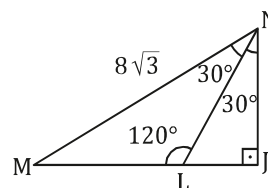
4. Faça o que se pede.

- a) Calcule o valor aproximado do ângulo α do triângulo a seguir.

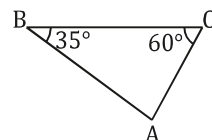


- b) Escreva um bilhete a um colega explicando-lhe por que podemos concluir que o problema tem excesso de dados e que o triângulo analisado é obtusângulo.

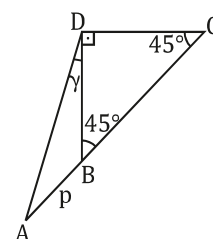
5. Determine as medidas de \overline{ML} e \overline{JL} .



6. Em uma fazenda, uma estufa A foi construída a 100 m da sede B. Calcule as distâncias da sede da fazenda e da estufa ao transformador de energia C, a partir dos dados apresentados na figura.



7. Calcule a medida do segmento BD em função de γ e p. Sugestão: escreva os ângulos internos do triângulo ABD em função de γ .



8. (UFSM-RS) A figura a seguir apresenta o delta do rio Jacuí, situado na região metropolitana de Porto Alegre. Nele se encontra o parque estadual Delta do Jacuí, importante parque de preservação ambiental. Sua proximidade com a região metropolitana torna-o suscetível aos impactos ambientais causados pela atividade humana.



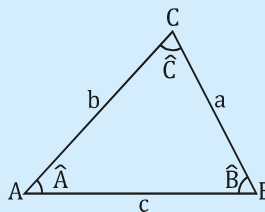
A distância do ponto B ao ponto C é de 8 km, o ângulo A mede 45° e o ângulo C mede 75° . Uma maneira de estimar quanto do delta do Jacuí está sob influência do meio urbano é dada pela distância do ponto A ao ponto C. Essa distância, em km, é:

- | | | |
|--------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| a) $\frac{8\sqrt{6}}{3}$ | c) $8\sqrt{2} + \sqrt{3}$ | e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ |
| b) $4\sqrt{6}$ | d) $8(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ | |

Área de um triângulo qualquer

Usando a lei dos senos, é possível encontrar a altura de um triângulo qualquer. Sabe-se também que, dado o lado de um triângulo e a altura correspondente a ele, pode-se calcular a área desse triângulo. Essas relações permitem saber que:

A área S de um triângulo qualquer é igual à metade do produto das medidas de dois de seus lados pelo seno do ângulo formado por esses lados.



$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \hat{A}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \hat{B}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \hat{C}$$

Use essa relação e resolva os exercícios a seguir.

ATIVIDADES

REGISTRE
NO CADERNO

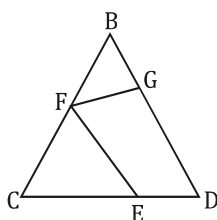


9. Calcule a área de um triângulo, sabendo que dois de seus lados têm medidas 4,5 cm e 7 cm, e o ângulo compreendido entre eles é de 70° .

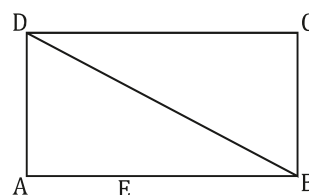
10. Calcule o ângulo compreendido entre os lados de medidas 4 cm e 8 cm em um triângulo de área 15 cm^2 .

11. Na figura dada, o triângulo BCD é equilátero de lado 6 cm,

BG = 2 cm e $ED = \frac{1}{3} CD$. Sabe-se, também, que F é o ponto médio de \overline{BC} . Calcule a área do quadrilátero EFGD.



12. Na figura, ABCD é um retângulo; DB = 6 cm, a medida do ângulo $\hat{A}BD$ é $\alpha = 30^\circ$, a medida do ângulo $\hat{A}ED$ é β , e $x = BE$.



Determine:

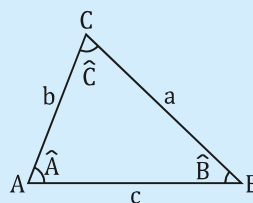
- a) a área do triângulo BDE, em função de x ;
b) o valor de x , quando $\beta = 75^\circ$.

Imagens: Zapit

Teorema dos cossenos ou lei dos cossenos

O Teorema dos cossenos permite-nos calcular exatamente a relação entre a^2 e $b^2 + c^2$ em qualquer triângulo.

Em um triângulo qualquer, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados, menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.



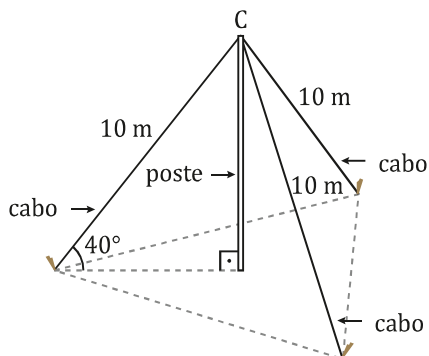
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \hat{C}$$

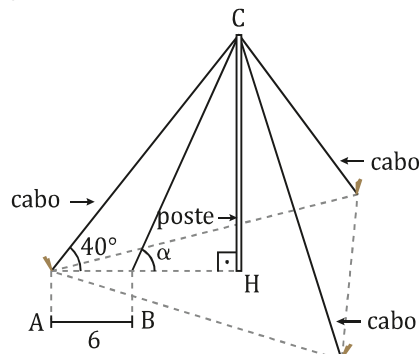
Veja um exercício resolvido a seguir.

Um poste é mantido na posição vertical por 3 cabos de aço estendidos, cada um com 10 m de comprimento formando ângulos de 40° com a superfície do chão. Para facilitar a circulação de pessoas, deseja-se colocar as pontas dos cabos 6 m mais próximas do poste. Qual é a medida dos cabos para sustentar o poste nessa nova situação? Qual é a altura do poste? Qual o ângulo que cada um dos cabos formará com o chão?



Resolução

Usando os dados do problema, podemos completar o desenho:



No triângulo ABC, podemos aplicar a lei dos cossenos e obter:

$$a^2 = 10^2 + 6^2 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \cos 40^\circ$$

$$a^2 \approx 100 + 36 - 120 \cdot 0,76604 \approx 44$$

$$a \approx \sqrt{44} \Rightarrow a \approx 6,6 \text{ m}$$

Imagens: Zapit

Assim, a medida de cada cabo será aproximadamente 6,6 m.

No triângulo retângulo BHC, temos:

$$\sin 40^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = 10 \cdot \sin 40^\circ \approx 10 \cdot 0,64279 \Rightarrow CH \approx 6,4 \text{ m}$$

Por fim, no triângulo retângulo CBH, vale:

$$\sin \alpha = \frac{CH}{BC} = \frac{6,4}{6,6} \Rightarrow \sin \alpha \approx 0,96969$$

Consultando a tabela trigonométrica ou usando uma calculadora científica, temos $\alpha \approx 76^\circ$.

A resposta para o problema: cada cabo deverá medir aproximadamente 6,6 m, a altura do poste é de aproximadamente 6,4 m e os cabos formarão ângulos de aproximadamente 76° com a superfície do chão.

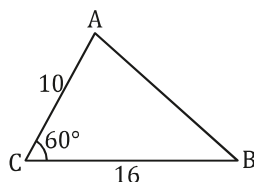
Vamos agora recordar misturando muitas ideias.

ATIVIDADES



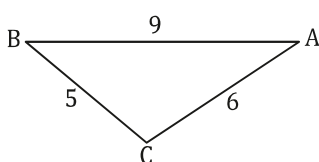
Em cada situação, procure identificar quais informações ajudam você a definir se usa a lei dos senos, a dos cossenos ou a área.

- 13.** Dado o triângulo ABC e sabendo que \overline{AC} mede 10 cm, CB mede 16 cm e o ângulo formado por esses lados é 60° , quais são os valores dos outros elementos (lado **c** e ângulos **A** e **B**) do triângulo?

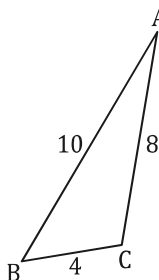


- 14.** Determine os elementos dos triângulos a seguir.

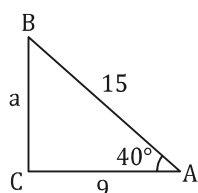
a) $m(\hat{A})$, $m(\hat{B})$, $m(\hat{C})$.



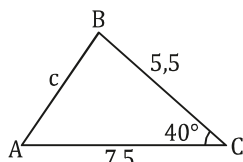
c) $m(\hat{A})$, $m(\hat{B})$, $m(\hat{C})$.



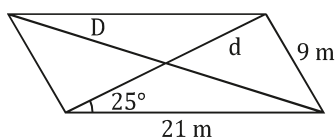
b) a , $m(\hat{B})$, $m(\hat{C})$.



d) c , $m(\hat{B})$, $m(\hat{A})$.

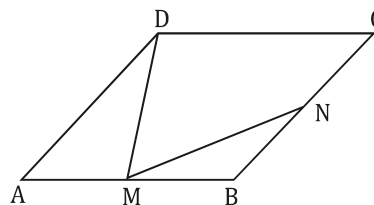


- 15.** Determine a medida das diagonais do paralelogramo.



- 16.** Os lados de um paralelogramo medem, respectivamente, 2 m e 6 m. Os lados adjacentes formam ângulos de 60° e 120° . Determine a medida da diagonal menor.

- 17.** (Fuvest-SP) No losango ABCD de lado 1, representado na figura, tem-se que **M** é o ponto médio de \overline{AB} , **N** é o ponto médio de \overline{BC} e $MN = \sqrt{\frac{14}{4}}$. Então, DM é igual a:



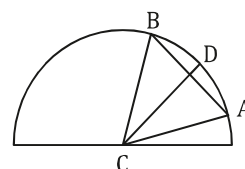
- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

- 18.** Siga as instruções.

- Leia o problema apresentado pela Fuvest, sublinhe as palavras desconhecidas e procure em um dicionário o significado delas.
- A figura que acompanha essa questão é essencial para a resolução do problema? Por quê?
- É importante saber que o triângulo é equilátero? Por quê?
- O texto do problema diz que **D** é o ponto de interseção da bissetriz do ângulo $\hat{A}\hat{C}\hat{B}$ com a semicircunferência. Qual é a conclusão que você pode obter a partir dessa informação?
- Trace na figura da questão a corda \overline{AD} .
- Resolva o problema.

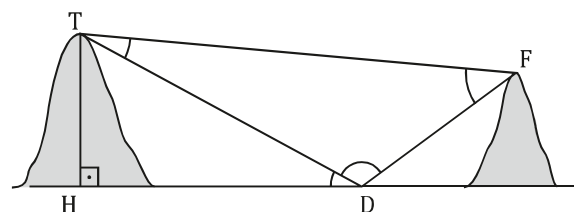
(Fuvest-SP) Em uma semicircunferência de centro **C** e raio **R**, inscreve-se um triângulo equilátero $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$. Seja **D** o ponto onde a bissetriz do ângulo $\hat{A}\hat{C}\hat{B}$ intersecta a semicircunferência. O comprimento da corda \overline{AD} é:

- a) $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
b) $R\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
c) $R\sqrt{\sqrt{2}-1}$
d) $R\sqrt{\sqrt{3}-1}$
e) $R\sqrt{3-\sqrt{2}}$



- 19.** Um topógrafo calculou a altura de uma montanha com o auxílio de um teodolito. Veja como ele procedeu.

- Escolheu dois pontos, **D** e **F**, situados no mesmo plano vertical que passa por **T** (topo da montanha).
- Sabendo a distância de \overline{DF} e que os pontos **D**, **F** e **T** formam um triângulo, mediu com o teodolito os ângulos $\hat{F}\hat{D}\hat{T}$, $\hat{T}\hat{D}\hat{H}$ e $\hat{D}\hat{F}\hat{T}$, como mostra a figura.
- Efetou os cálculos e determinou a altura da montanha.



Considerando $DF = 50 \text{ m}$, $\hat{F}\hat{D}\hat{T} = 115^\circ$, $\hat{T}\hat{D}\hat{H} = 45^\circ$ e $\hat{D}\hat{F}\hat{T} = 20^\circ$, calcule a altura da montanha.

ENTRE SABERES

MATEMÁTICA • FÍSICA

Se possível, prepare uma aula com o professor de Física para realizar a leitura desta seção. Assim, os estudantes poderão discutir e receber orientações para avançar para além desse texto.

Lei de Hubble: pequena equação, grande teoria

O estudo analítico de uma reta em princípio nos parece árido, sem aplicabilidade para além dos temas próprios da Matemática. No entanto, esse pensar geométrico aliado à Álgebra se constitui em poderosa ferramenta para a interpretação de fenômenos naturais, a generalização das regularidades de um fenômeno em leis e a validação de teorias científicas.

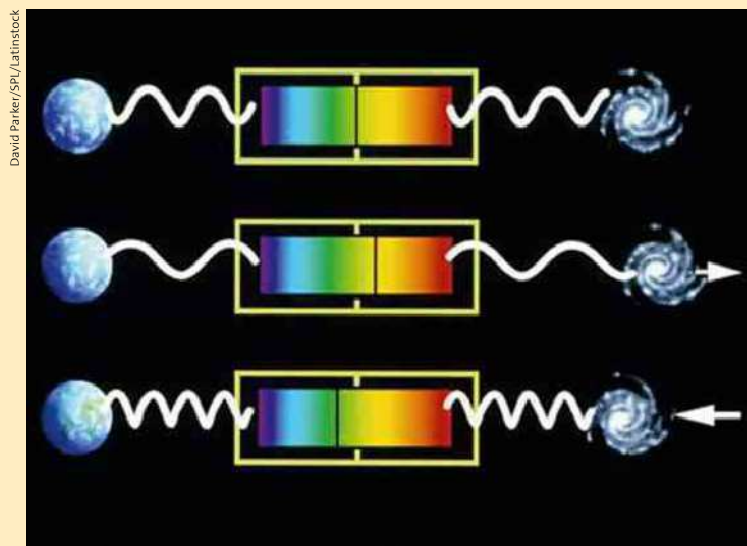
Para ilustrar a ideia exposta no parágrafo anterior, vamos recorrer às teorias cosmológicas, ou seja, às interpretações que os cientistas fazem do universo a partir da observação e coleta de dados de eventos que ocorrem com a mesma periodicidade ou com as mesmas características em momentos diversos.



Edwin Hubble, astrônomo americano, fotografado em 1924 em frente ao Observatório Monte Wilson (Los Angeles, EUA).

Os movimentos e a luz emitida pelos corpos que habitam o universo, e que nossos olhos, com ou sem a ajuda de telescópios, alcançam, são, a princípio, as bases para a coleta de dados que, depois de analisados, permitem confirmar ou não determinada hipótese.

A origem do nosso Sistema Solar está baseada na hipótese da explosão de uma nebulosa solar, sugerida por Immanuel Kant (1724-1804) e desenvolvida por Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). Essa hipótese foi fundamentada pela observação de que todos os planetas giram no mesmo plano em torno do Sol e na mesma direção. Para Kant e Laplace, isso só faria sentido se a formação da galáxia tivesse se originado do colapso (explosão, ou seja, grande expansão das moléculas de gás em um tempo curto) de uma mesma nuvem de gás interestelar. Formados o Sol e os planetas, esses últimos, devido à gravidade, movimentam-se em harmonia descrevendo trajetórias elípticas em torno do Sol.



O Efeito Doppler é a variação no comprimento de onda da radiação pelo efeito da velocidade relativa entre fonte e observador. De cima para baixo, vemos o espectro de absorção de uma radiação para a fonte respectivamente em repouso, afastando-se e aproximando-se do observador.

Tradicionalmente, os astrônomos defendiam a ideia de que o universo era estável, isto é, não se expandia e também não se contraía. Assim, os corpos estariam sempre a distâncias iguais uns dos outros.

Em 1917, quando Albert Einstein (1879-1955) desenvolveu a **Teoria da Relatividade Geral**, apresentou os argumentos que validavam que o universo estaria se expandindo, ou seja, as distâncias entre as galáxias não eram constantes; logo, também na formação do nosso Sistema Solar, os planetas sutilmente se afastam do Sol.

Em 1924, Edwin Hubble (1889-1953) fez um mapeamento de distâncias das estrelas. Para tanto, ele comparou a luminosidade de uma estrela com outra, registrando a intensidade de radiação eletromagnética (luz) emitida na faixa de cor vermelha. O interesse na observação da radiação na faixa do vermelho tem uma explicação: quando uma estrela se aproxima em nossa direção, as ondas eletromagnéticas que compõem sua radiação parecem comprimidas, de modo que observamos seu comprimento de onda menor e as ondas visíveis próximas da tonalidade azul. Por outro lado, se a estrela se afasta de nós, as ondas eletromagnéticas parecem distendidas, observamos seus comprimentos de onda maiores e as ondas visíveis próximas da tonalidade vermelha. Esse é o **Efeito Doppler**, que também explica o som da sirene de uma ambulância ficar mais intenso ao se aproximar e menos intenso à medida que se afasta.

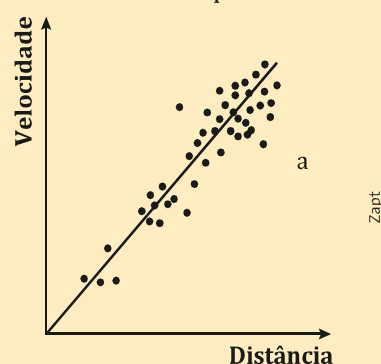
Conforme mostra o diagrama ao lado, o mapeamento de Hubble apresentou pontos muito próximos a uma reta. Como a experimentação é estatística, pode-se considerar que o diagrama de Hubble é uma reta. A análise desse diagrama permitiu que Hubble formalizasse uma lei, a **Lei de Hubble**, matematicamente expressa por $v(r) = H_0 r$, em que H_0 é a constante de proporcionalidade (coeficiente angular da reta), chamada de **constante de Hubble**, dada pela razão entre a velocidade (v) das estrelas e a distância (r) entre a Terra e cada uma das galáxias.

Conforme a introdução deste texto, verifica-se que a Lei de Hubble só pode ser estabelecida por encontrar, na regularidade do evento observado, aproximação com um modelo matemático já conhecido. No caso, a equação da reta, escrita: $ax + by + c = 0$, em que $a = H_0$, $c = 0$, $x = r$ e $y = v$.

Interpretando os dados investigados e analisando seu diagrama, Hubble concluiu que, se todas as galáxias se afastam umas das outras, então o universo está em expansão, o que confirmava as primeiras afirmações de Einstein, que ainda não eram aceitas. Verificou também que, quanto mais longe está uma galáxia, mais rápido ela se afasta das outras galáxias. Esse dado viria, posteriormente, respaldar, com a ideia de Kant e Laplace, a **Teoria do Big Bang**, ou seja, a teoria de que o universo nasceu de uma intensa explosão.

A constante de Hubble foi por ele calculada, obtendo a medida de $2,1 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$, valor interpretado como a taxa de expansão do universo.

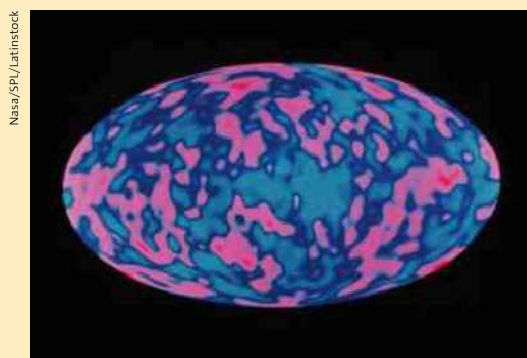
Por curiosidade, cabe ressaltar outro aspecto interessante da Lei de Hubble. Por meio dela foi possível estimar, posteriormente, quando o Big Bang ocorreu: cerca de 15 bilhões de anos atrás.



Lei de Hubble: a velocidade de afastamento das galáxias é diretamente proporcional à sua distância. Quanto mais afastadas, maior sua velocidade.



"O que você quer dizer com Teoria do Big Bang?"

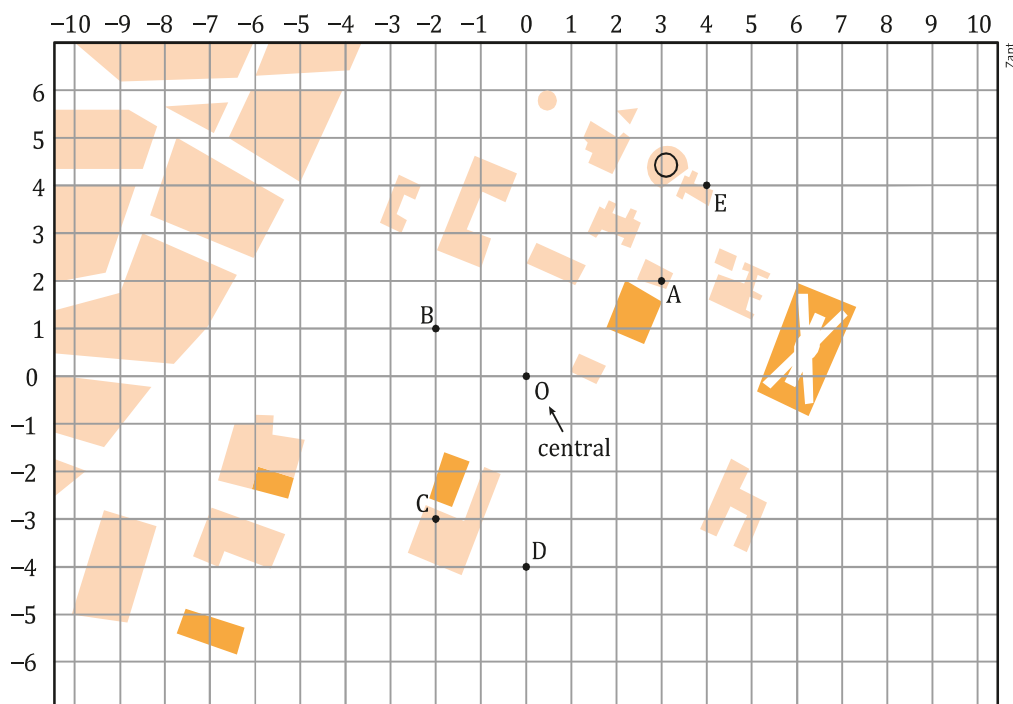


Mapa do céu na frequência de micro-ondas. A análise computacional da imagem confirma a temperatura média da radiação de fundo de 2,73 K e a existência da matéria escura.

6

Estudo analítico da circunferência

Uma pequena cidade resolveu distribuir, a partir da delegacia central, postos policiais em várias direções. Alguns dos postos estão localizados conforme a planta a seguir.



Neste capítulo, pretendemos que os estudantes continuem a perceber a relação entre Geometria e Álgebra, agora pelo estudo analítico da circunferência.

Organize a sala em duplas e peça que leiam a abertura e o próximo tópico deste capítulo, além das atividades R1, R2 e R3: isso os ajudará no desenvolvimento da compreensão leitora e favorece que sejam autônomos para ler sobre Matemática.

Os rádios intercomunicadores utilizados pelos policiais têm alcance máximo de 5 km.

- Como podemos determinar quais dos cinco postos assinalados na planta conseguem se comunicar diretamente com a central, sem mudar de local, considerando que, na planta, cada lado de um quadrado pequeno representa 1 km?
- Qual é o conjunto de pontos que abrigaria postos policiais a exatamente 5 km da central?
- Qual é o conjunto de pontos que está, no máximo, a 5 km da central?

Essas três questões podem ser solucionadas pelo estudo analítico da circunferência, que é o tema deste capítulo.

Situe-se

Ponto e reta são dois conceitos básicos da Geometria. O terceiro deles é a circunferência, escolhida pelos matemáticos gregos da Antiguidade como a figura que, juntamente com a reta, permite construir muitas outras figuras. Régua e compasso são os instrumentos que materializam essas duas ideias — reta e circunferência —, consideradas na Grécia Antiga como perfeitas.

Neste capítulo, a circunferência ganha o tratamento algébrico próprio da Geometria analítica, e muitas das construções ou problemas que podem ser resolvidos com régua e compasso passam a ser tratados algebricamente pela análise das equações que correspondem às figuras. Vamos entender isso melhor.

1 Equação da circunferência

Seja por sua presença e aplicação no dia a dia ou por sua utilização em Matemática, a circunferência é uma figura bastante familiar para nós.

Em Geometria analítica, associamos à circunferência uma equação a partir da sua definição.

Circunferência é o conjunto dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância r de um ponto C fixado, chamado **centro** da circunferência.

Isso significa que, se um ponto qualquer $P(x, y)$ movimentar-se sobre a circunferência, suas coordenadas variarão, mas a distância de P ao centro da circunferência será sempre igual à medida do raio.

Seja L a circunferência de centro $C(a, b)$ e de raio r .

Seja um ponto $P(x, y)$.

A distância de P a C é dada por: $d_{PC} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado,

obtemos: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

que é denominada **equação da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r** .

Note que essa equação também pode ser escrita assim:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Exemplos:

a) A circunferência de centro $C(3, 5)$ e de raio 4 tem equação: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4^2$

b) A circunferência de centro $C(-2, 4)$ e de raio 6 tem equação:

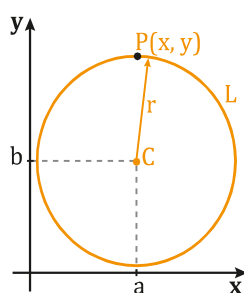
$$[x - (-2)]^2 + (y - 4)^2 = 6^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 6^2$$

c) A circunferência de centro na origem e de raio $\sqrt{5}$ tem equação:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 5$$

d) $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 49$ é uma equação da circunferência de centro $C(4, 6)$ e de raio $r = 7$.

e) $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 36$ é uma equação da circunferência de centro $C(-1, -3)$ e de raio $r = 6$.



FIQUE CONECTADO

O educador e matemático português Nuno Crato escreveu um interessante livro chamado *Matemática das coisas* (Editora Livraria da Física, 2009). Vale a pena ler o capítulo "O mundo do GPS". Nele, você fica sabendo como funciona o GPS (abreviatura da expressão em inglês *Global Positioning System*) e a relação que ele tem com a Matemática.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

Leia as atividades e depois:

- identifique noções, conceitos e palavras sobre os quais tenha dúvidas. Pesquise no livro ou no dicionário;
- certifique-se de ter compreendido as notações (símbolos) utilizadas. Em caso de dúvidas, solicite a ajuda do professor;
- pense na importância dos desenhos para a resolução dos problemas, em que eles o auxiliam e por que são necessários.

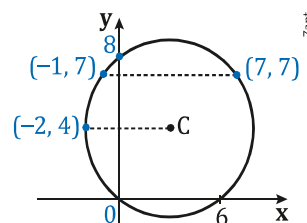
R1. Seja L a circunferência de centro $C(3, 4)$ e de raio 5. Determine:

- os pontos de L que têm ordenada 7.
- m para que $P(-2, m)$ pertença a L .

c) os pontos de L que têm ordenada 10.

d) as interseções de L com o eixo y .

Resolução



L tem equação $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$. ①

a) Substituindo $y = 7$ em ①, temos:

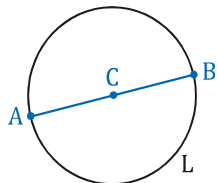
$$(x-3)^2 + (7-4)^2 = 25 \Rightarrow (x-3)^2 = 16 \Rightarrow x = 7 \text{ ou } x = -1$$

Portanto, temos os pontos $(7, 7)$ e $(-1, 7)$.

- b) $P \in L \Leftrightarrow (-2-3)^2 + (m-4)^2 = 25 \Leftrightarrow (m-4)^2 = 0 \Leftrightarrow m = 4$
- c) Substituindo $y = 10$ em (1), resulta: $(x-3)^2 + (10-4)^2 = 25 \Rightarrow (x-3)^2 = -11 \Rightarrow$ não existem soluções reais.
Portanto, não existem pontos de L que tenham ordenada 10.
- d) $x = 0$ em (1) nos fornece: $(0-3)^2 + (y-4)^2 = 25 \Rightarrow (y-4)^2 = 16 \Rightarrow y = 0$ ou $y = 8$
Portanto, L corta o eixo y em $(0, 0)$ e $(0, 8)$.

R2. Obtenha uma equação da circunferência que tem como diâmetro o segmento de extremos $A(-6, 3)$ e $B(-2, 7)$.

Resolução



Imagens: Zapit

O centro C da circunferência L é o ponto médio de \overline{AB} :

$$\begin{cases} x_c = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_c = \frac{-6 + (-2)}{2} \Rightarrow x_c = -4 \\ y_c = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_c = \frac{3 + 7}{2} \Rightarrow y_c = 5 \end{cases}$$

Logo, $C(-4, 5)$.

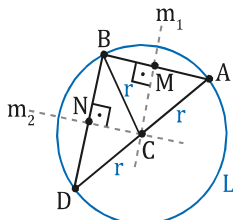
O raio r é a distância de C a A , ou de C a B .

$$r = d_{CA} \Rightarrow r = \sqrt{(-4 + 6)^2 + (5 - 3)^2} \Rightarrow r = \sqrt{8}$$

Portanto, a equação de L é $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 8$.

R3. Obtenha uma equação da circunferência que passa por $A(3, 9)$, $B(-2, 4)$ e $D(-1, 1)$.

Resolução



O ponto de interseção das mediatrizes de dois lados do $\triangle ABD$ é o centro C da circunferência L solicitada, e a distância de C a um dos vértices é o raio r de L .

• M : ponto médio de \overline{AB} ; então: $M\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \Rightarrow m_{AB} = 1$$

$$m_1 \perp \overline{AB} \Rightarrow m_{m_1} = -1$$

$$\text{Logo, } m_1: y - \frac{13}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = -x + 7.$$

• N : ponto médio de \overline{BD} ; então: $N\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$$m_{BD} = \frac{y_B - y_D}{x_B - x_D} \Rightarrow m_{BD} = -3$$

$$m_2 \perp \overline{BD} \Rightarrow m_{m_2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Logo, } m_2: y - \frac{5}{2} = \frac{1}{3}\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{x}{3} + 3.$$

• C : interseção de m_1 e de m_2 ; então:

$$\begin{cases} y = -x + 7 \\ y = \frac{x}{3} + 3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 3$ e $y = 4$.

Logo, $C(3, 4)$.

$$r = d_{CA} \Rightarrow r = \sqrt{(3-3)^2 + (4-9)^2} = 5$$

Portanto, L tem equação $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$.

Outro modo:

$$L: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$A \in L \Rightarrow (3-a)^2 + (9-b)^2 = r^2 \quad (1)$$

$$B \in L \Rightarrow (-2-a)^2 + (4-b)^2 = r^2 \quad (2)$$

$$D \in L \Rightarrow (-1-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 \quad (3)$$

Resolvendo o sistema formado por (1), (2) e (3), vem:

$$a = 3, b = 4 \text{ e } r = 5.$$

Portanto, uma equação de L é $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$.

FAZER E APRENDER



Em caso de dúvida, volte à seção **De olho na resolução**.

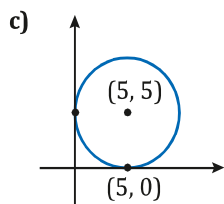
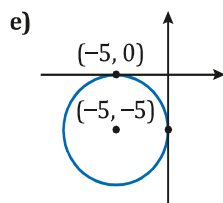
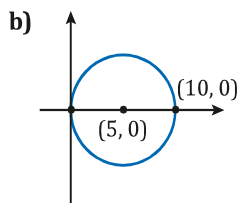
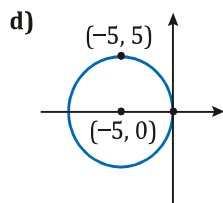
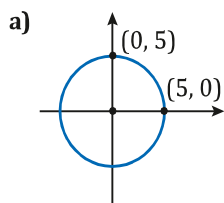
- Volte ao início deste capítulo e responda às questões apresentadas sobre as posições dos postos policiais.
- Encontre uma equação da circunferência de centro C e de raio r .
 - $C(1, 4)$, $r = 3$
 - $C(-4, -2)$, $r = 5$
 - $C(0, 6)$, $r = 1,2$
 - $C(-3, 0)$, $r = 10$
 - $C(0, 0)$, $r = 2\sqrt{5}$
 - $C\left(-\frac{5}{2}, \frac{4}{3}\right)$, $r = \frac{1}{2}$
- Determine o centro e o raio das circunferências de equação:
 - $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 16$
 - $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 17$

Incentive os estudantes a justificarem as resoluções com base no que estudaram até aqui. Isso auxilia no desenvolvimento da argumentação.

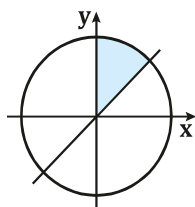
- $x^2 + (y+5)^2 = 9$
- $(x-5)^2 + y^2 = 8$
- $x^2 + y^2 = 37$
- $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{169}$

- Seja L a circunferência de centro $C(0, 6)$ e de raio 8. Determine:
 - as interseções de L com o eixo x .
 - as interseções de L com o eixo y .
 - em L o(s) ponto(s) de ordenada 4.
 - em L o(s) ponto(s) de abscissa $-4\sqrt{3}$.
 - em L o(s) ponto(s) de abscissa 9.
 - as interseções de L com a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes.
 - as interseções de L com a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes.

5. Qual é a equação de cada uma das circunferências?



6. Qual é a área da figura delimitada pelas figuras de equações $y = x$, $x^2 + y^2 = 4$ e $x = 0$?

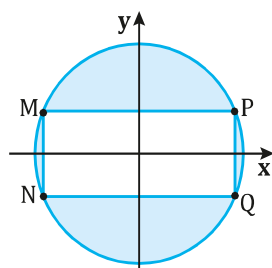


7. (UEL-PR) Determine a equação da circunferência centrada no vértice da parábola $y = x^2 - 6x + 8$ e que passa pelos pontos em que a parábola corta o eixo x .

- a) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 4$ d) $(x+1)^2 + (y-3)^2 = \sqrt{2}$
b) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 2$ e) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$
c) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$

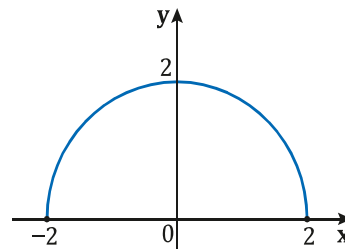
8. O quadrilátero PMNQ é um retângulo inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 7$.

- a) A abscissa de P é 2. Qual é sua ordenada?
b) Obtenha as coordenadas dos outros três vértices do retângulo.
c) Quais são as medidas dos lados do retângulo?
d) Qual é a área da região colorida?
e) Qual é o comprimento das diagonais do retângulo?



9. Você consegue escrever uma função a partir da equação da circunferência?

10. Analise o gráfico ao lado, que representa uma semicircunferência dada pela equação $y = \sqrt{4 - x^2}$ e responda às questões.

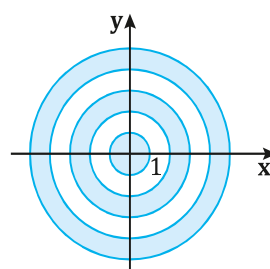


- a) O gráfico representa uma função?
b) Qual é o domínio da função representada no gráfico?

11. Represente em um mesmo referencial cartesiano as circunferências de equação: $x^2 + y^2 = 1$; $x^2 + y^2 = 9$; $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 16$; $x^2 + y^2 = 25$.

12. Faça o que se pede a seguir.

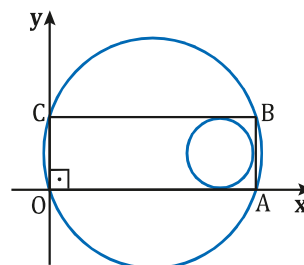
- a) Use os dados da atividade 11 e calcule a área das partes coloridas da figura a seguir.



- b) Calcule o comprimento de cada circunferência, usando $\pi \approx 3,14$.

13. Esboce o gráfico da semicircunferência $y = \sqrt{16 - x^2}$. A seguir, dê o domínio e a imagem dessa função.

14. Obtenha as equações das circunferências apresentadas na figura ao lado, em que OABC é um retângulo de lados $OA = 6$ e $OC = 2$ e a circunferência menor tangencia os lados do retângulo.



15. Obtenha uma equação da circunferência:

- a) de centro $C(-3, 2)$ e que passa por $A(5, -1)$.
b) que tem o segmento AB, $A(-1, 4)$ e $B(-3, 3)$, como um diâmetro.

16. Seja L a circunferência de centro $C(4, 0)$ e de raio $2\sqrt{6}$. Determine:

- a) k para que $A(k, -2) \in L$.
b) n para que $B(1, n) \in L$.
c) m para que $D(m, 2\sqrt{2}) \notin L$.

INVENTE VOCÊ

REGISTRE
NO CADERNO

1. Invente uma atividade parecida com a de número 8, envolvendo um quadrado com área de 25 cm^2 .
2. Invente outras atividades como a de número 11.

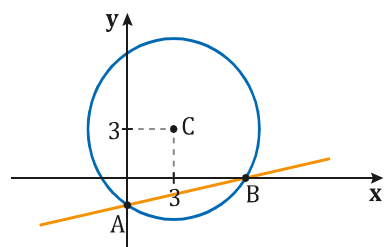
Avalie o que precisa ser retomado a partir das produções dos estudantes.



Ler o desenho que acompanha uma questão é uma exigência constante em problemas geométricos. Como selecionar as informações desse tipo de texto: o esboço.

Leia a questão e, a seguir, escreva no caderno todas as informações que estão contidas no desenho. Compare suas anotações com as dos colegas.

(UnB-DF) A figura representa uma circunferência de centro C e uma reta AB de equação $y = \frac{x}{7} - 1$, que intersecta a circunferência nos eixos cartesianos. Quanto mede o raio da circunferência?



Imagens: Zapt

Agora, responda no caderno.

- Qual é a pergunta do problema?
- Quais informações podem responder a essa pergunta?
- Como obter essas informações?

Elabore a sequência de ações para resolver o problema.

Novamente, compare suas anotações com as dos colegas.

Então, ler o desenho foi essencial para você resolver o problema?

Esta atividade destaca a importância da leitura de um desenho para a resolução de um problema. Na questão apresentada, a informação sobre o centro $C(3, 3)$ da circunferência está apenas no desenho, assim como o fato de os pontos de interseção entre a reta e a circunferência serem os pontos em que a reta intersecta os eixos coordenados. De posse das coordenadas de C e de A ou de B , o raio da circunferência será dado por: $r = d_{AC} = d_{BC}$.

2 Posições relativas entre um ponto e uma circunferência

A circunferência L , de centro $C(a, b)$ e de raio r , tem equação:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

que também pode ser escrita:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Em relação a L , um ponto $P(x_p, y_p)$ pertence a L , ou à região interior a L , ou à região exterior a L .

1ª) P pertence a L

Temos:

$$d_{PC} = r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_p^2 + y_p^2 - 2ax_p - 2by_p + a^2 + b^2 = r^2$$

2ª) P pertence à região interior a L

Temos:

$$d_{PC} < r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 < r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_p^2 + y_p^2 - 2ax_p - 2by_p + a^2 + b^2 < r^2$$

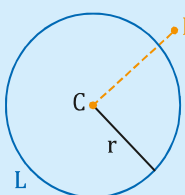
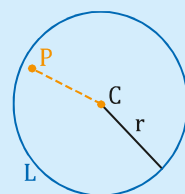
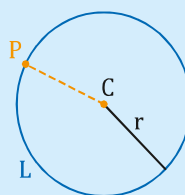
3ª) P pertence à região exterior a L

Temos:

$$d_{PC} > r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_p - a)^2 + (y_p - b)^2 > r^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_p^2 + y_p^2 - 2ax_p - 2by_p + a^2 + b^2 > r^2$$



Antes de iniciar o estudo deste tópico, peça aos estudantes que escrevam um breve texto sobre o que lembram da posição relativa entre ponto e circunferência e entre duas circunferências. Caso não se lembrem, peça que desenhem essas figuras e imaginem qual pode ser a posição de uma em relação à outra. Espera-se resgatar as imagens que os estudantes possuem da Geometria plana, para tratá-las algebricamente com as equações das retas e das circunferências.

Exemplo:

Sejam a circunferência $L: x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$ e os pontos $A(7, 1)$, $B(2, 3)$ e $D(5, 8)$.

Reescrevendo a equação L como $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 6$ e substituindo as coordenadas A , B e D , podemos verificar que:

$$A(7, 1) = 7^2 + 1^2 - 6 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = 6 \Rightarrow A \text{ pertence a } L.$$

$$B(2, 3) = 2^2 + 3^2 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = -5 < 6 \Rightarrow B \text{ pertence à região interior a } L.$$

$$D(5, 8) = 5^2 + 8^2 - 6 \cdot 5 - 2 \cdot 8 = 43 > 6 \Rightarrow D \text{ pertence à região exterior a } L.$$

E a análise da posição de um ponto $P(x, y)$ em relação à circunferência

$L: x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$ nos possibilita resolver graficamente inequações do tipo:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 > 0$$

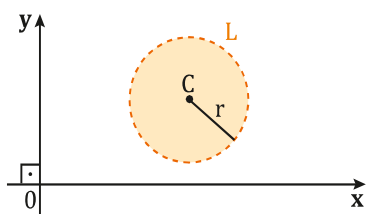
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 < 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 \geq 0$$

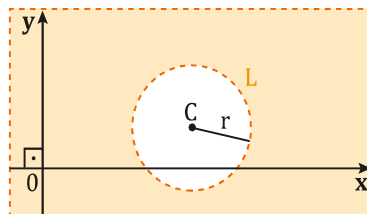
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 \leq 0$$

Os pontos (x, y) que satisfazem:

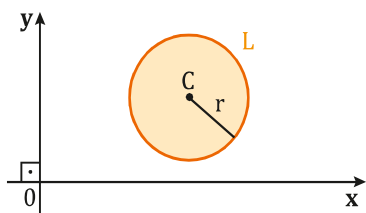
- 1) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 < 0$ constituem a região interior a L , porque $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$.



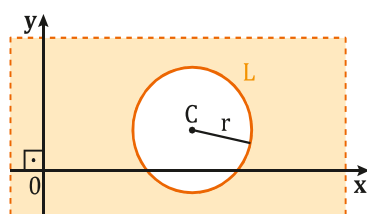
- 2) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 > 0$ constituem a região exterior a L .



- 3) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 \leq 0$ constituem o círculo ou o disco de centro $C(a, b)$ e raio r .



- 4) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 \geq 0$ constituem a região exterior a L reunida com L .



Para trabalhar as propriedades da circunferência, consulte o jogo **Capturando pontos**, nas **Orientações Didáticas**.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



- 17.** Faça o que se pede a seguir.
- Esboce a circunferência $x^2 + y^2 = 5$.
 - Qual é a posição dos pontos $A(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, $B(-1, -2)$, $C(2,5; 2,5)$, $D(0; 2,5)$ e $E(-1,5; 1,5)$ em relação à circunferência do item a)?
 - Indique as coordenadas de três pontos da circunferência que não pertençam aos eixos coordenados.
- 18.** Analise as posições de A , B e C em relação à circunferência L .
- $A(3, 3)$, $B(1, -5)$, $C(-2, 10)$,
 $L: x^2 + y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$
 - $A(7, -3)$, $B(3, -2)$, $C(-10, 1)$,
 $L: x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$

- 19.** Seja $L: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 21 = 0$. Determine k para que:

- $P(k, 3)$ pertença à região exterior a L .
- $Q(0, k)$ pertença ao círculo determinado por L .

- 20.** Represente graficamente as inequações.

- $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 < 0$
- $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 21 \leq 0$
- $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 > 4$
- $(x - 1)^2 + y^2 \geq 9$

- 21.** Represente os pontos (x, y) que satisfazem os sistemas de inequações simultâneas a seguir:

- $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x + y > 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ x + y \geq 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 < 9 \end{cases}$

22. (FGV-SP)

- a) No plano cartesiano, considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P(3, \sqrt{3})$. Verifique se **P** é interior, exterior ou pertencente à circunferência.
- b) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ e o ponto $P(3, 5)$, obtenha as equações das retas tangentes à circunferência, passando por **P**.

23. (Unemat) Dada uma circunferência de centro $C(3; 1)$ e raio $r = 5$, e seja o ponto $P(0; a)$, com $a \in \mathbb{R}$, é correto afirmar:

- a) Se $-3 < a < 5$, então **P** é externo à circunferência.
- b) Se $-3 < a < 5$, então **P** pertence à circunferência.
- c) Se $a = 5$ ou $a = -3$, então **P** é interno à circunferência.

d) Se $a < -3$ ou $a > 5$, então **P** é externo à circunferência.

e) Se $a < -3$ ou $a > 5$, então **P** é interno à circunferência.

24. Faça o que pede a seguir.

a) Esboce no plano cartesiano as regiões:

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 \leq 0\} \text{ e}$$

$$B = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 4\}.$$

b) Calcule a área da região $A \cap B$.

25. (Mack-SP) Os pontos (x, y) do plano tais que $x^2 + y^2 \leq 36$, com $x + y \geq 6$ definem uma região de área

a) $6(\pi - 2)$

c) $9(\pi - 2)$

e) $18(\pi - 2)$

b) $9 - \pi$

d) $6 - \pi$

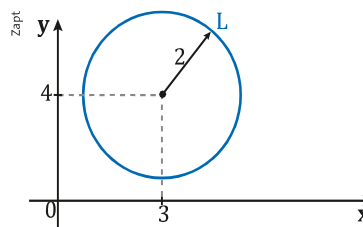
INVENTE VOCÊ

REGISTRE
NO CADERNO



3. Invente uma atividade para a figura ao lado:

Analisar com os estudantes os problemas criados, bem como incentivar sua resolução, favorece o desenvolvimento da linguagem matemática.



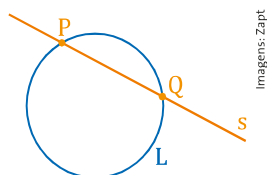
3 Posições relativas entre reta e circunferência

Uma reta **s** e uma circunferência **L**, coplanares, podem:

1ª) ter dois pontos comuns;

s e **L** são **secantes**.

$$s \cap L = \{P, Q\}$$

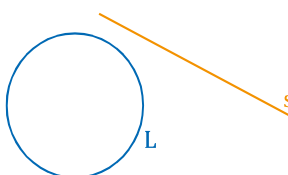


2ª) não ter ponto comum;

s e **L** são **disjuntas**; dizemos

que **s** é **exterior** a **L**.

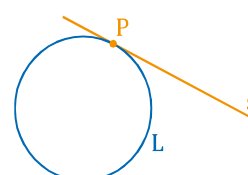
$$s \cap L = \emptyset$$



3ª) ter um único ponto comum;

s e **L** são **tangentes**.

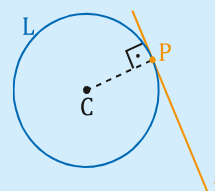
$$s \cap L = \{P\}$$



É fundamental lembrar que:

A reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de interseção entre a reta e a circunferência.

$$\overline{PC} \perp t$$



Verificaremos as condições algébricas que nos permitem analisar a posição relativa entre uma reta **s** e uma circunferência **L**.

Dadas a reta **s**: $ax + by + c = 0$ e a circunferência **L**: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, temos o sistema:

$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \end{cases}$$

Assim:

- **S** tem duas soluções se **s** e **L** são secantes;
- **S** tem uma única solução se **s** e **L** são tangentes;
- **S** não tem solução se **s** é exterior a **L**.

Exemplo:

Sejam **L**: $x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0$, **s**: $x - y + 6 = 0$, **p**: $2x - y = 0$ e

v: $x + y - 4 = 0$. **L** tem centro $C(0, 4)$ e raio $r = \sqrt{2}$.

Assim:

• **L** e **s**: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0 \\ x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y - 6.$

Substituindo na 1ª equação

$(y - 6)^2 + y^2 - 8y + 14 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 - 20y + 50 = 0$, que é uma equação do 2º grau com

$\Delta = (-20)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 50 = 0$, ou seja, com uma única solução. Portanto, **L** e **s** são tangentes.

O ponto de tangência tem **y** solução de

$$2y^2 - 20y + 50 = 0$$

$$2(y - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 5 \text{ e } x = y - 6 = 5 - 6 = -1; \text{ daí } T(-1, 5).$$

• **L** e **p**: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 2x \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x^2 - 16x + 14 = 0 \\ 5x^2 - 16x + 14 = 0 \end{cases}$ que tem:

$$\Delta = 256 - 280 < 0$$

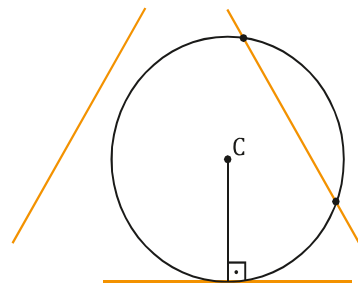
Portanto, o sistema não tem solução e a reta **p** não intersecta **L**.

• **L** e **v**: $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8y + 14 = 0 \\ x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 4 - x$

$$x^2 + (4 - x)^2 - 8(4 - x) + 14 = 0$$

$$2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Portanto, existem dois pontos (1, 3) e (-1, 5) comuns a **L** e **v**, que são secantes.



Imagens: Zappt

Se desejar apresentar aos estudantes a fórmula da distância de um ponto a uma reta, consulte o conteúdo complementar das **Orientações Didáticas**.

A partir dessa fórmula, é possível mostrar-lhes a forma para descobrir a posição de uma reta **s** em relação a uma circunferência **L** comparando a distância do centro de **L** a **s** com o raio **r**.

• **s** é secante a **L** se $d_{cs} < r$.

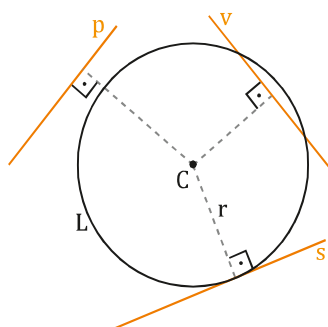
• **s** é tangente a **L** se $d_{cs} = r$.

• **s** é exterior a **L** se $d_{cs} > r$.

$$d_{cs} = \sqrt{2} = r \Rightarrow \mathbf{s \text{ é tangente a } L}$$

$$d_{cp} = \frac{4\sqrt{5}}{5} > r \Rightarrow \mathbf{p \text{ é exterior a } L}$$

$$d_{cv} = 0 < r \Rightarrow \mathbf{v \text{ é secante a } L}$$



DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R4. Determine a equação da reta tangente à circunferência **L**: $x^2 + (y - 1)^2 = 34$ no ponto $T(5, 4)$.

Resolução

Apenas para confirmar se $T(5, 4)$ pertence a **L**, de fato:

$$5^2 + (4 - 1)^2 = 25 + 9 = 34.$$

Se **t** é reta que passa por **T** e é tangente a **L**, então **t** é perpendicular à reta **CT**, em que **C** é o centro de **L**.

Como $C(0, 1)$, a reta **CT** tem equação:

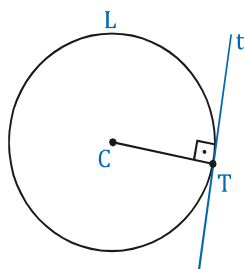
$$\frac{y - y_c}{x - x_c} = \frac{y_c - y_T}{x_c - x_T} \Leftrightarrow \frac{y - 1}{x - 0} = \frac{1 - 4}{0 - 5} \Leftrightarrow y - 1 = \frac{3}{5}x$$

que tem coeficiente angular $\frac{3}{5}$,

daí a reta **t**, perpendicular a **CT**,

tem coeficiente angular $-\frac{5}{3}$ e passa por **T**.

$$\text{Daí } t: y - 4 = -\frac{5}{3}x(x - 5).$$



R5. Obtenha o comprimento da corda determinada na reta **s**: $x + y - 3 = 0$ pela circunferência

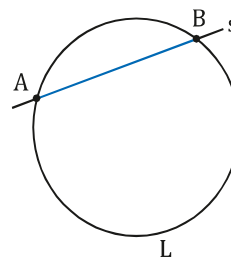
$$\mathbf{L: } x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0.$$

Resolução

1º modo (sem o uso de distância de ponto a reta):

Do enunciado, supõe-se que **s** e **L** se intersectam em dois pontos que devem satisfazer as equações de **s** e de **L**. Vamos encontrá-las resolvendo o sistema

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 23 = 0 \end{cases}$$



Da 1ª equação: $x = 3 - y$ (I).

Substituindo na 2ª equação, temos:

$$(3 - y)^2 + y^2 + 2(3 - y) + 2y - 23 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 - 6y + y^2 + y^2 + 6 - 2y + 2y - 23 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y^2 - 6y - 8 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 4 \text{ ou } y = -1$$

De (I): $x = 3 - y$. Então,

se $y = 4$, $x = -1$;

se $y = -1$, $x = 4$.

Logo, os pontos de interseção de **s** e **L** são:

$A(-1, 4)$ e $B(4, -1)$.

Daí o comprimento da corda AB é igual a

$$d(AB) = \sqrt{((-1) - 4)^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$$

2º modo (usando a fórmula da distância de ponto a reta):

Inicialmente, vamos determinar o centro e o raio de **L**:

Comparamos $x^2 + y^2 + 2y - 23 = 0$ com

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$\text{Temos: } -2a = 2 \Rightarrow a = -1$$

$$-2b = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = -23 \Rightarrow 2 - r^2 = -23 \Rightarrow r^2 = 25 \text{ e } r = 5$$

Logo: $C(-1, -1)$ e $r = 5$.

Calculando a distância de **C** à reta **s** pela fórmula, temos:

$$d_{Cs} = \frac{|1(-1) + 1(-1) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Seja ℓ o comprimento da corda AB. No $\triangle BMC$, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d_{BM}^2 + d_{MC}^2 = d_{BC}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ell^2}{4} + \frac{50}{4} = 25 \Leftrightarrow \ell^2 = 50 \text{ e } \ell = 5\sqrt{2}$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



- 26.** Analise a posição de p : $4x + 3y + 14 = 0$,
 s : $12x - 5y + 19 = 0$ e v : $15x + 8y + 73 = 0$
em relação a L : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$.

- 27.** Analise a posição de p : $x - 6 = 0$, s : $x + 2 = 0$, v : $y - 4 = 0$
e w : $y + 4 = 0$ em relação a L : $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$.

- 28.** Determine o(s) ponto(s) comum(ns) à circunferência **L**
e à reta **s**.

- a) L : $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$, s : $x + y + 2 = 0$
b) L : $x^2 + y^2 - 6x - 12y + 25 = 0$, s : $2x - y = 0$
c) L : $x^2 + y^2 = 4$, s : $2x + y + 6 = 0$
d) L : $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$, s : $3x + 4y + 12 = 0$

- 29.** Determine **m** para que a reta de equação $y = mx$ seja:

- a) tangente à circunferência L : $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$.
b) secante a essa circunferência.
c) externa a essa circunferência.

- 30.** O centro da circunferência

L : $(x - 4)^2 + (y - 12)^2 = 169$ e os pontos onde **L** intersecta o eixo **x** formam um triângulo. Qual a área desse triângulo?

- 31.** Qual é o comprimento da corda determinada na reta
 s : $5x - 12y + 132 = 0$ pela circunferência
 L : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 169$?

- 32.** Obtenha as equações das retas paralelas à reta
 s : $3x - 4y = 0$ sobre as quais a circunferência
 L : $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 64$ determina segmentos de comprimento $4\sqrt{15}$.

- 33.** (Fuvest-SP) No plano cartesiano Oxy , a circunferência **C** é tangente ao eixo Ox no ponto de abscissa 5 e contém o ponto $(1, 2)$. Nessas condições, o raio de **C** vale

- a) $\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 5 d) $3\sqrt{5}$ e) 10

- 34.** (UFJF-MG) No plano cartesiano, considere os pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 4)$.

- a) Encontre a equação da reta **r** que passa por **A** e forma com o eixo das abscissas um ângulo de 135° , medido do eixo para a reta no sentido anti-horário.
b) Seja **s** a reta que passa por **B** e é perpendicular à reta **r**. Encontre as coordenadas do ponto **P**, determinado pela interseção das retas **r** e **s**.
c) Determine a equação da circunferência que possui centro no ponto $Q(2, 1)$ e tangencia as retas **r** e **s**.

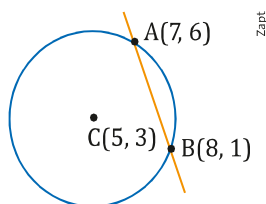
INVENTE VOCÊ

Avalie os estudantes por meio dessa produção. Observe que há muitas possibilidades de problemas que podem ser feitos por eles e que podem variar bastante no que será solicitado por eles. Organize a classe para que um estudante possa ler e resolver o problema do outro.

REGISTRE
NO CADERNO



- 4.** Elabore um problema a partir da figura:



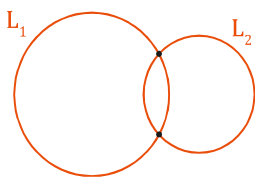
3pt

4 Posições relativas entre duas circunferências

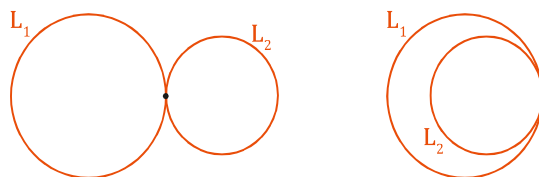
Sejam as circunferências coplanares L_1 , de centro $C_1(a_1, b_1)$ e de raio r_1 , e L_2 , de centro $C_2(a_2, b_2)$ e de raio r_2 .

L_1 e L_2 podem:

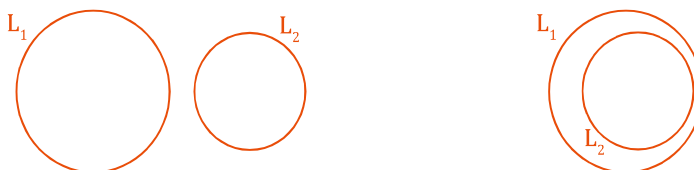
1ª) ter dois pontos comuns; L_1 e L_2 são **secantes**.



2ª) ter um único ponto comum; L_1 e L_2 são **tangentes**.



3ª) não ter ponto comum; L_1 e L_2 são **disjuntas**.



Analisando o sistema S formado pelas equações de L_1 e de L_2 :

$$\begin{cases} (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = r_1^2 \\ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = r_2^2 \end{cases}$$

temos:

- L_1 e L_2 são secantes se S tem duas soluções;
- L_1 e L_2 são disjuntas se S não tem solução;
- L_1 e L_2 são tangentes se S tem uma única solução;

Um processo mais simples para analisar a posição relativa entre L_1 e L_2 consiste em comparar a distância d entre os centros C_1 e C_2 com $r_1 + r_2$ e com $|r_1 - r_2|$. Vejamos:

- Se $d = 0$, então L_1 e L_2 são concêntricas (figura 1).

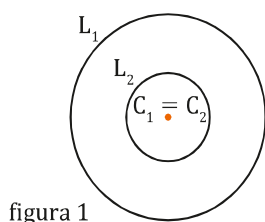


figura 1

- Se $d = |r_1 - r_2|$ ou $d = r_1 + r_2$, então L_1 e L_2 são **tangentes** (figuras 2 e 3, respectivamente).

Note que, se L_1 e L_2 são tangentes, o ponto de tangência e os centros C_1 e C_2 são colineares.

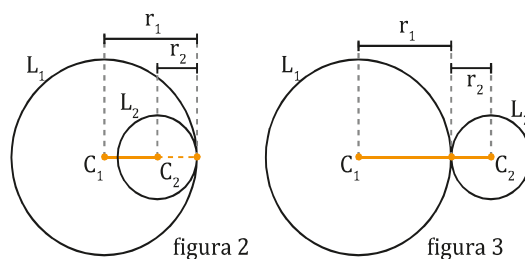


figura 2

figura 3

- Se $0 < d < |r_1 - r_2|$ ou se $d > r_1 + r_2$, então L_1 e L_2 são **disjuntas** (figura 5).

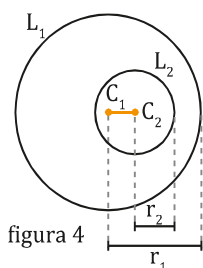


figura 4

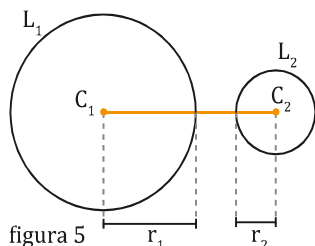


figura 5

- Se $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$, então L_1 e L_2 são **secantes**.

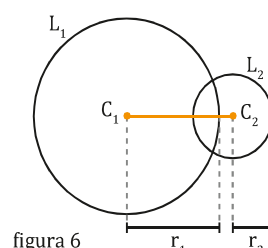


figura 6

Imagens: Zapt

Exemplo:

Sejam L_1 de centro $C_1(2, 1)$ e raio $r_1 = 2$, L_2 de centro $C_2(8, 4)$ e raio $r_2 = 2 + 3\sqrt{5}$ e L_3 de centro $C_3(6, 3)$ e raio $r_3 = 3$. Vamos analisar a seguir a posição relativa entre L_1 e L_2 , entre L_1 e L_3 e entre L_2 e L_3 .

- Posição entre L_1 e L_2 : $|r_1 - r_2| = 3\sqrt{5}$ e $r_1 + r_2 = 4 + 3\sqrt{5}$; $d_{C_1C_2} = \sqrt{(2-8)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$
 $d_{C_1C_2} = |r_1 - r_2| \Rightarrow L_1$ e L_2 são tangentes
- Posição entre L_1 e L_3 : $|r_1 - r_3| = 1$ e $r_1 + r_3 = 5$; $d_{C_1C_3} = \sqrt{(2-6)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 $|r_1 - r_3| < d_{C_1C_3} < r_1 + r_3 \Rightarrow L_1$ e L_3 são secantes
- Posição entre L_2 e L_3 : $|r_2 - r_3| = 3\sqrt{5} - 1$ e $r_2 + r_3 = 5 + 3\sqrt{5}$; $d_{C_2C_3} = \sqrt{(8-6)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{5}$
 $0 < d_{C_2C_3} < |r_2 - r_3| \Rightarrow L_2$ e L_3 são disjuntas

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R6. Determine os pontos comuns às circunferências de equações $x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ e $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$.

Resolução

As coordenadas dos pontos comuns às duas circunferências são soluções do sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0 & (2) \end{cases}$$

Efetuada $(1) - (2)$, vem:

$$-16x - 12y + 40 = 0 \Rightarrow y = \frac{10 - 4x}{3} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1) , resulta:

$$x^2 + \left(\frac{10 - 4x}{3}\right)^2 - 10x - 10\left(\frac{10 - 4x}{3}\right) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -2$$

Em (3) :

para $x = 4$, vem $y = -2$; para $x = -2$, vem $y = 6$.

Os pontos comuns às circunferências são $(4, -2)$ e $(-2, 6)$.

R7. Quais equações das circunferências de centro $C(1, 4)$ tangenciam a circunferência $\ell: (x + 2)^2 + y^2 = 9$?

Resolução

ℓ tem centro $C_1(-2, 0)$ e raio $r_1 = 3$.

Seja L a circunferência de centro C e raio r ; L tem equação:

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = r^2$$

L e ℓ devem ser tangentes. Então:

$$|r - r_1| = d_{CC_1} \Rightarrow |r - 3| = \sqrt{(1+2)^2 + (4-0)^2} \Rightarrow |r - 3| = 5 \Rightarrow r = 8 \text{ ou } r = -2 \text{ (não serve)}$$

Logo, L tem equação $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8^2$. Ou então:

$$r + r_1 = d_{CC_1} \Rightarrow r + 3 = 5 \Rightarrow r = 2$$

Logo, a equação de L é $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$.

Portanto, as circunferências solicitadas têm equações

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 64 \text{ e } (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 4.$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



35. Analise as posições de L_2, L_3, L_4, L_5, L_6 e L_7 em relação a

$$L_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

$$L_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0$$

$$L_3: x^2 + y^2 - 8x + 4y - 29 = 0$$

$$L_4: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 19 = 0$$

$$L_5: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

$$L_6: x^2 + y^2 - 8x + 4y - 44 = 0$$

$$L_7: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 169$$

36. Determine as interseções de L_1 e L_2 .

a) $L_1: x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0$

$L_2: x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0$

b) $L_1: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$

$L_2: x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$

37. Seja $L: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$. Quais são as equações das circunferências de centro $C(-2, 10)$ tangentes a L ?

38. Obtenha a equação da circunferência que passa por $A(1, -1)$ e pelo ponto comum às circunferências de equações $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$.

39. Sejam $L: x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0$ e

$$\ell: x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0.$$

a) Obtenha a equação da reta suporte da corda comum a L e ℓ .

b) Como obter a equação do item a a partir de L e ℓ ?

c) Qual o comprimento da corda comum a L e ℓ ?

INVENTE VOCÊ

Observe se os estudantes recorrem a um desenho para construir o problema solicitado. Se isso acontecer, explique e valorize essa estratégia de pensar a situação resolvida, para depois propor o texto do problema.

REGISTRE
NO CADERNO



5. Crie um problema sobre posição de circunferências cuja resposta seja: o ponto comum às circunferências é $(4, 0)$.




Explorando circunferências com *software*

Vamos explorar circunferências utilizando um aplicativo chamado Winplot, desenvolvido para a construção de gráficos 2D e 3D.

O Winplot é um programa *freeware*, isto é, um *software* distribuído gratuitamente pela internet. Esse programa foi desenvolvido pelo professor estadunidense Richard Parris, da Phillips Exeter Academy, na década de 1980. Sua versão em língua portuguesa pode ser obtida de muitas formas diferentes na rede mundial de comunicação. Sugerimos que você obtenha uma versão no endereço da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, a UFRGS. Vamos lá.

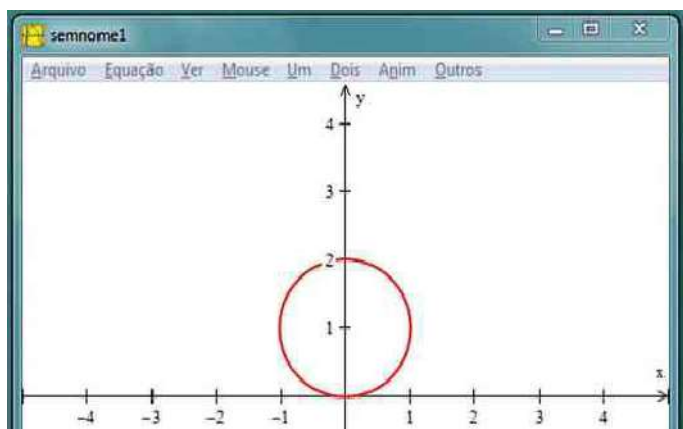
Acesse o endereço <www2.mat.ufrgs.br/edumatec/software/soft_funcoes.php> (acesso em: 22 mar. 2016).

Nesse endereço, procure pelo ícone  e faça o *download*, isto é, a importação do Winplot para seu com-

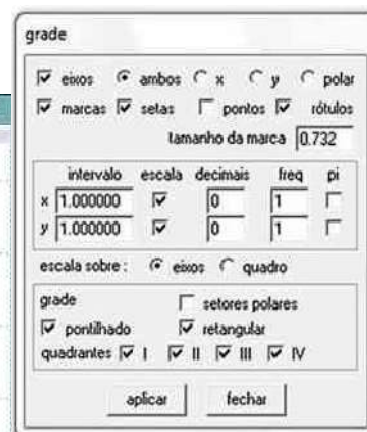
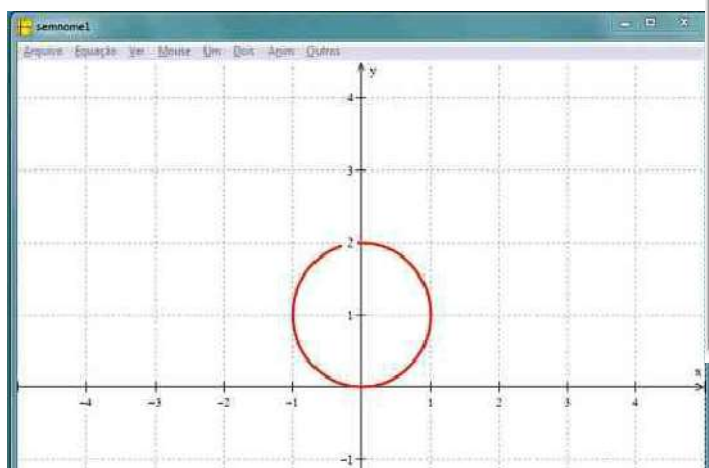
putador. Esse é um *site* seguro, por isso a importação não traz riscos ao computador no qual você fará o *download*.

1ª proposta

- Concluída a instalação, abra o programa. Aparecerá uma tela verde. Clique em “Janela” e em seguida em “2-dim”. Na nova tela que será aberta, escolha a opção “Equação” e clique em “Implícita”. Na caixa de diálogo “Curva implícita”, digite a equação $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e efetue as configurações conforme mostrado ao lado. Para escolher a cor da curva, clique em “cor”.
- Selecione a cor e a espessura do fio e clique em “Ok”. Aparecerá o desenho da circunferência correspondente à equação e uma janela de nome “Inventário”. Clique em “Equação” e depois em “Fechar”.



- Feito isso, vá até “Ver” e clique em “Grade”. Preencha os campos conforme mostra a figura ao lado e depois clique em “aplicar”.



d) No mesmo sistema de eixos, use cores diferentes e trace as circunferências dadas por estas equações.

• $x^2 + (y + 1)^2 = 1$

• $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

• $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

e) Compare os gráficos das equações e escreva no caderno o que eles têm de parecido e o que têm de diferente.

2ª proposta

a) Represente em um mesmo referencial cartesiano as circunferências cujas equações são:

• $C_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$; • $C_2: (x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 9$; • $C_3: (x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 4$; • $C_4: x^2 + y^2 = 2$.

b) Analise a representação gráfica e indique quais das circunferências:

- são tangentes;
- são secantes;
- são concêntricas;
- não têm ponto em comum.

c) Determine os pontos de interseção das circunferências tangentes e secantes que você identificou nos itens a e b.

PALAVRAS-CHAVE

REGISTRE
NO CADERNO

Essas são as ideias-chave do capítulo.

- Circunferência
- Posições relativas entre um ponto e uma circunferência, uma reta e uma circunferência, e entre duas circunferências.

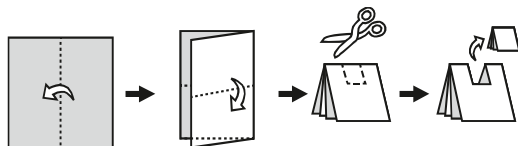
Faça uma síntese do estudo analítico da circunferência a partir dos conceitos indicados.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

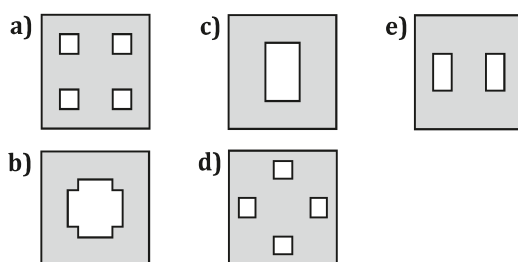
REGISTRE
NO CADERNO

1. Joãozinho dobrou duas vezes uma folha de papel quadrada, branca de um lado e cinza do outro, e depois recortou um quadradinho, como na figura.

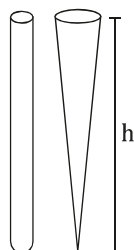
Imagens: Zapt



Qual das figuras abaixo ele encontrou quando desdobrou completamente a folha?



2. (UFPR) Num laboratório há dois tipos de recipientes, conforme a figura ao lado. O primeiro, chamado de “tubo de ensaio”, possui internamente o formato de um cilindro circular reto e fundo semiesférico. O segundo, chamado de “cone de Imhoff”, possui internamente o formato de um cone circular reto.



- a) Sabendo que o volume de um cone de Imhoff, com raio da base igual a 2 cm, é de 60 mL, calcule a altura **h** desse cone.

- b) Calcule o volume (em mililitros) do tubo de ensaio com raio da base medindo 1 cm e que possui a mesma altura **h** do cone de Imhoff.

3. (Insper-SP) Duas companhias aéreas **A** e **B** realizam voos entre duas cidades **X** e **Y**. Sabe-se que:

- a quantidade de voos realizados semanalmente pelas duas companhias é igual;
- a companhia **A** tem uma taxa de ocupação média de 70% nesses voos;
- a companhia **B** tem uma taxa de ocupação média de 40% nesses voos.

A companhia **B** colocou nos jornais uma propaganda com os seguintes dizeres:

“Somos a companhia que mais transporta passageiros entre as cidades **X** e **Y**”.

A companhia **A** foi para a justiça, alegando que a afirmação era falsa e, portanto, enganava os consumidores.

Dentre os argumentos a seguir, aquele que representa a melhor defesa para a companhia **B** é

- a) “nossos aviões atrasam, em média, metade das vezes que atrasam os aviões da companhia **A**”.
- b) “nossos aviões têm, em média, a metade da capacidade dos aviões da companhia **A**”.
- c) “nosso maior avião tem o dobro da capacidade do maior avião da companhia **A**”.
- d) “nossos aviões têm, em média, o dobro da capacidade dos aviões da companhia **A**”.
- e) “nossos aviões voam com o dobro da velocidade dos aviões da companhia **A**”.



Funções trigonométricas

1. Esboce no caderno o gráfico das funções.

a) $y = 2 \sin x$

b) $y = 1 + \cos x$

c) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

Uma relação importante é a que permite calcular seno e cosseno da soma de dois arcos a partir das funções trigonométricas de cada um deles.

Fórmulas da soma e da diferença

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Use essas fórmulas para resolver a próxima atividade.

2. Calcule $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$ e $\operatorname{tg} 75^\circ$.

3. Simplifique $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ para $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

CÁLCULO RÁPIDO



No estudo deste capítulo, saber calcular bem usando produtos notáveis e fatoração será muito importante. Por isso, esse será o enfoque da seção **Cálculo rápido**.

1. Calcule estes quadrados.

a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$

d) $\left(\frac{1}{a} - 1\right)^2$

b) $\left(y - \frac{1}{3}\right)^2$

e) $(a^2 - y)^2$

c) $(-3 - a)^2$

f) $(6 - y)^2$

2. Reduza os termos semelhantes.

a) $(x + 3)^2 - x^2 - 7x$

b) $(2x - 1)^2 - 3x^2 + 8$

c) $(y + 2)^2 - (y + 4)^2 + 4y + 12$

d) $(4z - 3)^2 - 24z - 9$

3. Calcule:

a) $(x + 8)^2$

f) $(2x - 9)(2x + 9)$

b) $(x - 8)^2$

g) $(p + q)^2$

c) $(x + 8)(x - 8)$

h) $(p - q)^2$

d) $(2x - 9)^2$

i) $(p + q)(p - q)$

e) $(2x + 9)^2$

4. Calcule:

a) $(3x - 2) + (x - 4)$

b) $(3x - 2)(x - 4)$

c) $(3x - 2) - (x - 4)$

d) $(5x - 1) + (x + 3)$

e) $(5x - 1) - (x + 3)$

f) $(5x - 1)(x + 3)$

g) $(x + 6) + (x - 6)$

h) $(x + 6) - (x - 6)$

i) $(x + 6)(x - 6)$

5. Calcule:

a) $(x - 2) + (3x - 4)$

b) $(x - 2)(3x - 4)$

c) $(x - 2)^2 + (3x - 4)$

d) $(x - 2)^2 + (3x - 4)^2$

e) $(a - 4b) - (6a + 9b)$

f) $(a - 4b)(6a + 9b)$

g) $(a - 4b)^2 + (6a + 9b)$

h) $(a - 4b)^2 - (6a + 9b)$

6. Vamos lembrar: $\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$. Use essa ideia e escreva de forma simplificada.

a) $\sqrt{32}$

c) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{50}$

d) $\sqrt{27}$

7. Analise cada expressão e corrija se for necessário.

a) $\sqrt{54} = 6 \cdot \sqrt{9}$

b) $\sqrt{44} = 2 \cdot \sqrt{21}$

c) $\sqrt{68} = 4 \cdot \sqrt{17}$

d) $\sqrt{108} = 3 \cdot \sqrt{12}$

e) $\sqrt{279} = 9 \cdot \sqrt{31}$

f) $\sqrt{45} = 3 \cdot \sqrt{5}$

8. Obtenha o raio e o centro das circunferências.

a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

b) $(x + 6)^2 + (y - 1)^2 = 49$

c) $x^2 + y^2 = 3$

d) $\left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + y^2 = 1$

ENTRE SABERES

MATEMÁTICA • ARTE

Este texto pode auxiliar no desenvolvimento do projeto sobre Matemática e Arte proposto no final desta unidade. Converse com os estudantes sobre quais aplicações este texto traz para o projeto.

Sem começo nem fim: o simbolismo da circunferência na Arte

São diversas as manifestações artísticas que apresentam a circunferência para expressar o sentimento ou o pensar de seu criador. Poesias, pinturas em telas, fotografias, dança... A presença da circunferência, e também do círculo, na arte é carregada de simbolismo expresso pela forma geométrica primitiva, perfeita e estável, limitando, de forma harmoniosa, o espaço de seu interior.

Com pinceladas vigorosas, encurvadas e empastadas de tinta, o holandês Vincent van Gogh (1853-1890) criava efeitos usando cores fortes: vermelho para a paixão; laranja e amarelo para o sol, outras estrelas e o calor; azul-escuro para a noite misteriosa; verde para o desamparo. Estudando com muito empenho, Van Gogh criou sua própria técnica de

pintura impressionista. Nas formas circulares, com movimentos turbulentos, temos a expressão dos sentimentos conturbados.

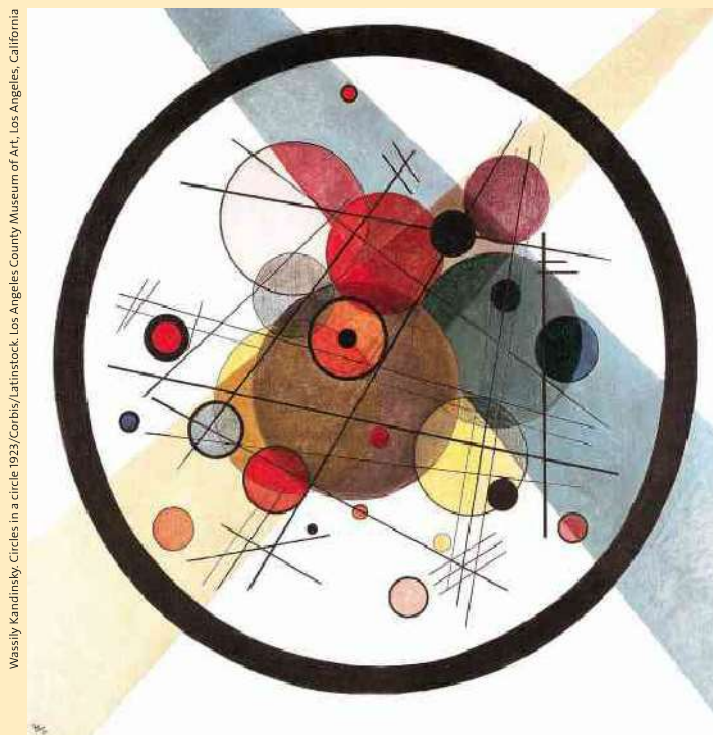
Se em algumas obras artísticas a circunferência revela melancolia, em outras ela expressa liberdade espiritual e encanto com o conhecimento geométrico.

Fundador da arte abstrata, o professor, escritor e artista plástico russo Wassily Kandinsky (1866-1944) foi tomado pelo conhecimento dos desenvolvimentos no domínio das ciências contemporâneas, bem como dos avanços de artistas modernos que contribuíram para formas radicalmente novas de ver e experimentar o mundo. A partir desses conhecimentos, desenvolveu uma



Obra de Vincent van Gogh: *A noite estrelada* (1890). Óleo sobre tela, 73,7 cm × 92,1 cm.

complexa teoria sobre as figuras geométricas e suas relações. Por exemplo, afirmava que o círculo é a forma mais pacífica e representa a alma humana.



Kandinsky, Wassily. *Círculos em um círculo*, de 1923. Aquarela e tinta no papel, 46,5 cm × 42,5 cm.

Envolvendo infinitos eixos de simetria, a circunferência é carregada de dinamismo. O artista traduz o infinito no espaço limitado pela circunferência: é a falta de limites para criar “imagens do pensamento” – expressão utilizada pelo holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Não há início, não há fim, em qualquer direção ou posição a partir de seu centro a mesma imagem projetando o conflito de interpretações, conforme a cor de fundo do olhar do observador.

Genial criador de figuras, Escher tem como maestria recorrente as surpresas visuais, levando o observador a dirigir, por diversas vezes, olhares atentos, até perceber os efeitos e elementos utilizados em cada figura.

“... este mundo redondo não pode existir sem vácuo à sua volta. Não simplesmente porque um interior pressupõe um exterior, mas também porque é no ‘nada’ que se ordenam com exatidão geométrica os pontos imateriais médios dos arcos com que o sistema é construído...” (Escher)

A marca de Escher estava em utilizar a Matemática, principalmente a Geometria, para criar “imagens do pensamento”. Por exemplo, elaborou um sistema completo para a divisão regular de uma superfície plana. Sistema que mais tarde viria a despertar grande admiração entre matemáticos. Em outro de seus registros, Escher diz: “... sinto-me frequentemente mais ligado aos matemáticos do que aos meus próprios colegas de profissão”.

Sem espaço para representar todas as criações e formas de expressão da arte, principalmente aquelas que destacam uma simbologia à circunferência, não podem faltar a dança, comunicação com o corpo, e a música, comunicação pelo som. A circunferência como símbolo de integração social.



Xilogravura da série “Limites circulares”, de Maurits Escher. Obra de 1959.

M.C. Escher, Circle Limit III, 1959 M.C. Escher Museum, The Hague

WoodyStock/Alamy/Fotoarena



A disposição em círculo possibilita integração social e sugere harmonia.

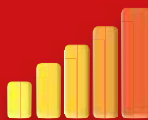
Hans Thoma. Children Dancing, 1872/äkg-images/latinstock. Staatliche Kunsthalle, Karlsruhe



Crianças dançando, óleo sobre tela (115 cm × 161 cm) de 1872 do alemão Hans Thoma (1839-1924).

A linha ininterrupta da circunferência convida à dança em roda. Por favorecer a integração, a comunicação, a flexibilidade e a percepção de si e do outro, é uma das formas mais antigas de celebração comunitária. Está presente na arte, nas expressões folclóricas e populares.

Os ritmos cíclicos são característicos da cultura africana, na qual identificamos as origens da música brasileira, em especial o samba de roda, popularizado no Rio de Janeiro no início do século 20. Em 2005, o samba de roda se tornou um patrimônio da humanidade pela Unesco. Tem característica isométrica, rigidamente controlada por um ritmo de repetição. A música emerge de um princípio de participação social coletiva com uma alta incidência de interação social.



Matemática e Arte

REGISTRE
NO CADERNO



Entendendo a proposta

Com a orientação do professor, você e os colegas podem desenvolver uma pesquisa bem interessante sobre a Matemática, especialmente a respeito das formas geométricas como fonte de inspiração para muitos artistas.

Essa proposta de trabalho tem como objetivo colocá-lo em contato com a face estética da Matemática e criar uma oportunidade para que você possa desenvolver e mostrar seu lado artístico.

Para começar

Este projeto pode ser desenvolvido individualmente ou em grupos, conforme a orientação do professor. Para realizá-lo, você pode pedir auxílio ao professor de Arte.

Desenvolvendo o projeto

Pesquise informações sobre pintores como Piet Mondrian, Wassily Kandinsky, Pablo Picasso, Maurits Escher, cujas obras podem ter sido inspiradas por formas geométricas. Uma sugestão para começar a pesquisa é retomar o texto da seção **Entre saberes**, página 137, que trata mais especificamente de circunferências e círculos. Essa pesquisa pode ser ampliada por meio de buscas feitas pela internet, em *sites* confiáveis, ou em livros e revistas, caso seja possível.

Após a pesquisa, converse com os colegas e o professor sobre os pintores selecionados, abordando algumas informações biográficas, e sobre suas obras, discutindo o uso de cores, de formas geométricas etc.

A seguir, apresentamos, como exemplo, algumas questões para a discussão sobre obras de duas artistas: Sonia Delaunay (1885-1979) e Beatriz Milhazes (1960-).

Em 1946, Sonia Delaunay pintou um quadro a que chamou de *Ritmo*. Esse quadro mostra uma das marcas da pintura dessa artista, que é o uso de círculos nas telas de sua fase abstracionista.

Ritmo, de Sonia Delaunay.
Óleo sobre tela de 1946.



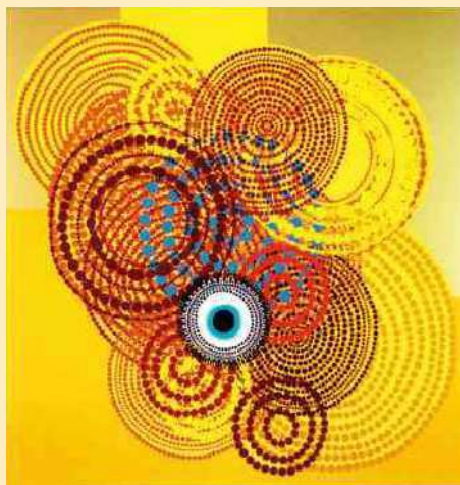
Sonia Delaunay. Rhythm 1946/The Granger Collection, New York/Fotoarena. Coleção particular

Após observar esse quadro de Sonia Delaunay, responda às questões.

- Qual o efeito que as cores dão à obra?
- Como as circunferências foram utilizadas nessa obra?
- Qual a posição relativa entre as circunferências que aparecem nessa obra?

No Brasil, a artista carioca Beatriz Milhazes também tem os círculos como uma das marcas de suas obras. Veja.

Serpentina, de Beatriz Milhazes. Serigrafia colorida (132 × 132 cm), de 2003, da série Copacabana.



Beatriz Milhazes. Serpentina, 2003. Coleção particular

- Nessa obra de Beatriz Milhazes, que efeitos foram usados para criar as circunferências?
- Que papel o fundo desempenha nessa obra?
- Quais as posições entre circunferências usadas pela artista para dar o efeito de serpentina à sua obra?

- Depois de pesquisar e discutir, é a sua vez de criar suas próprias produções artísticas. Usando o Winplot e o Gimp (ou qualquer outro editor de imagem gratuito), é possível criar obras de arte no computador.

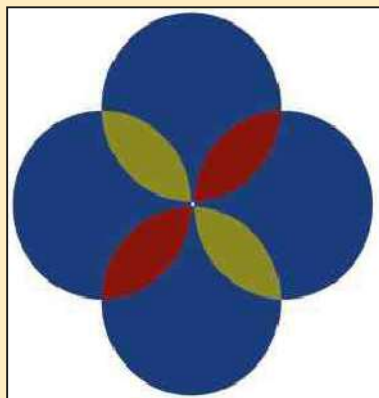
1ª etapa: Usando lápis e papel, faça um esboço de uma obra com retas, pontos e circunferências e a posição relativa entre elas.

2ª etapa: Com o esboço pronto, use o Winplot e o que sabe sobre estudo analítico de retas e de circunferências para criar os desenhos na tela do computador.

3ª etapa: Quando seu desenho estiver pronto, apague todas as equações, os traçados dos eixos e as linhas de grade, de modo que sobrem apenas os desenhos de retas e circunferências.

4ª etapa: No menu Arquivo, selecione “Copiar bitmap”.

5ª etapa: Minimize então a tela do Winplot e abra o Gimp ou algum outro editor de imagem com ferramentas de desenho. Selecione a opção “Colar” e use as ferramentas desse editor para colorir partes do seu desenho. Com um mesmo conjunto de circunferências você pode obter imagens diferentes. Veja abaixo uma que fizemos a partir das circunferências traçadas nas propostas da seção **Foco na tecnologia – Computador** das páginas 134 e 135.



winplot

Apresentação dos resultados

Depois que os desenhos estiverem prontos, você, os colegas e o professor podem organizar uma exposição dos trabalhos.

7 Estudo analítico das cônicas

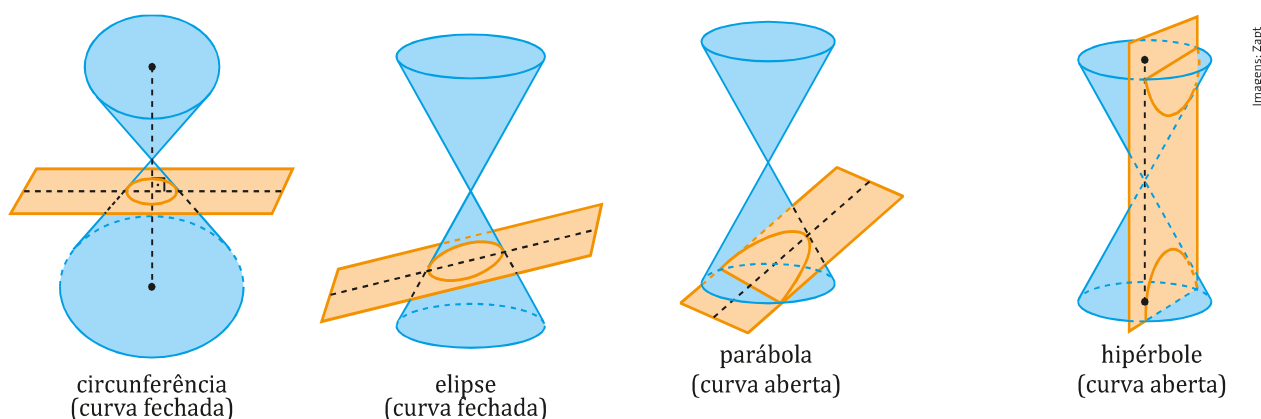
Se desejar, consulte na seção **Experimentos educacionais** as atividades propostas no item Cônicas do site <www.uff.br/cdme> (acesso em: 22 mar. 2016). Elas são indicadas para explorar o tema deste capítulo.

Os tópicos **2** e **3** deste capítulo podem ser desenvolvidos em caráter opcional, caso o tempo permita ou você deseje que a classe se aprofunde nos estudos da Geometria analítica; servem também como uma revisão, de forma nova, de assuntos já estudados, como a parábola.

Sugerimos que analise especialmente as propostas das seções **Foco no raciocínio lógico** e **Aprender a aprender**, sobretudo a última, que retoma a Geometria métrica espacial e é útil na preparação dos estudantes que desejam participar de processos seletivos para o Ensino Superior.

Por volta do ano 200 a.C., o matemático grego Apolônio deixou registrado o primeiro estudo sobre as propriedades da **elipse**, da **hipérbole** e da **parábola** em seu célebre trabalho *As cônicas*.

Apolônio chamou de cônicas as curvas que podem ser obtidas quando um plano secciona uma superfície cônica dupla. Observe:



Embora a circunferência também possa ser obtida por esse processo, Apolônio deteve-se na análise da parábola, da elipse e da hipérbole.

Situe-se

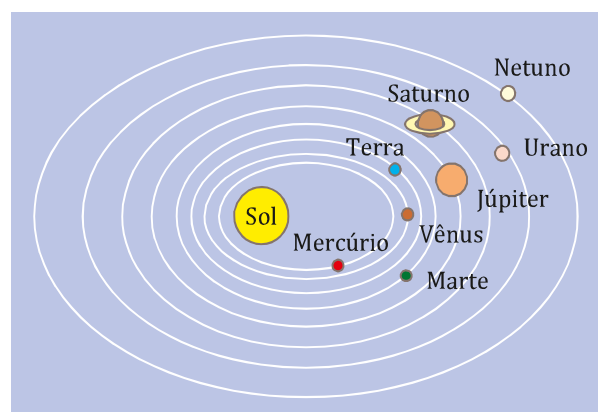
Até aqui vimos o tratamento algébrico que a Geometria analítica deu às retas, aos pontos e às circunferências. Outras figuras podem ser definidas e estudadas por suas equações. Vamos conhecer as cônicas.

1 Elipse

Apolônio estudou as cônicas pelo simples prazer de pesquisar, por curiosidade científica.

Durante muito tempo, aproximadamente 18 séculos, não houve estudos detalhados de aplicação das cônicas no mundo físico. No entanto, pesquisas de físicos, astrônomos e projetistas foram mostrando aplicações do estudo de Apolônio no mundo em que vivemos. A elipse, por exemplo, está associada à órbita dos planetas em torno do Sol.

É comum as pessoas terem alguma noção sobre elipse; no entanto, geralmente não têm informações sobre uma propriedade válida para todos os pontos da elipse e que é fundamental para definir essa curva. Mas, afinal, que propriedade é essa? O que é elipse?



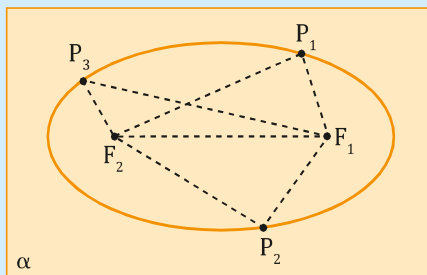
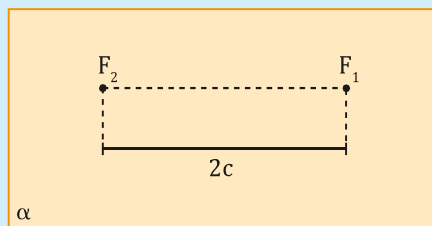
Representação atual do Sistema Solar (ilustração com elementos sem proporção entre si e em cores fantasia.)

Seja $2c$ a distância entre dois pontos distintos, F_1 e F_2 , de um plano α .

O conjunto dos pontos de α cujas distâncias a F_1 e a F_2 têm soma constante e maior que $2c$ é denominado **elipse**.

Indicaremos essa constante por $2a$.

Logo, $a > c > 0$.



Na figura, temos:

$$d_{P_1F_1} + d_{P_1F_2} = 2a, \quad d_{P_2F_1} + d_{P_2F_2} = 2a, \quad d_{P_3F_1} + d_{P_3F_2} = 2a$$

Sejam A_1 e A_2 as interseções da elipse com $\overline{F_1F_2}$. Temos:

$$\left. \begin{array}{l} d_{A_1F_1} + d_{A_1F_2} = 2a \\ d_{A_1F_2} + d_{A_1F_1} = d_{F_1F_2} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{A_1F_1} = a - c$$

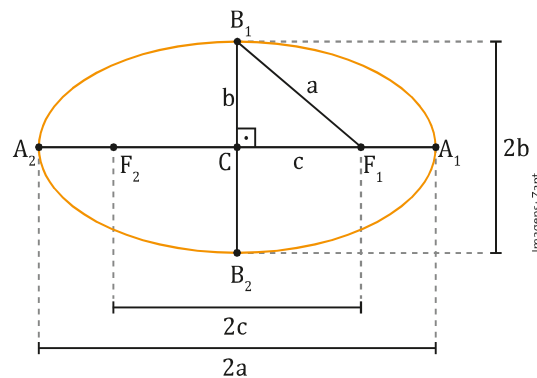
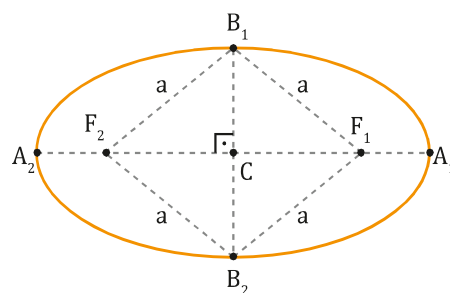
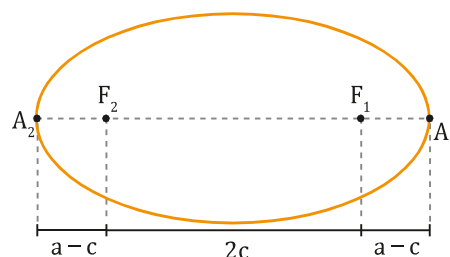
$$\left. \begin{array}{l} d_{A_2F_2} + d_{A_2F_1} = 2a \\ d_{A_2F_1} = d_{A_2F_2} + d_{F_1F_2} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{A_2F_2} = a - c$$

Portanto, $d_{A_1F_1} = d_{A_2F_2}$.

Sejam C o ponto médio de $\overline{F_1F_2}$ e B_1 e B_2 as interseções da elipse com a mediatriz de $\overline{F_1F_2}$. Então:

$$\left. \begin{array}{l} d_{B_1F_1} = d_{B_1F_2} \\ d_{B_1F_1} + d_{B_1F_2} = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow d_{B_1F_1} = d_{B_1F_2} = a$$

De forma análoga, $d_{B_2F_1} = d_{B_2F_2} = a$.



Imagens: Zapt

Elementos da elipse

F_1, F_2 : focos; $d_{F_1F_2} = 2c$: distância focal;

$\overline{A_1A_2}$: eixo maior; $d_{A_1A_2} = 2a$: comprimento do eixo maior;

$\overline{B_1B_2}$: eixo menor; $d_{B_1B_2} = 2b$: comprimento do eixo menor;

C : centro.

Relação fundamental

Aplicando o Teorema de Pitágoras no $\triangle F_1CB_1$, obtemos: $a^2 = b^2 + c^2$

Excentricidade da elipse

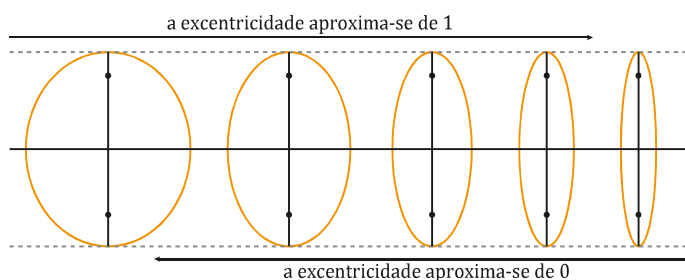
A excentricidade (e) de uma elipse é dada pelo quociente entre a distância entre os focos ($2c$) e a medida do eixo maior ($2a$).

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Como $0 < c < a$, $0 < e < 1$.

A excentricidade nos auxilia a perceber se a elipse é mais achatada ou mais arredondada. Observe na figura que:

- quando a excentricidade aproxima-se de 1, a elipse é mais achatada;
- quando a excentricidade aproxima-se de zero, a elipse é mais arredondada.



Quando a excentricidade é zero, temos $c = 0$ e, nesse caso, $a = b$, que é igual ao raio de uma circunferência. Logo, a circunferência é um caso particular de elipse.

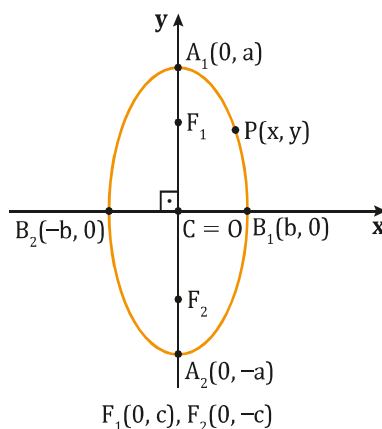
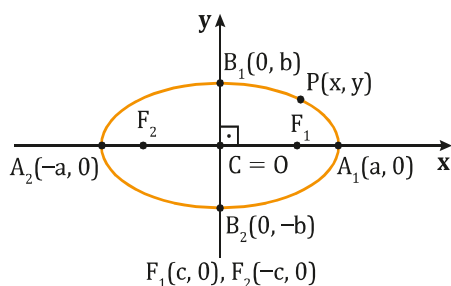
A excentricidade seria 1 apenas se $c = a$, ou seja, se $A_1 = F_1$ e $A_2 = F_2$, e teríamos apenas os dois focos e os pontos entre eles.

Para evitar essas distorções é que tomamos $0 < e < 1$.

Equações da elipse com eixos contidos nos eixos coordenados e centro na origem

Vamos determinar uma equação para a elipse no caso particular em que seus eixos estão contidos nos eixos do plano cartesiano.

Nesse caso, temos duas possibilidades.



Imagens: Zapt

Nos dois casos, um ponto $P(x, y)$ pertence à elipse se, e somente se, satisfaz $d_{PF_1} + d_{PF_2} = 2a$, o que significa:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (1) \quad \text{ou} \quad \sqrt{x^2 + (y+c)^2} + \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a \quad (2)$$

Os cálculos são análogos nos dois casos e vamos desenvolvê-los apenas para a primeira situação, ou seja, para a igualdade (1).

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros dessa igualdade e simplificando temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow 4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo os dois membros por 4 e elevando-os ao quadrado novamente, obtemos:

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Lembrando que $a^2 - c^2 = b^2$, chegamos a: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Dividindo os dois membros por a^2b^2 , temos a equação da elipse com focos no eixo Ox e centro na origem.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Quando os focos F_1 e F_2 pertencem ao eixo Oy (caso da igualdade ②), temos: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$
Exemplos:

- a) A elipse com centro na origem, $\overline{F_1F_2}$ contido no eixo x e semieixos de tamanhos $a = 6$ e $b = 4$ tem equação: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$
- b) A elipse com centro na origem, $\overline{F_1F_2}$ contido no eixo y e semieixos de comprimentos $a = 6$ e $b = 4$ tem equação: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

PARA COMPLEMENTAR

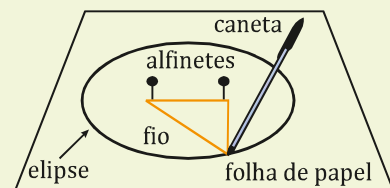
REGISTRE
NO CADERNO



Traçando uma elipse

Vimos que a elipse é o conjunto dos pontos de um plano cujas distâncias (d_1 e d_2) a dois pontos fixos (os focos F_1 e F_2) têm soma constante.
 $d_1 + d_2 = \text{constante}$

Assim, podemos facilmente traçar elipses utilizando um fio que não se deforma e dois alfinetes ou percevejos, conforme mostra a figura ao lado.



- F_1 e F_2 são os pontos onde os alfinetes estão fixados.
- $d_1 + d_2 = \text{constante}$, pois o comprimento do fio se mantém invariável. (Observe que, nesse caso, o comprimento do fio é a soma $d_1 + d_2 + F_1F_2$.)

Faça esse experimento e trace diversas elipses mudando os focos e o comprimento do fio.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

- R1.** Seja a elipse de focos $F_1(6, 0)$ e $F_2(-6, 0)$ e eixo menor de comprimento 10.
- Determine o seu centro C .
 - Obtenha a sua equação.
 - Esboce a elipse e obtenha os extremos dos eixos maior e menor.

Resolução

a) C : ponto médio de $\overline{F_1F_2} \Rightarrow C(0, 0)$.

b) A elipse tem equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

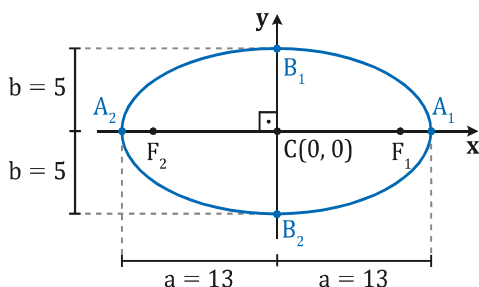
$$2b = 10 \Rightarrow b = 5 \quad 2c = d_{F_1F_2} \Rightarrow c = 12$$

Usando a relação fundamental $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$a^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow a = 13 \text{ ou } a = -13 \text{ (não serve, pois } a > 0)$$

$$\text{Então, a equação da elipse é } \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

c) Da figura, os extremos do eixo maior são: $A_1(13, 0)$ e $A_2(-13, 0)$ e os do eixo menor são: $B_1(0, 5)$ e $B_2(0, -5)$



Outro modo:

As extremidades do eixo maior são as interseções da elipse com $\overline{F_1F_2}$:

$$y = 0 \text{ em } \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{169} = 1 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13 \text{ ou } x = -13$$

As extremidades do eixo menor são as interseções da elipse com $\overline{B_1B_2}$:

$$x = 0 \text{ em } \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = 5 \text{ ou } y = -5$$

R2. Seja a elipse com eixo maior de extremidades $A_1(0, 10)$ e $A_2(0, -10)$ e eixo menor de extremidades $B_1(8, 0)$ e $B_2(-8, 0)$.

- Obtenha a sua equação.
- Esboce a elipse e determine os seus focos.

Resolução

a) $\overline{A_1A_2}$ é o eixo y , então a elipse tem equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

$$2a = d_{A_1A_2} \Rightarrow 2a = 20 \Rightarrow a = 10$$

$$2b = d_{B_1B_2} \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow b = 8$$

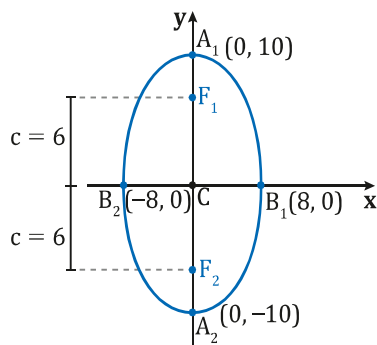
$$\text{Então, a equação da elipse é } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

b) $a = 10$ e $b = 8$ em $a^2 = b^2 + c^2$ resulta:

$$10^2 = 8^2 + c^2 \Rightarrow c = 6 \text{ ou } c = -6$$

(não serve, pois $c > 0$)

Imagens: Zapit



Os focos são: $F_1(0, 6)$ e $F_2(0, -6)$.

R3. Seja a elipse de equação $16x^2 + 25y^2 = 400$. Determine:

- os comprimentos dos eixos.
- os focos e a excentricidade.

Resolução

a) Dividindo os dois membros da equação dada por 400, temos:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (1)$$

O denominador de x^2 é maior que o de y^2 ; logo, $\overline{F_1F_2}$ é o eixo x .

Comparando (1) com $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos:

$$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \text{ ou } a = -5 \text{ (não serve, pois } a > 0)$$

$$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \text{ ou } b = -4 \text{ (não serve, pois } b > 0)$$

Logo, o eixo maior tem comprimento $2a = 10$, e o eixo menor, $2b = 8$.

b) Substituindo $a = 5$ e $b = 4$ na relação $a^2 = b^2 + c^2$, temos:

$$5^2 = 4^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \text{ ou } c = -3 \text{ (não serve, pois } c > 0)$$

Logo, os focos são $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$, ou seja, $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$.

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{3}{5} \text{ (note que } 0 < e < 1)$$

FAZER E APRENDER

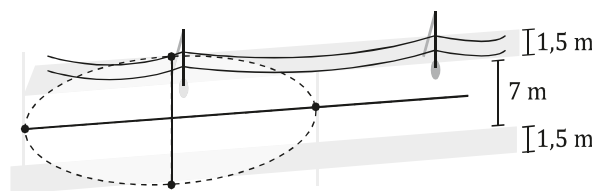
REGISTRE
NO CADERNO



- Esboce a elipse e obtenha a equação em cada caso.
 - Eixo menor de comprimento 8 e focos $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$.
 - Eixo maior de comprimento 26 e focos $F_1(8, 0)$ e $F_2(-8, 0)$.
 - Eixo maior de extremos $(0, -5)$ e $(0, 5)$ e eixo menor de comprimento 8.
 - Eixo menor de extremos $(-6, 0)$ e $(6, 0)$ e excentricidade 0,8.
- Em relação à elipse $8x^2 + 5y^2 = 40$, podemos dizer que o ponto $P(3, 4)$ é interno à elipse e não é foco? Por quê?
- Uma elipse, com eixos paralelos aos eixos cartesianos, cujo eixo maior é o triplo do eixo menor, tem centro na origem e passa por $(\sqrt{6}, 1)$. Obtenha a sua equação.
- Obtenha a equação da elipse com focos $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ e que passa por $(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3})$.
- (Unesp-SP) A figura a seguir mostra a representação de algumas das ruas de nossas cidades. Essas ruas possuem calçadas de 1,5 m de largura, separadas por uma pista de 7 m de largura. Vamos admitir que:
 - os postes de iluminação projetam sobre a rua uma área iluminada na forma de uma elipse de excentricidade 0,943;

II. o centro dessa elipse encontra-se verticalmente abaixo da lâmpada, no meio da rua;

III. o eixo menor da elipse, perpendicular à calçada, tem exatamente a largura da rua (calçadas e pista).



Dado: $0,943^2 \approx 0,889$ e $\sqrt{0,111} \approx 0,333$

Se desejarmos que as elipses de luz se tangenciem nas extremidades dos eixos maiores, a distância, em metros, entre dois postes consecutivos deverá ser de aproximadamente:

- 35
 - 30
 - 25
 - 20
 - 15
6. (UFT) Considere \mathbb{R} o conjunto dos números reais e $b \in \mathbb{R}$. Encontre os valores de b , tais que, no plano cartesiano xy , a reta $y = x + b$ intersecta a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ em um único ponto. A soma dos valores de b é:
- 0
 - $2\sqrt{5}$
 - $-2\sqrt{5}$
 - 2
 - $\sqrt{5}$

INVENTE VOCÊ

REGISTRE
NO CADERNO



- Elabore uma sequência de exercícios sobre a elipse de equação $4x^2 + y^2 = 16$, que envolva gráfico, eixos, distância focal e vértices dos eixos.
- Crie um problema sobre elipse, no qual apareça o ponto $(0, 4)$ como foco.

2 Hipérbole conteúdo opcional

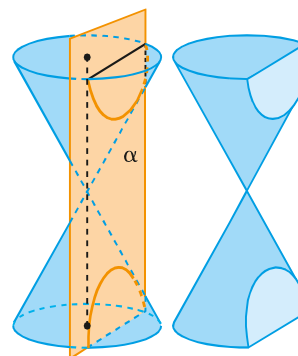
No início do capítulo, mostramos que a hipérbole pode ser obtida a partir de uma seção de uma superfície cônica dupla por um plano paralelo ao eixo central da superfície.

Em nosso dia a dia, as hipérboles podem aparecer, por exemplo, a partir da luz de um abajur projetada na parede, como se vê na imagem ao lado.

Em Matemática, temos esta definição de hipérbole.



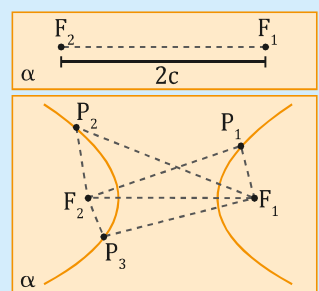
Alamy/fotorena



Seja $2c$ a distância entre dois pontos distintos, F_1 e F_2 , de um plano α . O conjunto dos pontos de α , tal que o módulo da diferença das distâncias de cada um desses pontos a F_1 e a F_2 é constante, não nulo e menor que $2c$, é denominado **hipérbole**.

Indicaremos essa constante por $2a$.

Logo, $0 < a < c$.



Imagens: Zapt

Na figura, temos:

$$|d_{P_1F_1} - d_{P_1F_2}| = 2a, |d_{P_2F_1} - d_{P_2F_2}| = 2a, |d_{P_3F_1} - d_{P_3F_2}| = 2a$$

Sejam A_1 e A_2 as interseções da hipérbole com $\overline{F_1F_2}$.

Como $d_{A_1F_2} > d_{A_1F_1}$ e $d_{A_2F_1} > d_{A_2F_2}$, temos:

$$d_{A_1F_2} - d_{A_1F_1} = 2a \Rightarrow d_{A_2F_2} + d_{A_1A_2} - d_{A_1F_1} = 2a \quad (1)$$

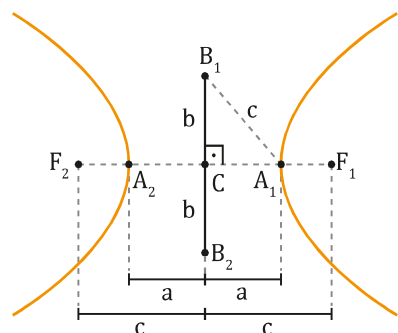
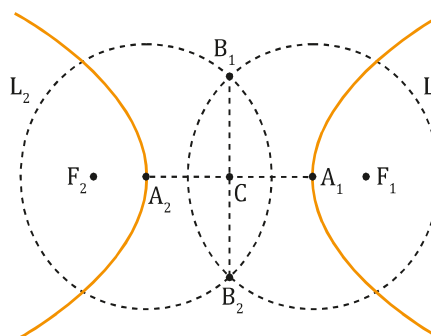
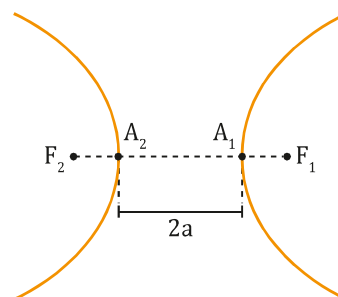
$$d_{A_2F_1} - d_{A_2F_2} = 2a \Rightarrow d_{A_2A_1} + d_{A_1F_1} - d_{A_2F_2} = 2a \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ resulta: } 2d_{A_1A_2} = 4a \Rightarrow d_{A_1A_2} = 2a$$

$$d_{A_1A_2} = 2a \text{ em } (1) \text{ fornece: } d_{A_1F_1} = d_{A_2F_2}$$

Sejam L_1 e L_2 as circunferências de mesmo raio c e de centros, respectivamente, A_1 e A_2 ; L_1 e L_2 são secantes entre si ($d_{A_1A_2} = 2a < 2c$) e determinam a corda $\overline{B_1B_2}$, cujo **comprimento** indicaremos por $2b$.

$\overline{B_1B_2}$ é perpendicular a $\overline{A_1A_2}$ e o ponto C , interseção de $\overline{A_1A_2}$ e de $\overline{B_1B_2}$, é o ponto médio de $\overline{A_1A_2}$, de $\overline{B_1B_2}$ e de $\overline{F_1F_2}$.



Elementos da hipérbole

F_1, F_2 : focos; $d_{F_1F_2} = 2c$: distância focal;

$\overline{A_1A_2}$: eixo real ou transverso;

$d_{A_1A_2} = 2a$: comprimento do eixo real; $2a < 2c$;

$\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário;

$d_{B_1B_2} = 2b$: comprimento do eixo imaginário;

C : ponto médio do segmento F_1F_2 .

Relação fundamental: $c^2 = a^2 + b^2$ (pelo Teorema de Pitágoras).

Excentricidade: é o número real $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$ porque $0 < a < c$.

Assíntotas da hipérbole

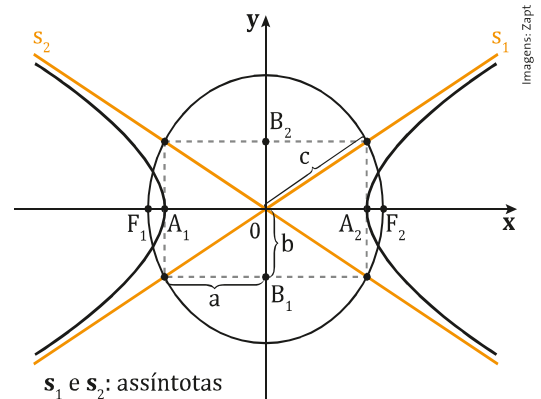
Na hipérbole ao lado, considere um retângulo com centro na origem e lados de comprimentos $2a$ e $2b$. As retas contendo as diagonais desse retângulo são chamadas de **assíntotas** da hipérbole.

Os ramos da hipérbole se aproximam sempre dessas retas, mas sem tangenciá-las ou intersectá-las.

As equações das assíntotas são dadas por:

$$s_1: y = m_1 x, \quad m_1 = \frac{b}{a} \quad \text{e}$$

$$s_2: y = m_2 x, \quad m_2 = -\frac{b}{a}$$



Equações da hipérbole com eixos contidos nos eixos coordenados e centro na origem

Sejam $C(0, 0)$ o centro da hipérbole e os focos $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ pertencentes ao eixo Ox .

Para um ponto qualquer P da hipérbole, temos:

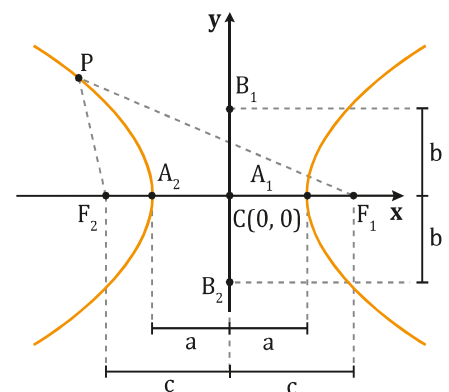
$$|d_{PF_1} - d_{PF_2}| = 2a$$

$$d_{PF_1} - d_{PF_2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Efetuada transformações semelhantes às da dedução da equação da elipse e usando a relação $c^2 - a^2 = b^2$, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Note que: o *eixo real* tem extremidades $A_1(a, 0)$ e $A_2(-a, 0)$; o *eixo imaginário* tem extremidades $B_1(0, b)$ e $B_2(0, -b)$.

Exemplo:

A hipérbole com eixo real de extremidades $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e eixo imaginário de extremidades $B_1(0, 4)$ e $B_2(0, -4)$ tem equação:

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

Agora vamos considerar $C(0, 0)$ o centro da hipérbole e os focos $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$ pertencentes ao eixo Oy .

Para um ponto qualquer $P(x, y)$ da hipérbole, temos:

$$|d_{PF_1} - d_{PF_2}| = 2a$$

$$\sqrt{x^2 + (y-c)^2} - \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = \pm 2a$$

Efetuada transformações semelhantes às da dedução da equação da elipse e usando a relação $c^2 - a^2 = b^2$, obtemos:

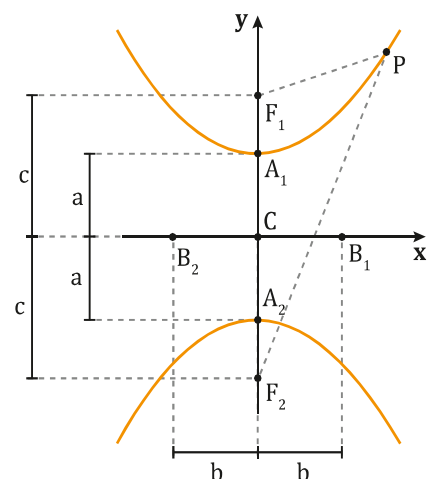
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Note que: o *eixo real* tem extremidades $A_1(0, a)$ e $A_2(0, -a)$; o *eixo imaginário* tem extremidades $B_1(b, 0)$ e $B_2(-b, 0)$.

Exemplo:

A hipérbole com eixo real de extremidades $A_1(0, 6)$ e $A_2(0, -6)$ e eixo imaginário de extremidades $B_1(2, 0)$ e $B_2(-2, 0)$ tem equação:

$$\frac{y^2}{6^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{4} = 1$$



DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R4. Seja a hipérbole de focos $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$ e eixo real de comprimento 6.

- Obtenha a equação dessa hipérbole.
- Esboce a hipérbole e obtenha os extremos dos eixos real e imaginário.

Resolução

a) A hipérbole tem equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, pois $\overline{F_1F_2}$ está contido em Ox . Calculando:

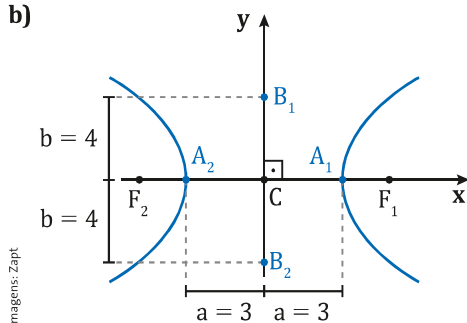
$$2c = d_{F_1F_2} \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

Substituindo $c = 5$ e $a = 3$ em $a^2 + b^2 = c^2$, obtemos $b = 4$ ou $b = -4$ (não serve, pois $b > 0$).

Logo, a hipérbole tem equação $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

b)



Da figura, o eixo real tem extremos $A_1(3, 0)$ e $A_2(-3, 0)$ e o eixo imaginário tem extremos $B_1(0, 4)$ e $B_2(0, -4)$.

R5. Seja a hipérbole de equação $9y^2 - 16x^2 = 144$. Determine:

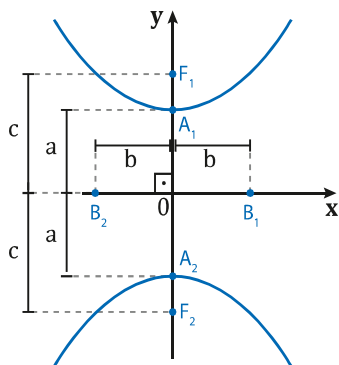
- os focos, os extremos dos eixos real e imaginário e a excentricidade.
- as interseções da hipérbole com a reta de equação $2x - y = 0$.

Resolução

a) Dividindo os membros de $9y^2 - 16x^2 = 144$ por 144, vem:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \quad (1),$$

que é a equação da hipérbole com centro na origem e focos no eixo y .



Comparando (1) com

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \text{ temos:}$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ ou } a = -4 \text{ (não serve, pois } a > 0)$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \text{ ou } b = -3 \text{ (não serve, pois } b > 0)$$

Da relação $a^2 + b^2 = c^2$, obtemos $c = 5$ ou $c = -5$ (não serve, pois $c > 0$).

Da figura, temos:

- focos: $F_1(0, 5)$, $F_2(0, -5)$;
- extremos do eixo real: $A_1(0, 4)$, $A_2(0, -4)$;
- extremos do eixo imaginário: $B_1(3, 0)$, $B_2(-3, 0)$.

A excentricidade é dada por:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e = \frac{5}{4} \text{ (note que } e > 1)$$

b) As coordenadas dos pontos solicitados são as soluções do sistema de equações simultâneas:

$$\begin{cases} 9y^2 - 16x^2 = 144 & (2) \\ 2x - y = 0 & (3) \end{cases}$$

De (3), obtemos $y = 2x$ e, substituindo em (2), resulta:

$$9(2x)^2 - 16x^2 = 144 \Rightarrow 20x^2 = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{144}{20} \Rightarrow x = \pm \frac{12}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ ou } x = -\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Em (3): para } x = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \text{ temos } y = \frac{12\sqrt{5}}{5};$$

$$\text{para } x = -\frac{6\sqrt{5}}{5}, \text{ temos } y = -\frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto, os pontos comuns são

$$\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{12\sqrt{5}}{5}\right) \text{ e } \left(-\frac{6\sqrt{5}}{5}, -\frac{12\sqrt{5}}{5}\right).$$

R6. Uma hipérbole tem centro na origem, eixo real de medida 6, eixo imaginário de medida 8 e focos sobre o eixo x . Determine:

- a equação da hipérbole.
- as coordenadas dos focos.
- as equações das assíntotas.

Resolução

a) A partir dos dados do problema, temos:

eixo real: $2a = 6$ ou $a = 3$;

eixo imaginário: $2b = 8$ ou $b = 4$.

Como a hipérbole tem centro na origem, sua equação é

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \text{ ou } 16x^2 - 9y^2 = 144.$$

b) Para encontrar as coordenadas dos focos, aplicamos a relação $c^2 = a^2 + b^2$; então $c^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow c = 5$

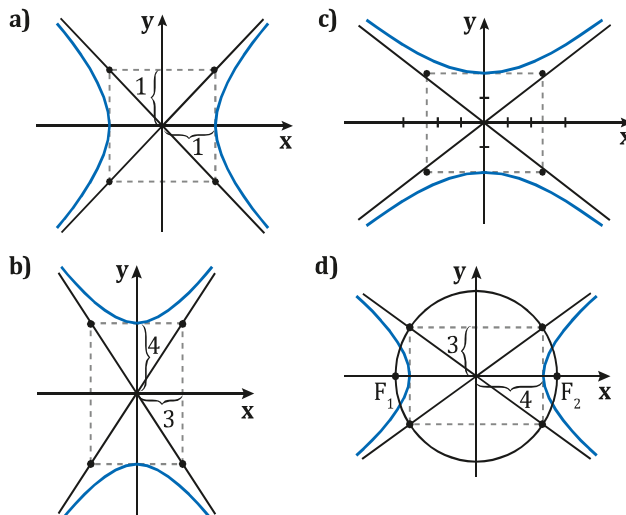
Os focos são $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$.

c) As assíntotas, nesse caso, são retas que passam pela origem, logo têm a forma $y = mx$, sendo m o coeficiente angular; então, as equações são:

$$s_1: y = \frac{4}{3}x \text{ e } s_2: y = -\frac{4}{3}x$$



7. Por que, na definição de hipérbole, exigimos $a > 0$? O que ocorreria se $a = 0$? E se $a = c$?
8. Explique o significado da excentricidade $(e = \frac{c}{a})$ na hipérbole.
9. Uma hipérbole tem centro na origem, focos sobre o eixo x , 8 de eixo real e 6 de eixo imaginário.
 - a) Ache a equação da hipérbole.
 - b) Quais são as coordenadas dos focos?
 - c) Esboce o gráfico da hipérbole.
 - d) Dê a equação das assíntotas.
10. Obtenha a equação da hipérbole de focos $F_1(2\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(-2\sqrt{5}, 0)$ e de eixo imaginário de comprimento 4.
11. Obtenha a equação da hipérbole cujo eixo imaginário tem extremos $B_1(1, 0)$ e $B_2(-1, 0)$ e cuja excentricidade vale $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
12. A partir dos gráficos a seguir, obtenha as coordenadas dos focos, a equação das hipérboles e das assíntotas e a excentricidade.

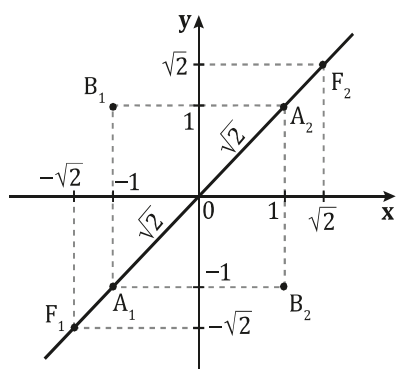


13. Determine as interseções da reta de equação $x - \sqrt{3}y = 0$ com a hipérbole de excentricidade $\frac{\sqrt{13}}{3}$ e eixo imaginário de extremos $(0, 2)$ e $(0, -2)$.
14. A hipérbole com semieixos de mesma medida e focos $F_1(-2, -2)$ e $F_2(2, 2)$ corresponde ao gráfico de uma função. Qual é essa função?

Uma hipérbole especial

No plano cartesiano, vamos considerar a hipérbole com focos nos pontos $F_1(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $F_2(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ambos na reta bissetriz do 1º quadrante e com comprimento dos dois eixos, real e imaginário, igual a $2a = 2b = 2\sqrt{2}$.

Vamos determinar a equação dessa hipérbole, seu gráfico e suas assíntotas.



Um ponto $P(x, y)$ pertence à hipérbole se $|d_{PF_1} - d_{PF_2}| = 2a$

Então:

$$\sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2} = \pm 2\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2} = \pm 2\sqrt{2} + \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2}$$

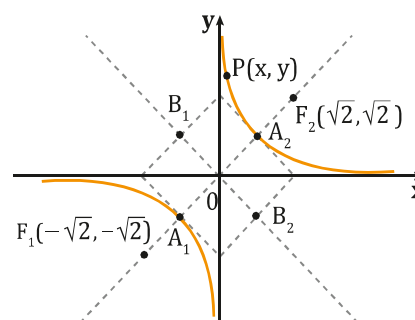
Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade e simplificando, temos:

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2 = \sqrt{2}\sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2}$$

Elevando novamente os dois membros ao quadrado, concluímos que a equação dessa hipérbole é: $xy = 1$

Ou seja, temos a hipérbole como o gráfico da função: $y = \frac{1}{x}$, para $x \neq 0$

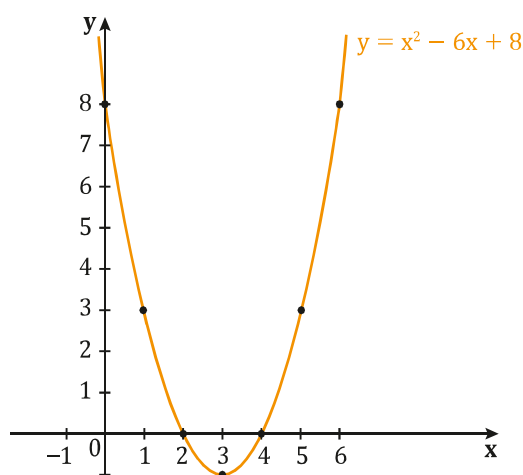
Além disso, como suas assíntotas são as retas suportes das diagonais do retângulo que tem os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios de seus lados, as assíntotas dessa hipérbole são os eixos Ox e Oy do plano cartesiano. Daí, seu gráfico é:



3 Parábola

conteúdo opcional

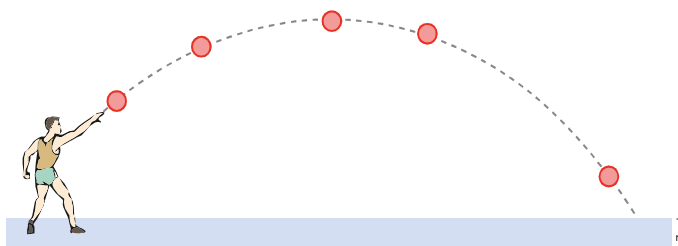
Ao estudar a função quadrática, vimos que seu gráfico é uma parábola.



Ao longo do estudo sobre parábola, sugerimos que relacione os conhecimentos prévios dos estudantes sobre esta curva a outros conhecimentos, constituindo assim uma ampliação.

Também sabemos que o lançamento oblíquo de uma bola, de um projétil ou de uma pedra pode descrever uma parábola.

Agora pretendemos aprofundar o estudo dessa curva a partir dos conhecimentos da Geometria analítica.



Sejam, em um plano α , uma reta d e um ponto $F \notin d$.

O conjunto dos pontos de α equidistantes de d e de F é denominado **parábola**.

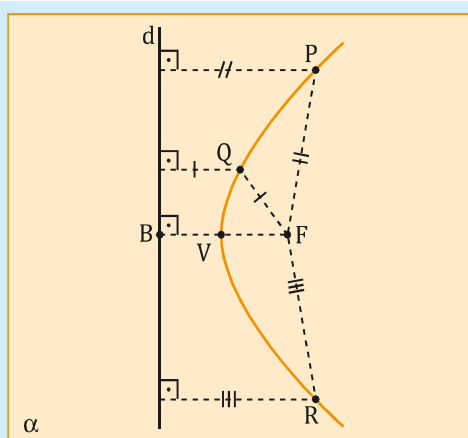
Na figura, temos:

$$d_{Pd} = d_{PF}$$

$$d_{Qd} = d_{QF}$$

$$d_{Vd} = d_{VF}$$

$$d_{Rd} = d_{RF}$$



Imagens: Zappt

Em outras palavras, podemos dizer que a parábola é o conjunto de pontos de um plano tais que a distância a um ponto fixo desse plano é sempre igual à distância a uma reta fixa.

Elementos da parábola

F: foco (ponto fixo);

d: reta diretriz (reta fixa);

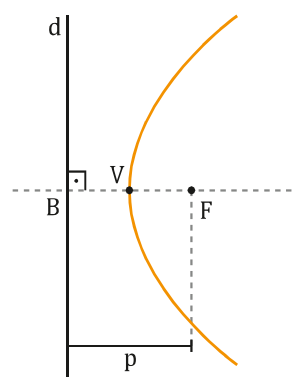
$d_{Fd} = p > 0$: parâmetro ($d_{Fd} = d_{FB}$);

\overline{VF} : eixo de simetria;

V: vértice (ponto médio de \overline{FB} , $\overline{FB} \perp d$ e $B \in d$).

Sendo **p** o parâmetro da parábola, $BF = p$,

$$BV = \frac{p}{2} \text{ e } VF = \frac{p}{2}.$$



Equação da parábola com diretriz d paralela ao eixo y e foco à direita de d

Seja $V(x_0, y_0)$ o vértice da parábola, então o foco é:

$$F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$$

A equação de d é $x = x_0 - \frac{p}{2}$, ou seja:

$$x - x_0 + \frac{p}{2} = 0$$

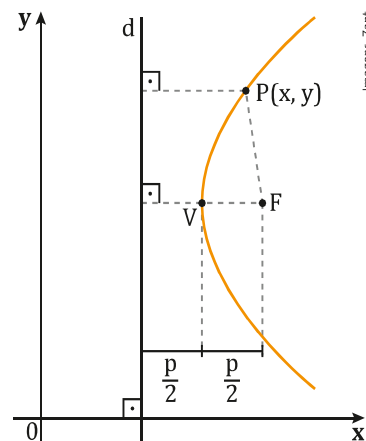
Para um ponto qualquer $P(x, y)$ da parábola, temos: $d_{Pd} = d_{PF}$

$$\left|x - x_0 + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left[x - \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y - y_0)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado:

$$\begin{aligned} \left[(x - x_0) + \frac{p}{2}\right]^2 &= \left[(x - x_0) - \frac{p}{2}\right]^2 + (y - y_0)^2 \\ (x - x_0)^2 + p(x - x_0) + \frac{p^2}{4} &= (x - x_0)^2 - p(x - x_0) + \frac{p^2}{4} + (y - y_0)^2 \end{aligned}$$

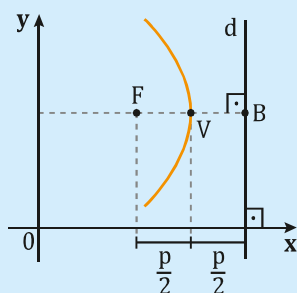
$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$



Imagens: Zapt

Há três outras equações de parábolas que surgem em função das posições relativas entre a diretriz e os eixos coordenados e da localização do foco em relação à diretriz.

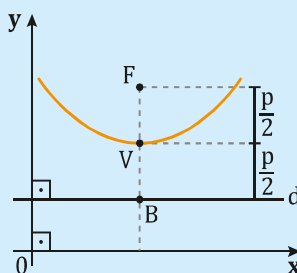
Diretriz paralela ao eixo y e foco à esquerda da diretriz



$$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$$

em que o vértice é $V(x_0, y_0)$, o foco é $F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right)$ e a diretriz tem equação $x = x_0 + \frac{p}{2}$.

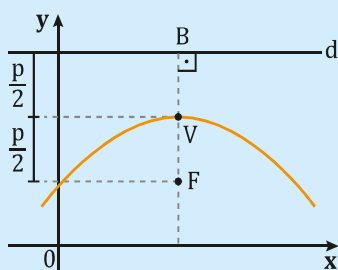
Diretriz paralela ao eixo x e foco acima da diretriz



$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

em que o vértice é $V(x_0, y_0)$, o foco é $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$ e a diretriz tem equação $y = y_0 - \frac{p}{2}$.

Diretriz paralela ao eixo x e foco abaixo da diretriz

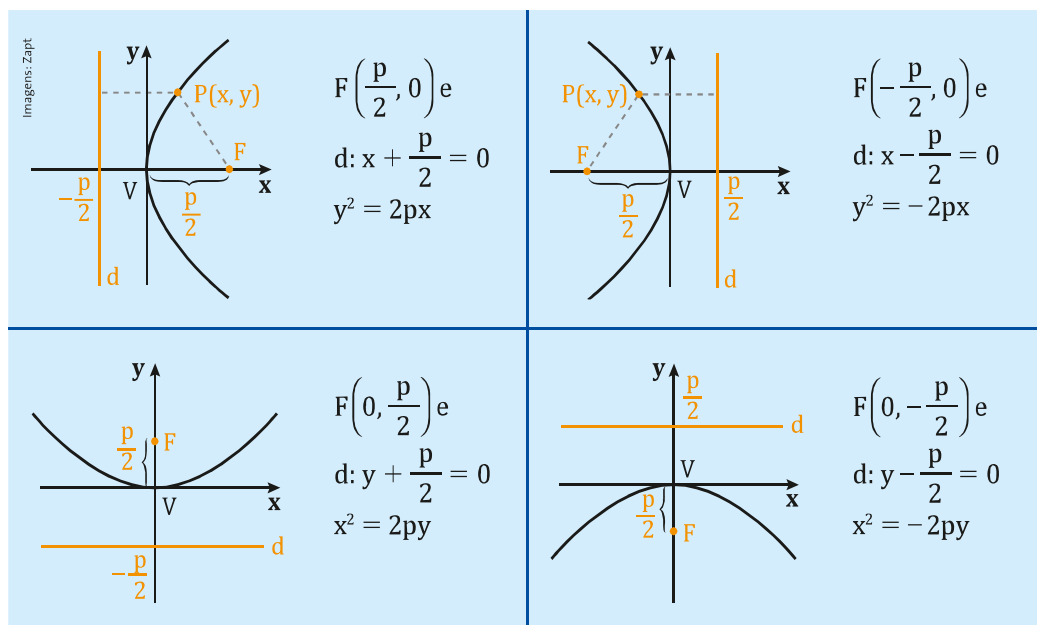


$$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$$

em que o vértice é $V(x_0, y_0)$, o foco é $F\left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right)$ e a diretriz tem equação $y = y_0 + \frac{p}{2}$.

Casos particulares

Se considerarmos as equações anteriores no caso em que as parábolas têm vértice na origem e foco em um dos eixos coordenados, teremos estes casos particulares.



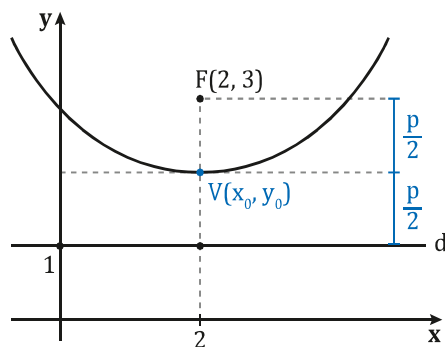
Observe que apenas nos dois últimos casos as parábolas correspondem a gráficos de funções quadráticas $y = \frac{x^2}{2p}$ e $y = -\frac{x^2}{2p}$, respectivamente.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R7. Obtenha a equação da parábola de foco $F(2, 3)$ e diretriz $d: y = 1$.

Resolução

Dos dados, concluímos que o gráfico é deste tipo.



Temos:

$$p = d_{FV} \Rightarrow p = 2$$

$$V(2, 2)$$

Substituindo em $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, obtemos:

$$(x - 2)^2 = 4(y - 2)$$

Outro modo:

Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer da parábola; da definição dessa curva, obtemos:

$$\begin{aligned} d_{PF} &= d_{Pd} \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \frac{|y-1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = (y-1)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 - 6y + 9 = y^2 - 2y + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x-2)^2 = 4y - 8 \Rightarrow (x-2)^2 = 4(y-2) \end{aligned}$$

R8. Determine as coordenadas do vértice V e do foco F e a equação da diretriz d das parábolas.

a) $(x - 6)^2 = 8(y - 3)$

b) $(y + 3)^2 = -6(x - 2)$

Resolução

a) Da equação da parábola $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, concluímos que:

$$p = 4, x_0 = 6, y_0 = 3 \Rightarrow V(6, 3)$$

$$F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right) \Rightarrow F(6, 5)$$

$$d: y = y_0 - \frac{p}{2} \Rightarrow y = 1$$

b) Da equação $(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$, concluímos que:

$$p = 3, x_0 = 2, y_0 = -3 \Rightarrow V(2, -3)$$

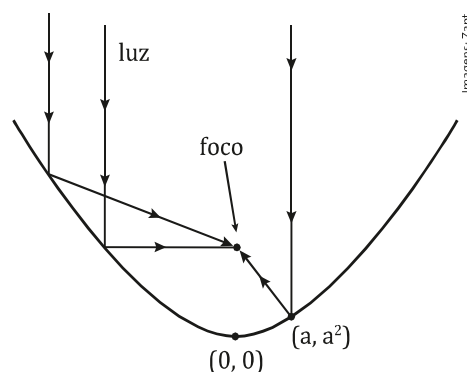
$$F\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right) \Rightarrow F\left(\frac{1}{2}, -3\right)$$

$$d: x = x_0 + \frac{p}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

15. Obtenha a equação da parábola, dados o foco **F** e a diretriz **d**.
- a) $F(5, 2)$, $d: x = 1$ c) $F(1, 3)$, $d: y = 1$
 b) $F(-5, -1)$, $d: x = 1$ d) $F(-2, -5)$, $d: y = -1$
16. Obtenha a equação da parábola que passa por **P**, tem vértice na origem e eixo de simetria \overline{VF} nestes casos.
- a) $\overline{VF} = \text{eixo } x$ e $P(9, 6)$ b) $\overline{VF} = \text{eixo } y$ e $P(1, 1)$
17. Determine o foco e a diretriz e esboce o gráfico das parábolas.
- a) $y^2 = 6x$ b) $x^2 = -y$
18. Determine o vértice, o foco e a equação da diretriz das parábolas.
- a) $y = x^2 - 4x + 2$ b) $y = -\frac{x^2}{2} - 2x + 1$
19. Reveja o quadro que mostra as equações das parábolas, analise a atividade 18 e então responda: em que condições a equação de uma parábola corresponde a uma função quadrática?
20. Um arquiteto precisa fazer em uma construção um arco parabólico que tenha 3 m de altura e 4 m de largura na base. O vértice da parábola está no topo do arco.

- a) A que altura, sobre a base, o arco terá 2 m de largura?
 b) Faça um desenho desse arco.

21. (UFPR) Alguns telescópios usam espelhos parabólicos, pois essa forma geométrica reflete a luz que entra para um único ponto, chamado foco. O gráfico de $y = x^2$, por exemplo, tem a forma de uma parábola. A luz que vem verticalmente, de cima para baixo (paralelamente ao eixo **y**), encontra a parábola e é refletida segundo a lei de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. Essa lei implica que os raios de luz verticais, encontrando a parábola no ponto (a, a^2) , serão refletidos na direção da reta $4ay + (1 - 4a^2)x = a$.



Sendo assim, calcule o ponto em que os raios de luz verticais refletidos em $(1, 1)$ e $(2, 4)$ se encontrarão.

PALAVRAS-CHAVE

- Cônicas
- Elipse
- Hipérbole
- Parábola

O que você aprendeu sobre elas?

Faça no caderno um resumo das principais ideias, ilustrando com exemplos e figuras.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

1. (Insper-SP) Os espaços retangulares onde são indicados os algarismos no mostrador de um relógio digital são compostos por sete barras luminosas, que podem estar acesas ou não, dependendo do algarismo que está sendo representado. A figura a seguir mostra as barras luminosas que ficam acesas na representação de cada um dos dez algarismos do nosso sistema de numeração.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Como o relógio só indica as horas e os minutos, o mostrador possui apenas quatro espaços retangulares para representar os algarismos. Assim, ao longo de um dia, o

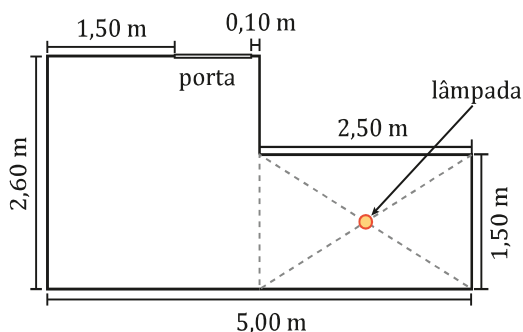
relógio faz 1440 indicações diferentes de horários, começando por 00:00 e terminando em 23:59.

Dependendo do horário indicado no relógio, o número total de barras luminosas que estão acesas é diferente. Por exemplo, às 13:00, o total de barras luminosas acesas é dado por $2 + 5 + 6 + 6$, ou seja, 19. Ao longo de um dia, pode-se observar 25 das 28 barras luminosas simultaneamente acesas por um total de

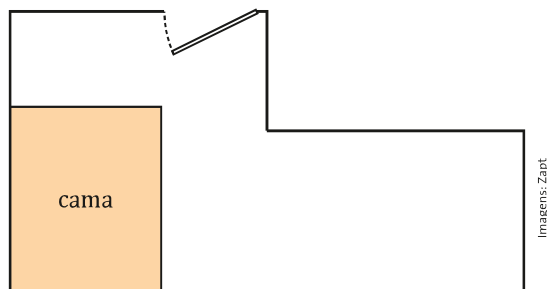
- a) 2 minutos. c) 5 minutos. e) 9 minutos.
 b) 3 minutos. d) 6 minutos.

2. (OBMEP) A figura a seguir mostra a planta do quarto do Pinhão. Todos os ângulos entre paredes são retos e a porta tem 90 cm de largura. Nessa questão, não consideramos a espessura das paredes.

- a) Uma lâmpada foi colocada no teto, na posição indicada na figura. Qual parte do chão não será iluminada diretamente por essa lâmpada e qual a área dessa parte?



- b) A cama do Pinhão mede 2,00 m por 1,60 m e foi colocada na posição indicada na figura abaixo. Nessa situação, é possível abrir a porta sem que ela toque na cama? Por quê?



CÁLCULO RÁPIDO

REGISTRE
NO CADERNO



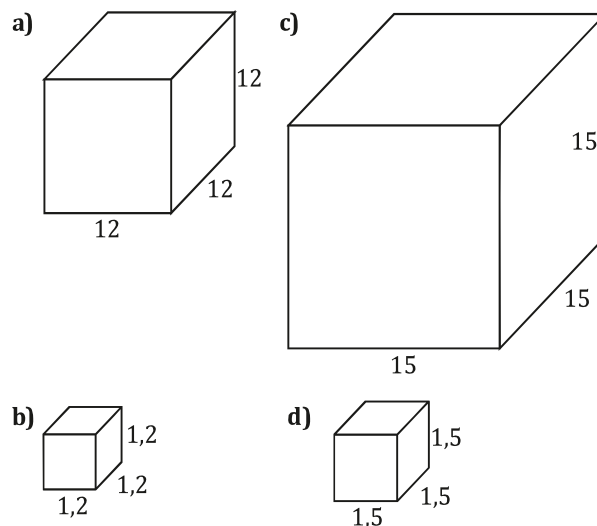
- Determine as soluções de cada equação.

a) $\frac{2x-1}{x-1} = 3$	d) $x \cdot (x+4) = 0$
b) $2^{x-1} = 2^4$	e) $x^2 - 9 = 0$
c) $9^{x+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$	f) $5x^2 + 20 = 0$
- Quais dos números a seguir são raízes da função $f(x) = x^3 - x$?

a) -2	c) 0	e) 2
b) -1	d) 1	
- Quanto vale cada uma das expressões a seguir quando $x = -1$?

a) $x + 1$	c) $x^3 + x^2 + x + 1$
b) $x^2 + x + 1$	d) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

4. Calcule o volume de cada cubo a seguir.



Recomendamos que este **Aprender a aprender** seja feito em grupos de 4 estudantes. Pode ser em aula ou como trabalho extraclasse. Os estudantes precisarão de livros didáticos do 2º ano (podem usar a biblioteca) e de dicionário.

APRENDER A APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Geometria métrica espacial

Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela é uma das competências que se espera que você desenvolva ao longo das aulas de Matemática. Vamos ver como andam seus conhecimentos geométricos?

Leia a questão a seguir, mas não a resolva de imediato.

- Liste no caderno as palavras que não conhece e as ideias matemáticas que precisa saber para resolver.
- O quadro-resumo apresentado na página seguinte auxilia a resolver esse problema? Como?
- Agora, resolva o problema.

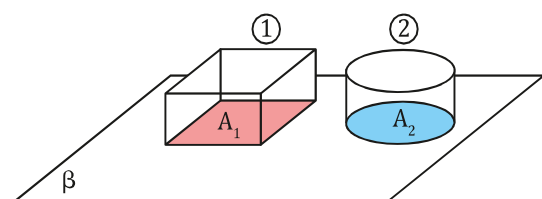
(Enem-MEC) Em uma padaria, há dois tipos de forma de bolo, formas 1 e 2, como mostra a figura a seguir.

Resolução:

Volume do cubo: L^3

Volume do cilindro: $\pi \cdot r^2 \cdot h$

Igualdade entre os volumes



Sejam L o lado da base da forma quadrada, r o raio da base da forma redonda, A_1 e A_2 as áreas das bases das formas 1 e 2, e V_1 e V_2 os seus volumes, respectivamente. Se as formas têm a mesma altura h , para que elas comportem a mesma quantidade de massa de bolo, qual é a relação entre r e L ?

a) $L = r$

b) $L = 2r$

c) $L = r\sqrt{\pi}$

d) $L = \frac{(\pi r^2)}{2}$

Volume do cubo = volume do cilindro $L^3 = \pi \cdot r^2 \cdot h$

* Como as alturas são iguais, temos que $L = h$

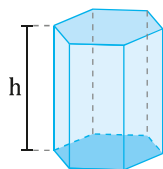
$$L^3 = \pi \cdot r^2 \cdot L \Rightarrow \frac{L^3}{L} = \pi \cdot r^2 \Rightarrow L^2 = \pi \cdot r^2 \Rightarrow \sqrt{L^2} = \sqrt{\pi \cdot r^2} \Rightarrow L = r \cdot \sqrt{\pi}$$

Resposta: alternativa c.

Figuras geométricas espaciais

Veja o quadro-resumo com algumas das principais relações métricas de figuras geométricas espaciais, especificamente: prismas, pirâmides, cone, cilindro e esfera.

I. Prisma

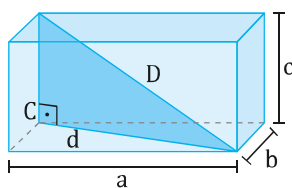


Sendo: $\begin{cases} V: \text{Volume.} \\ A_T: \text{Área total.} \\ A_B: \text{Área da base.} \\ A_L: \text{Área lateral.} \\ h: \text{Altura.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 1) & V = A_B \cdot h \\ 2) & A_T = A_L + 2 \cdot A_B \end{aligned}$$

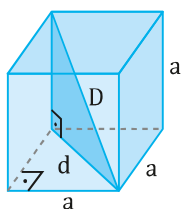
Casos especiais

• Paralelepípedo retângulo



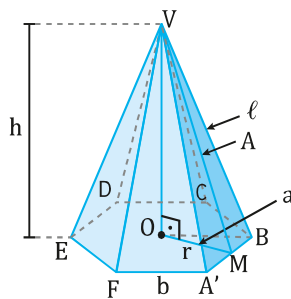
$$\begin{aligned} 1) & V = a \cdot b \cdot c \\ 2) & A_T = 2 \cdot (ab + ac + bc) \\ 3) & D^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

• Cubo



$$\begin{aligned} 1) & V = a^3 \\ 2) & A_T = 6a^2 \\ 3) & A_L = 4a^2 \\ 4) & D = a \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

II. Pirâmide



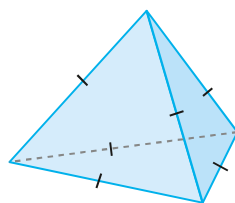
(pirâmide regular)

Sendo: $\begin{cases} A: \text{altura de uma face lateral.} \\ r: \text{Raio do círculo inscrito.} \\ R: \text{Raio do círculo circunscrito.} \\ h: \text{Altura.} \\ \ell: \text{Aresta lateral.} \\ b: \text{Aresta de base.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 1) & A^2 = h^2 + r^2 \\ 2) & \ell^2 = A^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ 3) & \ell^2 = h^2 + R^2 \\ 4) & V = \frac{A_B \cdot h}{3} \\ 5) & A_T = A_L + A_B \end{aligned}$$

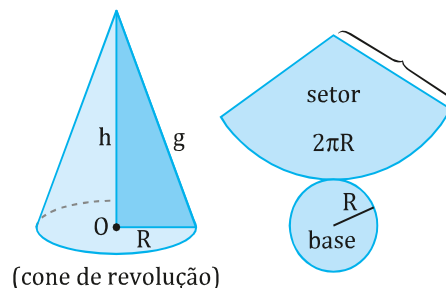
Caso especial

• Tetraedro regular



$$\begin{aligned} 1) & h = \frac{b \cdot \sqrt{3}}{6} \\ 2) & V = \frac{b^3 \cdot \sqrt{3}}{12} \\ 3) & A_T = b^2 \cdot \sqrt{3} \end{aligned}$$

III. Cone

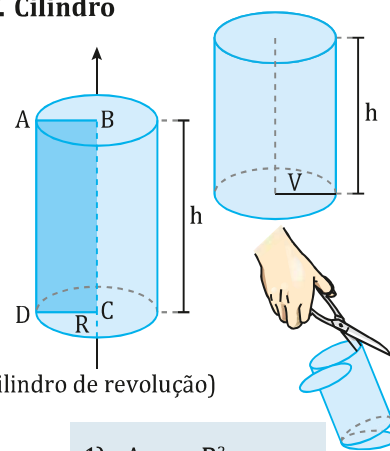


(cone de revolução)

Sendo: $\begin{cases} g: \text{geratriz.} \\ R: \text{raio da base.} \\ h: \text{altura.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} 1) & g^2 = h^2 + R^2 \\ 2) & A_B = \pi R^2 \\ 3) & A_L = \pi Rg \\ 4) & A_T = A_L + A_B \\ 5) & V = \frac{A_B \cdot h}{3} \end{aligned}$$

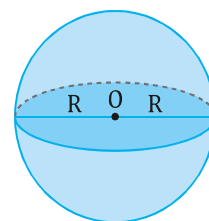
IV. Cilindro



(cilindro de revolução)

$$\begin{aligned} 1) & A_B = \pi R^2 \\ 2) & A_L = 2\pi R \cdot h \\ 3) & A_T = A_L + 2 \cdot A_B \\ 4) & V = A_B \cdot h \end{aligned}$$

V. Esfera



Sendo R raio da esfera

$$\begin{aligned} 1) & A = 4\pi R^2 \\ 2) & V = \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

I. Caso por caso, leia o quadro-resumo que acompanha cada figura geométrica e veja se compreende o que está descrito. Se tiver dúvidas, consulte um livro ou recorra ao dicionário. Registre no caderno as explicações para cada figura geométrica.

II. Por que o cubo e o paralelepípedo retângulo são casos especiais do prisma?

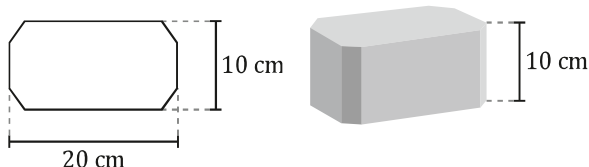
Agora é com você. Resolva os próximos exercícios para recordar e ampliar os conhecimentos e as habilidades geométricas. Se achar necessário, amplie o registro feito no caderno.

Antes de iniciar os exercícios a seguir, esclareça as possíveis dúvidas dos estudantes.

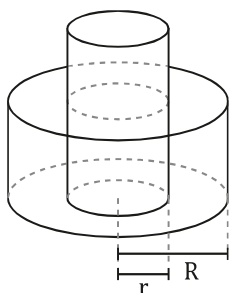
ATIVIDADES

REGISTRE
NO CADERNO

1. (UFJF-MG) Uma empresa de sorvete utiliza como embalagem um prisma reto, cuja altura mede 10 cm e cuja base é dada conforme descrição a seguir: de um retângulo de dimensões 20 cm por 10 cm, extrai-se em cada um dos quatro vértices um triângulo retângulo isósceles de catetos de medida 1 cm.

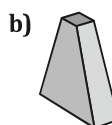
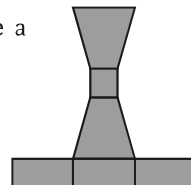
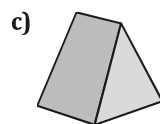
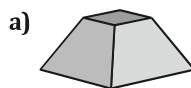


- a) Calcule o volume da embalagem.
- b) Sabendo que o volume ocupado por esse sorvete aumenta em $\frac{1}{5}$ (um quinto) quando passa do estado líquido para o estado sólido, qual deve ser o volume máximo ocupado por esse sorvete no estado líquido, nessa embalagem, para que, ao congelar, o sorvete não transborde?
2. (Enem-MEC) Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio r e altura h_1 , e o outro de raio R e altura h_2 . O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro. Se $R = \sqrt{2}$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$, e, para encher o cilindro do meio, foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários:



- a) 20 minutos c) 40 minutos e) 60 minutos
b) 30 minutos d) 50 minutos

3. A planificação ao lado corresponde a qual dos sólidos a seguir?



4. (Fuvest-SP) Em um tetraedro regular de lado a , a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a:

a) $a\sqrt{3}$

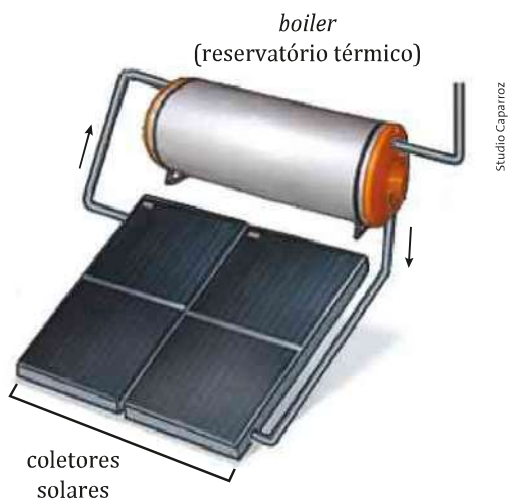
d) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

b) $a\sqrt{2}$

e) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

5. (UFU-MG) Ao assistir a uma reportagem na TV sobre o impacto do crescimento demográfico nos recursos hídricos, o Sr. José decidiu adotar medidas que auxiliam na preservação de recursos naturais. Ele construiu um reservatório para captação de água da chuva e também instalou um aquecedor solar em sua residência. O sistema de aquecimento solar é composto de coletores solares (placas) e um reservatório térmico chamado *boiler*, o qual tem o formato de um cilindro circular reto, como mostra a figura abaixo.

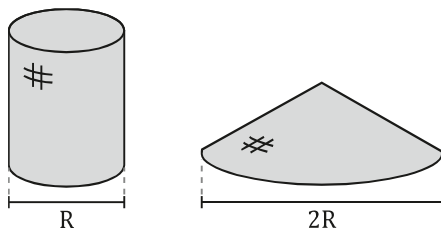


Por sua vez, foi escolhido e construído um reservatório para a captação de água da chuva na forma de um prisma reto cuja base é um quadrado. Sabe-se que:

- o lado da base do prisma (que corresponde ao reservatório) mede 2 metros e o raio da base do cilindro (que corresponde ao *boiler*) mede $\frac{1}{2}$ metro;
- a área lateral do prisma (reservatório) é igual ao dobro da área lateral do cilindro (*boiler*).

A partir das considerações acima, redija um texto que relacione o volume do reservatório e o volume do *boiler*. Utilizando-o, estabeleça o valor da razão (volume do reservatório) / (volume do *boiler*).

6. (Unicamp-SP) Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-o sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escoou, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.

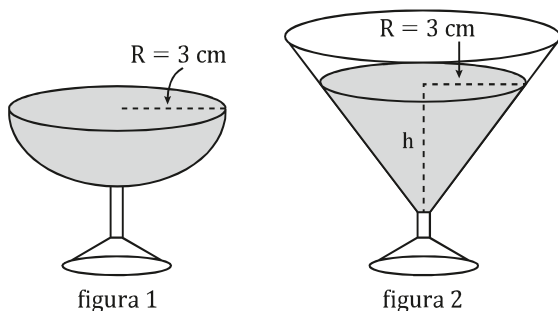


A altura do cone formado pela areia era igual a:

- a) $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro.
b) $\frac{1}{2}$ da altura do cilindro.
c) $\frac{2}{3}$ da altura do cilindro.
d) $\frac{1}{3}$ da altura do cilindro.

7. (Enem-MEC) Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



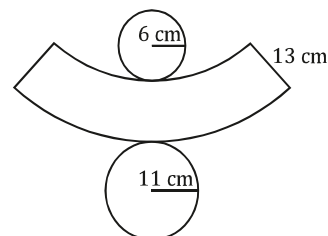
Considere:

$$V_{\text{esfera}} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ e } V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de:

- a) 1,33 c) 12,00 e) 113,04
b) 6,00 d) 56,52

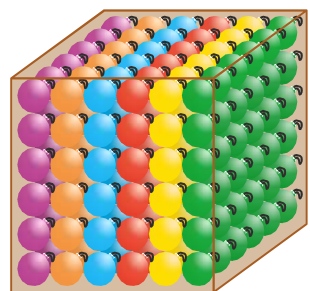
8. (Aman-RJ) A figura a seguir representa a planificação de um tronco de cone reto com a indicação das medidas dos raios das circunferências das bases e da geratriz. A medida da altura desse tronco de cone é:



Desenho fora de escala.

- a) 13 cm c) 11 cm e) 9 cm
b) 12 cm d) 10 cm

9. Uma indústria vai embalar bolas para árvore de Natal em caixas cúbicas conforme a figura.

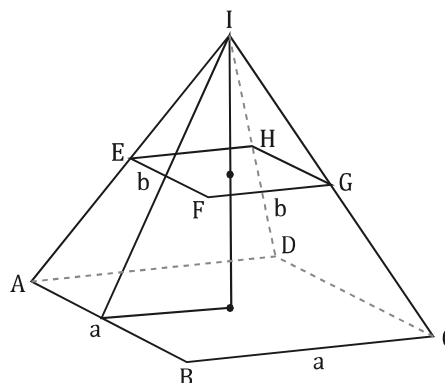


Na caixa, as bolinhas se tangenciam e tangenciam as paredes da embalagem. Se cada bolinha tem 3 cm de raio, qual deve ser o volume interno da caixa para conter as bolinhas?

10. (PUC-RS) O metrônomo é um relógio que mede o tempo musical (andamento). O metrônomo mecânico consiste num pêndulo oscilante, com a base fixada em uma caixa com a forma aproximada de um tronco de pirâmide, como mostra a foto.



Na representação a seguir, **a** é o lado da base maior, **b** é o lado da base menor e **V** é o volume do tronco de pirâmide ABCDEFGH. Se $a = 4b$ e **p** é o volume total da pirâmide ABCDI, então:



- a) $V = \frac{3}{4}p$ c) $V = \frac{15}{16}p$ e) $V = \frac{63}{64}p$
b) $V = \frac{3}{16}p$ d) $V = \frac{15}{64}p$

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

A leitura do texto verbal e de imagens é uma exigência constante na resolução de problemas geométricos.

Alguns desses problemas trazem desenhos técnicos de figuras geométricas, outros desenhos de situações nas quais o leitor deve “ver” alguma figura geométrica e deduzir uma informação ou propriedade para responder ao problema.

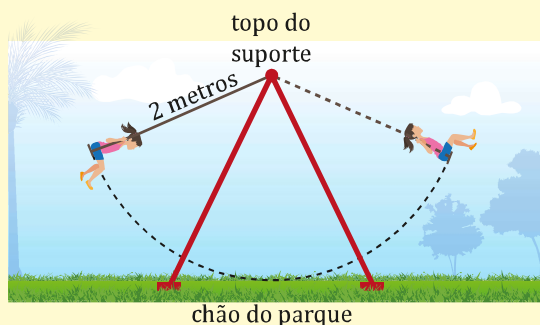
Esse é o caso da questão a seguir. Na ilustração que acompanha o texto você terá que desenhar sobre ela tudo que julgar necessário para obter a resolução.

Tente resolver o problema por si mesmo e, depois, acompanhe os passos para resolvermos juntos o problema.

ENEM EM CONTEXTO

1. (Enem-MEC) A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.

Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.



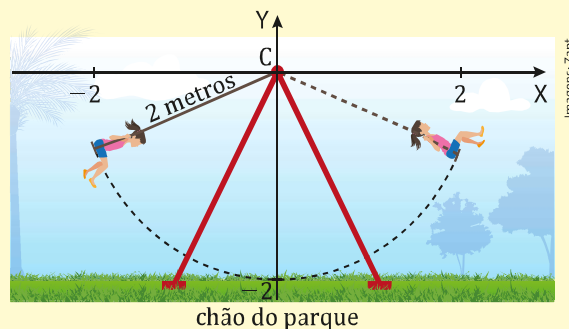
A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função.

- a) $f(x) = -\sqrt{2-x^2}$
- b) $f(x) = \sqrt{2-x^2}$
- c) $f(x) = x^2 - 2$
- d) $f(x) = -\sqrt{4-x^2}$
- e) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

Resolução

Passo 1: Observe que ao balançar a curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico de circunferência.

Passo 2: Vamos traçar os eixos cartesianos, conforme o enunciado, para visualizar o centro $C(0, 0)$, já que a origem está localizada no topo do suporte do balanço e sendo, portanto, o raio da circunferência $r = 2$.



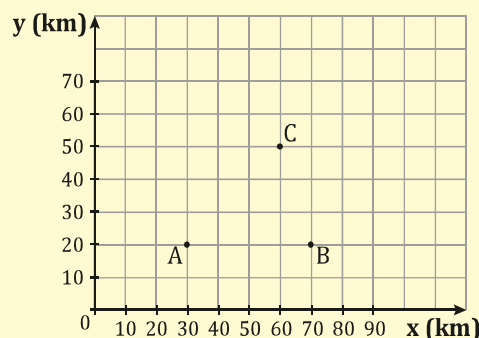
Passo 3: Sabemos que a equação da circunferência é $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Logo, a equação dessa circunferência será $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Passo 4: Deixando Y em função de X , temos $y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2}$

Passo 5: Analisando a situação do problema, percebemos que a trajetória está abaixo do eixo Ox , logo $y < 0$, portanto consideraremos somente $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

Alternativa d.

2. (Enem-MEC) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas **A**, **B** e **C**, já existentes nessas cidades. As localizações das cidades estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um ponto equidistante das três antenas. O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas.

- a) (65; 35) b) (53; 30) c) (45; 35) d) (50; 20) e) (50; 30)

Resolução

A torre deve ser construída em um ponto (**P**) equidistante simultaneamente aos pontos A(30, 20), B(70, 20) e C(60, 50). O ponto **P** pertence à mediatriz dos segmentos AB, AC e BC.

Observando-se o desenho e as coordenadas dos pontos **A** e **B**, a mediatriz de \overline{AB} passa pela coordenada $x = 30 + \frac{70}{2} = 50$, daí $x_p = 50$.

Como o ponto **P** também deve ser equidistante aos pontos **A** e **C**, faz-se $d_{PA} = d_{PC}$

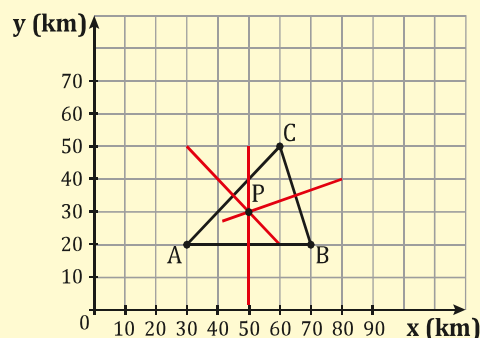
Logo:

$$\sqrt{(50 - 30)^2 + (y_p - 20)^2} = \sqrt{(50 - 60)^2 + (y_p - 50)^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e resolvendo, temos: $60y_p = 1800$ e $y_p = 30$.

Logo, o ponto **P** tem coordenadas (50, 30).

Alternativa e.



Propomos agora mais duas questões para que você leia e desenhe em busca da resposta correta.

ATIVIDADES



1. (Enem-MEC) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I — é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

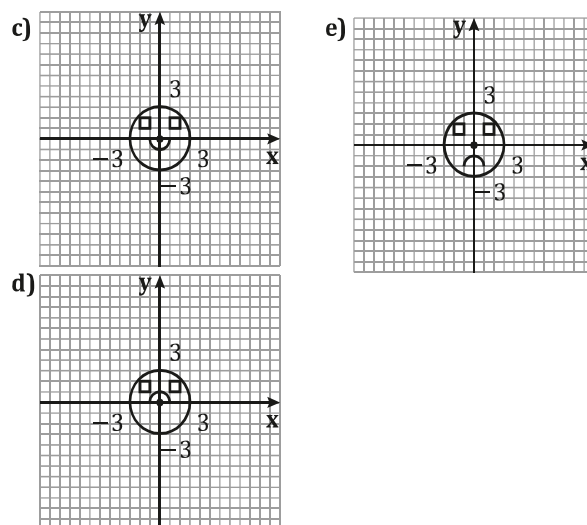
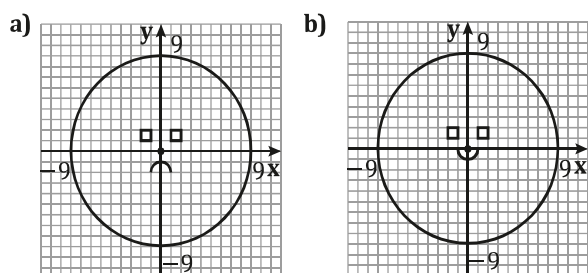
II — é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1 ;

III — é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ e $(-2, 2)$;

IV — é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$;

V — é o ponto $(0, 0)$.

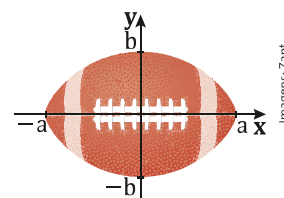
A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura. Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?



2. (Enem-MEC) A figura representa a vista superior de uma bola de futebol americano cuja forma é um elipsoide obtido pela rotação de uma elipse em torno do eixo das abscissas. O valor de **a** e **b** são, respectivamente, a metade do seu comprimento horizontal e a metade do seu comprimento vertical. Para essa bola, a diferença entre os seus comprimentos horizontal e vertical é igual a metade do seu comprimento vertical.

Considere que o volume aproximado dessa bola é dado por $V = 4ab^2$ e calcule esse valor:

- a) $8b^3$ d) $4b^3$
b) $6b^3$ e) $2b^3$
c) $5b^3$



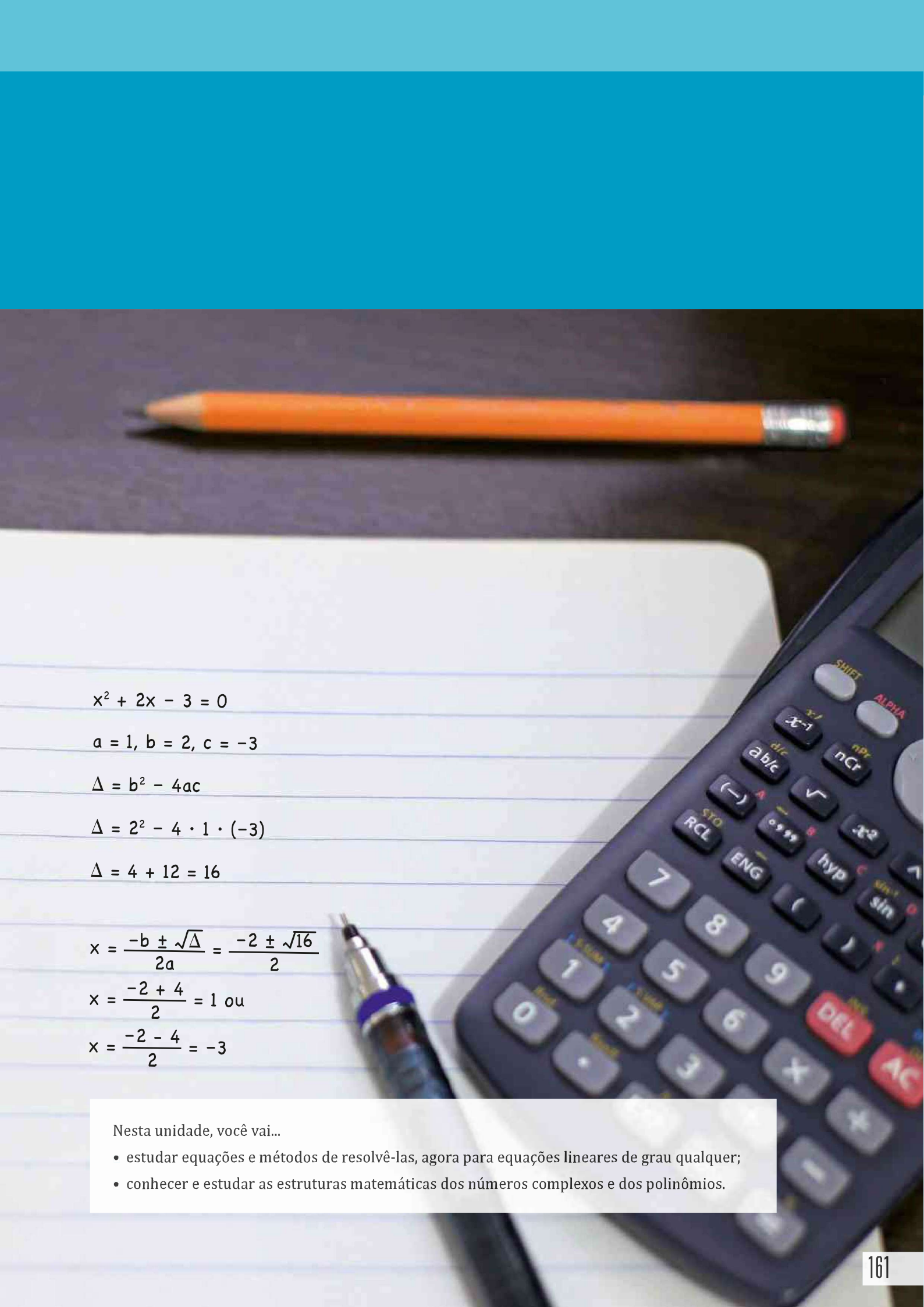
Imagens: Zap

Polinômios, números complexos e equações polinomiais

Há quanto tempo
você estuda
Álgebra? Você já
pensou sobre isso?

Você já aprendeu a resolver e a aplicar em problemas equações do 1º e do 2º graus. Ainda que originalmente o termo “álgebra” refira-se a equações, essa palavra hoje tem um significado muito mais amplo e você já se deparou com o estudo de estruturas matemáticas como as operações entre matrizes e entre funções.

Jales Valquer/Fotoarena


$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \text{ ou}$$

$$x = \frac{-2 - 4}{2} = -3$$

Nesta unidade, você vai...

- estudar equações e métodos de resolvê-las, agora para equações lineares de grau qualquer;
- conhecer e estudar as estruturas matemáticas dos números complexos e dos polinômios.

8

Estudo de polinômios

No eixo Álgebra, este e os dois próximos capítulos se relacionam estreitamente. Sugerimos que, sempre que possível, eles sejam associados a conhecimentos anteriores dos estudantes, mostrando que: o que eles vão estudar sobre polinômios é um aprofundamento do que já estudaram no Ensino Fundamental e em funções; os números complexos surgiram para resolver equações que não podem ser resolvidas no campo dos números reais e permitem ampliar o estudo para resolver equações de grau n ; na divisão de polinômios estão presentes as mesmas ideias da divisão euclidiana de números naturais.

Você conhece a origem da palavra “álgebra”?

Álgebra é uma variante latina da palavra árabe *al-jabr* que aparece no título de um livro escrito por volta do ano 825, em Bagdá, pelo matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi.

O significado de seu nome é Maomé, filho de Moisés, de Khwarizmi. Esse nome é um indício de que esse brilhante homem da antiguidade, ou a sua família, era originário de Khwarizmi, a região ao sul do mar Aral, parte da antiga Pérsia ocupada pelos árabes, atualmente parte do Uzbequistão. Al-Khwarizmi foi um dos primeiros matemáticos a trabalhar na Casa da Sabedoria, em Bagdá, durante o reinado do califa al-Mamum (813-833).

O título de seu livro era *Hisab al-jabr w'al-muqabala*, que pode ser traduzido como “ciência da restauração (ou reunião) e redução”.

Al-jabr é a operação que consiste em transpor termos negativos, adicionando termos iguais a ambos os membros da equação. Veja um exemplo: aplicando-se *al-jabr* à equação $x^2 + 2x + 7 = 7 - 4x + 2x^3$, tem-se $x^2 + 6x + 7 = 7 + 2x^3$.

Já *al-muqabala* é o cancelamento de termos semelhantes em membros opostos da equação; assim, o exemplo anterior $x^2 + 6x + 7 = 7 + 2x^3$, por *al-muqabala*, torna-se $x^2 + 6x = 2x^3$.

Já imaginou a contribuição desse matemático em um tempo em que a linguagem algébrica que você conhece hoje levaria séculos para ser desenvolvida?

Nos próximos três capítulos deste volume, vamos retomar o estudo da Álgebra, escolhendo como temas os polinômios e as equações de grau maior que 2.

Observe a seguir, em uma situação simples, como os polinômios podem estar presentes em nosso cotidiano.

Uma empresa de telefonia possui 20 000 usuários, que pagam uma taxa básica de R\$ 20,00 por mês. A empresa resolveu fazer uma promoção durante alguns meses, diminuindo R\$ 0,25 do valor da taxa, a cada mês. Observou-se que, a cada desconto de R\$ 0,25 na taxa, 500 novos usuários passavam a utilizar os serviços da empresa.

Vamos exprimir o valor mensal arrecadado pela companhia telefônica após x meses de promoção.

Após x meses, o número de usuários é: $20\,000 + 500x$.

O valor da taxa básica, após x meses, é: $20 - 0,25x$.

O total arrecadado, em função de x , é:

$$A(x) = (20\,000 + 500x) \cdot (20 - 0,25x)$$

$$A(x) = 400\,000 + 10\,000x - 5\,000x - 125x^2$$

$$A(x) = 400\,000 + 5\,000x - 125x^2$$

A expressão obtida para a arrecadação total, ao final de cada mês da promoção, é chamada de **polinômio**.

As expressões $400\,000$, $5\,000x$ e $125x^2$ são chamadas de **monômios**.



Selo postal de 1983 com o retrato de Al-Khwarizmi.

Ivan Vdovin/Alamy/Fotostore

Situe-se

Neste capítulo, você poderá observar como a Matemática estuda cada novo conceito. São apresentados os polinômios e são investigadas suas propriedades para entender como eles se relacionam com as operações e com a resolução de problemas algébricos.

1 Polinômios

Vamos iniciar nosso estudo pelos monômios.

Um **monômio** de uma variável é o produto de uma constante não nula **a** por uma variável **x** elevada a um número natural **n**.

Um monômio é da forma **axⁿ**, em que **a** é o coeficiente do monômio, $a \in \mathbb{R}^*$, **n** é o grau do monômio e **xⁿ** é a parte literal, $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos:

- a) $9x$ é monômio de grau 1 e seu coeficiente é 9.
- b) $-5y^3$ é monômio de grau 3 e seu coeficiente é -5.
- c) $\frac{1}{2}x^2$ é monômio de grau 2 e seu coeficiente é $\frac{1}{2}$.
- d) 5 é monômio de grau 0 ($5 = 5x^0$) e seu coeficiente é 5.
- e) $-x^4$ é monômio de grau 4 e seu coeficiente é -1.
- f) $\sqrt{2}x^7$ é monômio de grau 7 e coeficiente $\sqrt{2}$.

Já as expressões algébricas $\frac{1}{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\sin x^2$ são alguns exemplos de **não** monômios.

Dois monômios com a mesma parte literal são chamados de **semelhantes** e podem ser adicionados ou subtraídos, resultando um único monômio, reduzindo os termos semelhantes.

Na situação inicial descrita na abertura deste capítulo, os monômios $10\,000x$ e $-5\,000x$ são semelhantes; por isso foi feita a simplificação: $10\,000x - 5\,000x = 5\,000x$.

A soma algébrica de **dois monômios** não semelhantes chama-se **binômio**; a de **três monômios** não semelhantes entre si chama-se **trinômio**.

Exemplos:

- a) $x^4 - 2x$ é binômio.
- b) $4x^3 + 6x + 1$ é trinômio.

De modo geral, dizemos que monômios, ou sua soma algébrica, formam um **polinômio**.

A expressão $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_1 x + a_0$, com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ números reais, $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \neq 0$, é chamada de **polinômio** de grau **n** na variável **x**. Os monômios $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, \dots, a_1 x, a_0$ são os **termos** do polinômio.

Exemplos:

- a) $10x^6 - 15x^5 + 20x^4$ (tem grau 6)
- b) $x^4 + 3x^3 - 2x + 1$ (tem grau 4)
- c) $20x + 6\,000$ (tem grau 1 ou é de 1º grau)
- d) $2t^3 - t^2 - t - 3$ (tem grau 3 ou é de 3º grau)

Mais sobre polinômios

- Quando todos os coeficientes da expressão que define um polinômio são iguais a zero, ele é chamado de **polinômio nulo**, ou **identicamente nulo**, e, nesse caso, não se define seu grau.

Exemplo:

$$0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

FIQUE CONECTADO

Leia "Gênios de outro planeta", mais um capítulo do livro *A vida secreta dos números*, de George G. Szpiro (Difel), e conheça um pouco da vida e da obra de alguns matemáticos do século XIX que deram contribuições importantes para a ciência atual.

- Normalmente, para escrever um polinômio, colocamos os monômios que o compõem em ordem decrescente de grau.

Exemplos:

a) $x^2 + 3x + 5$

b) $6x^6 + 3x^5 - 8x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{5}x^2 - x + 3$

c) $5x^7 - \frac{1}{6}x^5 - \sqrt{2}x$

- Diz-se que um polinômio de grau n é **completo** quando ele possui, em seus termos, monômios de todos os graus menores ou iguais a n .

Exemplos:

a) $2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 1$ é completo.

b) $24x^5 + 8x^3 - 6x^2 - 7x$ é incompleto, pois faltam monômios de grau 4 e de grau 0.

- O valor que se obtém ao substituir a variável de um polinômio por um número real qualquer chama-se **valor numérico** do polinômio.

Exemplo:

O valor numérico de $x^3 - 2x^2 - x + 2$, que obtemos quando fazemos $x = 1$, é:

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 2 = 0.$$

Se fizermos $x = -2$, teremos $(-2)^3 - 2(-2)^2 - (-2) + 2 = -12$; o valor numérico do polinômio para $x = -2$ é -12 .

Dois polinômios **A** e **B** são iguais, ou idênticos entre si, se assumem valores numéricos iguais para todo $x \in \mathbb{R}$. Indicamos $A = B$.

Relacione a definição de igualdade entre polinômios à definição, já conhecida dos estudantes de igualdade entre funções.

Exemplos:

a) $x^3 - 2x + 3 = ax^3 - bx + 3$, se $a = 1$ e $b = -2$

b) $4x^2 + mx + 5 = ax^2 + 6x + b$, se $a = 4$, $m = 6$ e $b = 5$

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

- R1.** Escreva um polinômio completo do 3º grau, sabendo que, ordenado segundo as potências decrescentes de x , seus coeficientes são, respectivamente: 2; -1 ; $0,5$ e $\sqrt{2}$.

Resolução

O polinômio é da forma $\dots x^3 + \dots x^2 + \dots x + \dots$.

Colocando os coeficientes nos respectivos lugares, temos:

$$2x^3 - x^2 + 0,5x + \sqrt{2}$$

- R2.** Determine o grau do polinômio

$$(m^2 - 1)x^3 + (m + 1)x^2 + nx + 5 \text{ em função de } m \text{ e } n.$$

Resolução

O grau do polinômio depende dos coeficientes $m^2 - 1$ de x^3 , $m + 1$ de x^2 e n de x .

Se $m^2 - 1 \neq 0$, o polinômio é de grau 3 e n pode ser qualquer valor.

Se $m^2 - 1 = 0$, então $m = +1$ ou $m = -1$ e, daí:

$m + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$ e o grau do polinômio será 2, ou

$m + 1 = (-1) + 1 = 0$ e o grau do polinômio dependerá de n .

Nesse caso, para $n = 0$, o polinômio é de grau zero; e, para $n \neq 0$, o polinômio é de grau 1.

Resumindo:

Se $m \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, o polinômio tem grau 3, independentemente do valor de n .

- Se $m = 1$, o polinômio tem grau 2, qualquer que seja n .

- Se $m = -1$ e $n \neq 0$, o grau do polinômio é 1.

- Se $m = -1$ e $n = 0$, o grau do polinômio é zero.



1. Quais das seguintes expressões representam um polinômio em x ?

- a) $5x^3 - 0,6x + \sqrt{3}$
b) $6x^2 + x^{-1} - 2$
c) $\frac{5}{3}x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 6$
d) 13
e) $\sqrt[3]{x} + x - 1$
f) $x^2 - 5x^{\frac{1}{2}} + 2$

2. Copie o quadro no caderno e complete-o.

Polinômio	Número de termos	Grau	Valor numérico para $x = -1$	Escrita ordenada segundo as potências decrescentes de x	Coefficiente do termo de maior grau	Coefficiente de x^2
$x - x^5 + 1$						
$2 - x^3 + x - \sqrt{2}$						
$x^2 - \sqrt{3}x + 5$						
$x - x^2$						
$x^4 - x^2 + x^3$						
$-1 - x$						
5						
0						

3. Um polinômio tem grau 4 e está ordenado segundo as potências decrescentes de x . Expresse-o sabendo que seus coeficientes são:

- a) $\sqrt{2}; \pi; -2; -0,5; 5$
b) $2\pi; 0; 0; 0; \sqrt{3}$

4. O que mudaria na atividade 3 se os polinômios estivessem ordenados segundo as potências crescentes de x ?

5. Calcule o valor numérico dos polinômios.

- a) $t^2 - 6t + 10$, para $t = 2$
b) $x^4 - 5x^2 + 3x - 9$, para $x = -3$
c) $m^3 - 9m$, para $m = 1$ e $m = -1$

6. Determine, a seguir, o grau de cada polinômio em x , em função de $m \in \mathbb{R}$.

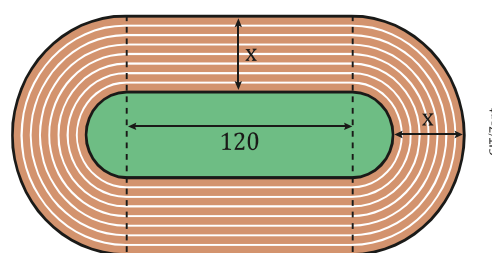
- a) $(m - 2)x^3 + mx^2 + 4x - 1$
b) $mx^4 + mx^2 + mx + m$
c) $(m^2 - 4)x^3 + (m - 2)x^2 + m + 2$
d) $(m^2 + 1)x^2 + 2mx + m$

7. Indique o grau de cada polinômio a seguir em função de $m \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}$.

- a) $(2m + 1)x^2 - 3x + 2$
b) $(m - 8)x^3 - 3mx^2 + 2px + p - 1$
c) $(3p + p^2)x^3 - 3px^2 + x + \pi$

8. As respostas à atividade 7 são modificadas se impusermos a condição de que os polinômios dados sejam completos?

9. Observe a pista de atletismo a seguir.



O perímetro interior da pista é 400 m. Calcule o raio das semicircunferências menores e a área da pista em função de x .

10. Seja o polinômio $x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1$. Calcule seu valor numérico quando:

- a) $x = 1$
b) $x = -1$
c) $x = 2$
d) $x = \frac{1}{2}$

Para a atividade 10, retome como calcular a soma dos termos de uma P.G.

INVENTE VOCÊ



1. Dê exemplos de expressões algébricas que não correspondem a polinômios.

Ao elaborar um contraexemplo é possível avaliar a compreensão do estudante sobre um conceito ou procedimento, neste caso, sobre o conceito de polinômio.

2 Função polinomial

Vamos continuar nosso estudo tratando de funções polinomiais.

Dados os números reais $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0, n \in \mathbb{R}$, a função P , de \mathbb{R} em \mathbb{R} , definida por:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

é denominada **função polinomial** ou simplesmente **polinômio**.

Os números $a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \dots, a_1 x$ e a_0 são os **termos** ou **monômios**; $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ são os **coeficientes** de P , e x é a **variável real** dessa função.

Já conhecemos várias funções polinomiais e todas elas têm domínio \mathbb{R} :

$f(x) = 0$ é função nula;

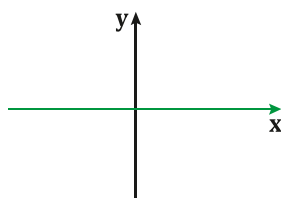
$f(x) = k$ é função constante;

$f(x) = a_1 x + a_0, a_1 \neq 0$, é função do 1º grau ou afim;

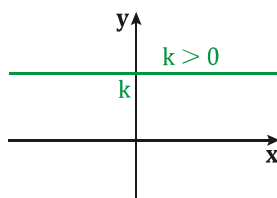
$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, a_2 \neq 0$, é função do 2º grau ou quadrática.

Os gráficos dessas funções são dos tipos a seguir.

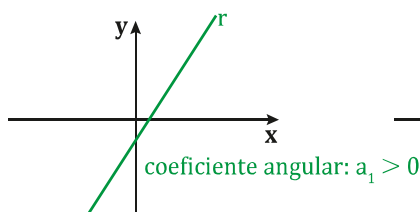
Função nula



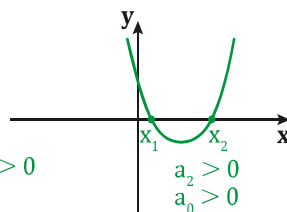
Função constante



Função do 1º grau

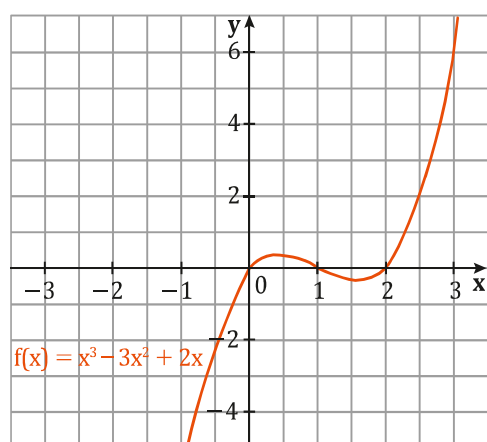


Função quadrática

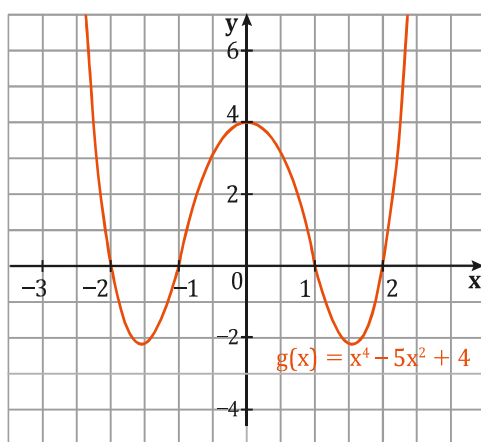


O estudo de polinômios permite aprofundar o conceito de funções para as de grau maior que 2. Observe abaixo os esboços dos gráficos cartesianos das funções $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ e $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$.

x	-1	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	-6	0	0,375	0	-0,375	0



x	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2
g(x)	0	-2,1875	0	4	0	-2,1875	0



Imagens: Zapt

A **raiz** ou **zero** de uma função polinomial, ou polinômio,
 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, é o número real c , tal que $P(c) = 0$.

Analisando os gráficos do exemplo na página anterior, podemos verificar que:

- os zeros ou raízes de **f** são 0, 1 e 2;
- os zeros ou raízes de **g** são -2, -1, 1 e 2.

Podemos também relembrar algumas definições sobre funções:

- se x_1 e x_2 são valores quaisquer pertencentes a um intervalo **I** contido no domínio de uma função **f** e:
para todo $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, dizemos então que **f** é **crescente** em **I**; ou
para todo $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, nesse caso dizemos que **f** é **decrecente** em **I**;
- ponto de máximo local** é um ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, em que $f(x_0)$ é o maior valor que a função assume em um intervalo **I** do domínio;
- analogamente, **ponto de mínimo local** é um ponto de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, em que $f(x_0)$ é o menor valor que a função assume em um intervalo **I** do domínio.

Analisando o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, temos:

- f** é crescente, por exemplo, em $]0; 0,4[$ e em $]2, +\infty[$.
- f** é decrescente, por exemplo, em $]0,5; 1,5[$.
- um ponto de máximo local de **f** está entre 0 e 1.
- um ponto de mínimo local de **f** está entre 1 e 2.

Quanto a $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$, observamos que:

- g** é crescente, por exemplo, em $]-1, 0[$.
- g** é decrescente, por exemplo, em $]0; 1,5[$.
- g** tem um ponto de mínimo local entre -2 e -1 e outro entre 1 e 2.
- g** tem um ponto de máximo local em 0.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R3. De um prisma quadrangular regular, em que a aresta da base mede x e a altura mede 3, foi cortado um cubo de aresta x .

- Expresse a função que dá o volume $V(x)$ da parte restante do prisma, em função de x .
- Quais são as raízes da função?
- Qual é o domínio dessa função?
- Esboce o gráfico da função.
- Para que valores de x o volume do prisma é maior que 2 e menor que 4?
- O que significa $V(x) = 0$? E o que significa $V(x) = 4$?

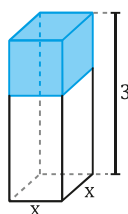
Resolução

- Podemos fazer um desenho representando os dados da atividade.

Para calcular o volume procurado, basta subtrairmos o volume do cubo cortado do volume total do prisma.

$$V(x) = 3x^2 - x^3$$

- As raízes da função podem ser obtidas fazendo:



$$3x^2 - x^3 = 0$$

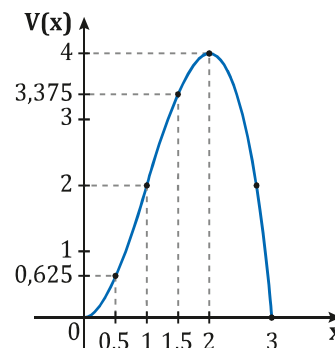
$$x^2(3 - x) = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } 3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$$

- O domínio da função é dado pelo intervalo $[0, 3]$.

- Podemos esboçar o gráfico atribuindo alguns valores a x .

x	$V(x)$
0	0
0,5	0,625
1	2
1,5	3,375
2	4
3	0



Imagens: BIS

- Analisando o gráfico, vemos que $2 < V(x) < 4$ para x entre 1 e, aproximadamente, 2,7.
- $V(x) = 0$ significa que o cubo cortado coincide com o próprio prisma de base quadrangular. $V(x) = 4$ é o volume máximo que pode ter o sólido resultante.



11. Um campo retangular tem comprimento $2x - 1$ e largura $x + 5$, em metros.
- Indique uma expressão para o perímetro e uma para a área.
 - Qual é o grau dos polinômios obtidos?
 - Calcule os zeros das funções.
 - Interprete o que significam os zeros dessas funções em relação ao campo.
12. O sr. João gastou R\$ 100,00 em x caixas de sabão em pó num supermercado. Ele quer vender todas as caixas em seu mercadinho e obter um lucro de R\$ 2,50 por caixa.
- Expresse, em função de x , o preço, em reais, de cada caixa no mercado do sr. João.
 - Quanto dinheiro entrou no mercadinho do sr. João quando ele vendeu todas as caixas? Expresse em função de x .
 - Justifique por que uma das expressões obtidas em a ou b não é um polinômio.
13. Luiz e Cristina fizeram uma viagem de carro de 500 km e revezaram-se na direção. Cristina guiou x km e Luiz, o dobro; depois, Cristina guiou mais 100 km e Luiz dirigiu

o resto da viagem. Expresse, em função de x , a última etapa do trajeto feita por Luiz.

14. Uma arquiteta está projetando um móvel em forma de paralelepípedo. Pelos seus cálculos, a medida da área da base, em cm^2 , é dada por $x^2 + 5x$, e as medidas, em cm, dos comprimentos da base e da altura do móvel são, respectivamente, $x + 5$ e $2x - 40$. Sabendo que o móvel será em madeira, responda às questões.
- Quais são os valores que x pode assumir?
 - Qual é a expressão, em função de x , que dá o perímetro da face da frente do móvel?
 - Quais são as expressões que dão, em função de x , a largura e o volume do móvel?
 - Quais as dimensões do móvel para que a área do tampo seja de $1\,800\text{ cm}^2$?
15. Mostre que -1 é raiz de $P(x) = x^{2n+1} + x^{2n} + x + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
16. Um polinômio P do 1º grau satisfaz as condições $P(2) = -2$ e $P(-3) = 13$. Determine P e a raiz de P .
17. Um polinômio P de grau 2 satisfaz as condições $P(0) = 2$, $P(-1) = 12$ e $P(2) = 6$. Determine P e suas raízes.

Essa é uma proposta mais complexa e pode demandar mais tempo para ser realizada. Sugerimos que os estudantes possam realizá-la em duplas ou trios. Avalie as produções dos estudantes e verifique a qualidade da produção escrita por eles em termos da linguagem matemática que utilizam. Escolha alguns desses problemas para discutir e resolver no coletivo da classe.

INVENTE VOCÊ

REGISTRE
NO CADERNO

2. Imagine um monumento em forma de cilindro. Elabore um problema que envolva o volume (V) e o raio (r) em uma função, além do domínio da relação $V(r)$ e utilize a tabela a seguir.

r	0	1	1,5	2	10
V					

Reveja a atividade R3: ela pode auxiliá-lo.

3 Operações com polinômios

Como os polinômios são funções com expressões particulares, para eles podemos definir as mesmas operações que para as funções. No entanto, por serem polinômios, a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão entre eles possuem algumas características. Vejamos:

Sejam os polinômios $A(x) = x^2 - 2x + 3$ e $B(x) = 2x^3 - 5x^2 - 1$.

- $A(x) + B(x) = (x^2 - 2x + 3) + (2x^3 - 5x^2 - 1) = x^2 - 2x + 3 + 2x^3 - 5x^2 - 1 = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 2$
- $A(x) - B(x) = (x^2 - 2x + 3) - (2x^3 - 5x^2 - 1) = x^2 - 2x + 3 - 2x^3 + 5x^2 + 1 = -2x^3 + 6x^2 - 2x + 4$
- $A(x) \cdot B(x) = (x^2 - 2x + 3) \cdot (2x^3 - 5x^2 - 1) = x^2 \cdot 2x^3 - x^2 \cdot 5x^2 - x^2 \cdot 1 - 2x \cdot 2x^3 + 2x \cdot 5x^2 + 2x \cdot 1 + 3 \cdot 2x^3 - 3 \cdot 5x^2 - 3 \cdot 1 = 2x^5 - 5x^4 - x^2 - 4x^4 + 10x^3 + 2x + 6x^3 - 15x^2 - 3 = 2x^5 - 9x^4 + 16x^3 - 16x^2 + 2x - 3$
Observe que $A \cdot B$ tem grau 5.

É importante chamar a atenção dos estudantes para o fato de que analisar as operações entre polinômios é um procedimento já conhecido por eles. Destaque também que esse é um procedimento característico no estudo de qualquer novo conceito em Matemática, ou seja, assim que definimos um novo conceito algébrico (função, matrizes, polinômios, números complexos), investigamos como ele se relaciona com as operações já conhecidas, de adição, subtração, multiplicação etc.

Temos, então:

Adição: a soma de dois ou mais polinômios é um polinômio cujos termos são a soma algébrica dos termos semelhantes dos polinômios que estão sendo somados.

Subtração: a diferença de dois polinômios é o polinômio que obtemos adicionando um polinômio ao oposto do outro:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

O grau do polinômio soma ou diferença é menor ou igual aos graus de **P** e de **Q**.

Multiplicação: o produto de dois polinômios é um polinômio que obtemos multiplicando cada termo do primeiro polinômio por todos os termos do segundo e adicionando os produtos obtidos.

O grau do polinômio produto é igual à soma dos graus dos polinômios fatores.

Por sua vez, a divisão de polinômios possui uma definição própria:

Divisão

Efetuar a divisão de um polinômio **A** por um polinômio **B** é determinar um polinômio **Q** e um polinômio **R**, tais que:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \text{ com grau}(R) < \text{grau}(B), \text{ ou } R = 0$$

Denotamos:

A: dividendo; **B**: divisor; **Q**: quociente; **R**: resto.

Quando $R = 0$, dizemos que a divisão é **exata**.

Para o cálculo da divisão de polinômios, vamos apresentar três métodos.

Método da chave

Esse algoritmo baseia-se na divisão de números naturais. Dividindo, por exemplo, 489 por 21, temos:

$$\begin{array}{r} 489 \quad | \quad 21 \\ \underline{42} \\ 69 \\ \underline{63} \\ 6 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 489 \quad | \quad 21 \\ \underline{-42} \\ 69 \\ \underline{-63} \\ 6 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r} 489 \quad | \quad 21 \\ \underline{-42} \\ 69 \\ \underline{-63} \\ 6 \end{array}$$

$$489 = 21 \cdot 23 + 6 \quad (6 < 21)$$

Essa divisão pode ser feita na forma polinomial:

$$489 = 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

$$21 = 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 \quad | \quad 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 \\ \underline{-4 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^1} \quad \underline{2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0} \\ 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 \quad \underline{23} \\ \underline{-6 \cdot 10^1 - 3 \cdot 10^0} \\ 6 \cdot 10^0 \\ \underline{6} \end{array}$$

A seguir apresentamos três métodos para a divisão de polinômios. Contudo, nosso objetivo é que os estudantes saibam como se encontram o quociente e o resto da divisão de dois polinômios, e não conhecer os métodos de divisão em si mesmos.

Com os polinômios, a ideia é a mesma. Acompanhe os exemplos abaixo.

- a) Dividir $P(x) = 4x^2 + 8x + 9$ por $D(x) = 2x + 1$ (compare com a divisão de 489 por 21):

$$4x^2 + 8x + 9 \quad \overline{) 2x + 1}$$

Dividindo o 1º termo ($4x^2$) de **P** pelo 1º termo ($2x$) de **D**, obtemos o 1º termo ($2x$) do quociente **Q**. Subtraindo de $P(x)$ o produto de $2x$ por $D(x)$, temos o 1º resto parcial $R_1(x)$:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 8x + 9 \quad \overline{) 2x + 1} \\ -4x^2 - 2x \quad \underline{2x} \\ R_1(x) = 6x + 9 \end{array}$$

Como $\text{grau}(R_1) = \text{grau}(D)$, repetimos o processo obtendo o 2º termo ($+3$) de $Q(x)$ e o 2º resto parcial $R_2(x)$:

$$\begin{array}{r} 4x^2 + 8x + 9 \quad \overline{) 2x + 1} \\ -4x^2 - 2x \quad \underline{2x + 3} \\ 6x + 9 \\ -6x - 3 \quad \underline{ 6} \end{array}$$

Como $\text{grau}(R_2) < \text{grau}(D)$, a divisão de **P** por **D** encerra-se aqui e tem quociente $2x + 3$ e resto 6.

- b) Dividir $P(x) = 3x - 6x^2 + 8x^4 - 2$ por $D(x) = -3x + 2x^2 + 2$.

Inicialmente, devemos ordenar os termos de $P(x)$ e $D(x)$ segundo potências decrescentes de **x**, completando, se necessário, $P(x)$:

$$8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + 3x - 2 \quad \overline{) 2x^2 - 3x + 2}$$

Dividindo o 1º termo ($8x^4$) de **P** pelo 1º termo ($2x^2$) de **D**, obtemos o 1º termo ($4x^2$) do quociente **Q**; subtraindo de $P(x)$ o produto de $4x^2$ por $D(x)$, temos o 1º resto parcial $R_1(x)$:

$$\begin{array}{r} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + 3x - 2 \quad \overline{) 2x^2 - 3x + 2} \\ -8x^4 + 12x^3 - 8x^2 \quad \underline{4x^2} \\ R_1(x) = 12x^3 - 14x^2 + 3x - 2 \end{array}$$

Como $\text{grau}(R_1) > \text{grau}(D)$, repetimos o processo, obtendo o 2º termo ($+6x$) de $Q(x)$ e o 2º resto parcial $R_2(x)$:

$$\begin{array}{r} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + 3x - 2 \quad \overline{) 2x^2 - 3x + 2} \\ -8x^4 + 12x^3 - 8x^2 \quad \underline{4x^2 + 6x} \\ 12x^3 - 14x^2 + 3x - 2 \\ -12x^3 + 18x^2 - 12x \quad \underline{ 6x - 2} \\ R_2(x) = 4x^2 - 9x - 2 \end{array}$$

Como $\text{grau}(R_2) = \text{grau}(D)$, repetimos o processo, obtendo o 3º termo ($+2$) de $Q(x)$ e o 3º resto parcial $R_3(x)$:

$$\begin{array}{r} 8x^4 + 0x^3 - 6x^2 + 3x - 2 \quad \overline{) 2x^2 - 3x + 2} \\ -8x^4 + 12x^3 - 8x^2 \quad \underline{4x^2 + 6x + 2} \\ 12x^3 - 14x^2 + 3x - 2 \\ -12x^3 + 18x^2 - 12x \quad \underline{ 4x^2 - 9x - 2} \\ 4x^2 - 9x - 2 \\ -4x^2 + 6x + 4 \quad \underline{ -3x - 6} \\ R_3(x) = -3x - 6 \end{array}$$

Como $\text{grau}(R_3) < \text{grau}(D)$, o processo está finalizado, com:

$$Q(x) = 4x^2 + 6x + 2 \quad \text{e} \quad R(x) = -3x - 6$$

O grau do quociente de polinômios

O grau do quociente é a diferença dos graus de **P** e **D** porque:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x), \text{ com } \text{grau}(R) < \text{grau}(D), \text{ ou } R = 0$$

Então, $\text{grau}(D \cdot Q) = \text{grau}(P)$, mas $\text{grau}(D \cdot Q) = \text{grau}(D) + \text{grau}(Q) = \text{grau}(P)$.
Logo:

$$\text{grau}(Q) = \text{grau}(P) - \text{grau}(D)$$

Método de Descartes (dos coeficientes a determinar)

Esse processo de divisão fundamenta-se nas seguintes ideias:

- o grau do quociente corresponde à diferença entre o grau do dividendo e o do divisor;
- o resto **R** é nulo ou tem grau menor que o divisor (que é a própria ideia de divisão).

Vamos dividir o polinômio $P(x) = 6x^4 - 2x^3 + 8x^2 + x - 4$ por $D(x) = 3x^2 - x + 1$.

O grau do quociente **Q** é 2 porque é a diferença entre o grau do dividendo (4) e o do divisor (2). Logo, $Q(x)$ é da forma $ax^2 + bx + c$ e $a = 2$, pois $6x^4 : 3x^2 = 2x^2$.

O grau do resto é no máximo 1; logo, $R(x) = dx + e$, com **d** e **e** a serem determinados.

Como $D(x) \cdot Q(x) + R(x) = P(x)$, temos:

$$(3x^2 - x + 1)(ax^2 + bx + c) + (dx + e) = 6x^4 - 2x^3 + 8x^2 + x - 4$$

$$3ax^4 + (3b - a)x^3 + (3c - b + a)x^2 + (-c + b + d)x + c + e = 6x^4 - 2x^3 + 8x^2 + x - 4$$

Então:

$$\begin{cases} 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \\ 3b - a = -2 \Rightarrow b = 0 \\ 3c - b + a = 8 \Rightarrow c = 2 \\ -c + b + d = 1 \Rightarrow d = 3 \\ c + e = -4 \Rightarrow e = -6 \end{cases}$$

Portanto, $Q(x) = 2x^2 + 2$ e $R(x) = 3x - 6$.

Divisão de um polinômio por um binômio do 1º grau

As divisões de polinômios por binômios, como $x - 2$, $x + \frac{3}{2}$, $x + 5$, surgem em problemas de Matemática mais frequentemente do que quaisquer outras divisões de polinômios e desempenham papel importante na pesquisa de zeros de funções, na resolução de equações etc.

O quociente e o resto da divisão de um polinômio **P** por um binômio do tipo $x - a$ podem ser obtidos através de um dispositivo prático, conhecido como **divisão sintética** ou **algoritmo de Briot-Ruffini**.

Esse algoritmo consiste em efetuar a divisão fazendo cálculos apenas com os coeficientes. Acompanhe o exemplo a seguir.

Dividir $A(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $x - 2$ pelo método de Descartes, visto anteriormente.

$$\begin{array}{r} 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ R \end{array} \quad \begin{array}{l} x - 2 \\ \hline ax^3 + bx^2 + cx + d \end{array}$$

em que R é uma constante, porque grau $(R) < 1$; portanto grau $(R) = 0$ ou $R = 0$:

$$3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = (ax^3 + bx^2 + cx + d)(x - 2) + R$$

$$3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = ax^4 - 2ax^3 + bx^3 - 2bx^2 + cx^2 - 2cx + dx - 2d + R$$

$$3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1 = ax^4 + (b - 2a)x^3 + (c - 2b)x^2 + x(d - 2c) - 2d + R$$

Daí:

$$a = 3$$

$$b - 2a = -2 \Rightarrow b = 4$$

$$c - 2b = 2 \Rightarrow c = 10$$

$$d - 2c = -1 \Rightarrow d = 19$$

$$-2d + R = 1 \Rightarrow R = 39$$

Então, temos $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 10x + 19$ e $R(x) = 39$.

Vejamos agora como funciona o dispositivo prático (acompanhe, comparando com o processo descrito anteriormente).

- a) Escrevemos os coeficientes do dividendo e a raiz do binômio (2); depois repetimos o primeiro coeficiente do dividendo.

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 3 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ \hline & 3 & & & & \end{array}$$

- b) Multiplicamos o primeiro coeficiente pela raiz e adicionamos o resultado ao segundo coeficiente para obter o segundo coeficiente do quociente.

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 3 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ \hline & 3 & 4 & & & \end{array}$$

- c) Repetimos o processo; o último número (39) é o resto da divisão e 3, 4, 10 e 19 são os coeficientes de $Q(x)$.

Assim, temos:

$$D(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$d(x) = x - 2 \text{ (divisor)}$$

$$Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 10x + 19$$

$$R(x) = 39$$

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & 3 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ \hline & 3 & 4 & 10 & 19 & 39 \end{array}$$

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

- R4.** Calcule o resto da divisão de $x^5 - 8x^3 + 10x$ por $x + 3$ usando o algoritmo de Briot-Ruffini.

Resolução

Escrevemos os coeficientes do dividendo e a raiz do binômio. Como o polinômio dado é incompleto, é necessário completá-lo com os coeficientes nulos ao aplicar o algoritmo.

$$\begin{array}{c|cccccc} -3 & 1 & 0 & -8 & 0 & 10 & 0 \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccccc} -3 & 1 & 0 & -8 & 0 & 10 & 0 \\ \hline & 1 & -3 & 1 & -3 & 19 & -57 \end{array}$$

O quociente é $x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 19$.

O resto procurado é -57 .

R5. Determine o quociente e o resto da divisão de $2x^4 - 4x^3 - x + 2$ por $2x - 1$.

Resolução

Apesar de o divisor não ser da forma $x - a$, é possível aplicar o dispositivo de Briot-Ruffini, já que $2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$, nesse caso, a raiz do binômio é $\frac{1}{2}$.

Assim, temos:

$\frac{1}{2}$	2	-4	0	-1	2
	2	-3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{9}{8}$

O quociente de $2x^4 - 4x^3 - x + 2$ por $x - \frac{1}{2}$ é:

$$2x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{4},$$
 mas, para obtermos o quociente de
$$2x^4 - 4x^3 - x + 2 \text{ por } 2\left(x - \frac{1}{2}\right), \text{ fazemos:}$$

$$\frac{2x^3 - 3x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}}{2} = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8} \text{ e o resto é } \frac{9}{8}.$$

R6. Determine m e n para que o polinômio

$P(x) = 6x^3 - mx^2 + 4x - n$ seja divisível por

$$D(x) = x^2 + 4x + 6.$$

Observe que, para resolver esta atividade, o método de Briot-Ruffini não se aplica.

Resolução

Dividindo $P(x)$ por $D(x)$ pelo método da chave, temos:

$$\begin{array}{r} 6x^3 - mx^2 + 4x - n \\ \underline{-6x^3 - 24x^2 - 36x} \\ -(m+24)x^2 - 32x - n \\ \underline{+(m+24)x^2 + 4(m+24)x + 6(m+24)} \\ R(x) = (4m+64)x + 6m - n + 144 \end{array}$$

Devemos ter:

$$R(x) = 0, \text{ para todo } x \text{ real} \Rightarrow (4m + 64)x + 6m - n + 144 = 0,$$

$$\text{para todo } \mathbf{x} \text{ real} \Rightarrow \begin{cases} 4m + 64 = 0 \\ 6m - n + 144 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $m = -16$ e $n = 48$.

Outro modo:

Pelo método de Descartes, temos

$$\begin{array}{r} 6x^3 - mx^2 + 4x - n \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} x^2 + 4x + 6 \\ \hline 6x + a \end{array}$$

Então:

$$\begin{aligned} 6x^3 - mx^2 + 4x - n &\equiv (x^2 + 4x + 6)(6x + a) \\ 6x^3 - mx^2 + 4x - n &\equiv 6x^3 + (a + 24)x^2 + (4a + 36)x + 6a \end{aligned}$$

Identificando os coeficientes, vem:

$$\begin{cases} -m = a + 24 & (1) \\ 4 = 4a + 36 & (2) \\ -n = 6a & (3) \end{cases}$$

De (2), obtemos $a = -8$. Substituindo em (1) e (3), temos $m = -16$ e $n = 48$.

FOCO NA LEITURA

**REGISTRE
NO CADERNO**



De todas as operações entre polinômios, a divisão tem especial importância, porque permite o estudo de uma função polinomial pela sua decomposição em fatores na forma de polinômios do 1º ou do 2º graus. Isso será aprofundado no capítulo 10. Por enquanto, vale destacar que nas atividades envolvendo a divisão de polinômios são usados diversos termos que precisam ser bem entendidos e que têm seu significado semelhante aos dos termos usados na divisão entre números. São eles: divisor, dividendo, divisível e fatores. Vejamos alguns exemplos de atividades.

- Em uma divisão exata, o divisor é $x^2 - x + 1$ e o quociente é $x - 5$. Qual é o dividendo?
- Verifique se $P(x) = 2x^4 - 3x - 2x$ é divisível por $x - 2$.
- Decomponha $P(x) = 2x^2 - x - 3$ em fatores.

Para auxiliá-lo na leitura desses termos, vamos relembrar.

¹⁹⁾ Em uma divisão, os termos têm nomes específicos. Por exemplo, na divisão

$\begin{array}{r} 16 \overline{) 5} \\ \underline{3} \\ 1 \end{array}$, 16 é o dividendo, 5 é o divisor, 3 é o quociente e 1 é o resto da divisão.

E vale a relação $16 = 3 \cdot 5 + 1$, e o resto deve ser sempre menor que o divisor.

Na divisão de polinômios, vale o mesmo:

$$\begin{array}{r} P(x) \\ R(x) \overline{) Q(x)} \end{array}$$
, em que $P(x)$ é o dividendo, $D(x)$ é o divisor, $Q(x)$ é o quociente e $R(x)$ é o resto dessa divisão.

$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$ e $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$.

2º) Dizemos que 72 é divisível por 9, mas não é divisível por 5.

1. Investigue o significado dessa afirmação e escreva o que significa dizer que um polinômio **P** é divisível ou não é divisível por um polinômio **Q**.
2. Dê exemplos de polinômios em que um deles é divisível pelo outro e exemplos em que um deles não é divisível pelo outro.

3º) Quando escrevemos $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, temos que os números 2, 3 e 5 são fatores da decomposição do número 60 em números primos. Podemos dizer, também, que 2 e 30 são fatores de 60 ou, ainda, que 6 e 10 são fatores desse número.

3. Escreva então, com suas palavras, o significado do polinômio $x - 3$ ser um fator de $x^2 - 5x + 6$.

4. Generalize, escrevendo o que se entende ao afirmar que o polinômio em x , $A(x)$, é um fator de $P(x)$.

Utilize o que você escreveu sobre esta seção na resolução das próximas atividades e observe que ficou muito mais fácil ler os enunciados e entender o que deve ser feito para resolvê-las.

Ler exige conhecimento da linguagem específica.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



18. Dados os polinômios $A(x) = 2x - \frac{1}{2}$, $B(x) = x^2 - 3x + 2$,

$C(x) = x^3 - \frac{1}{2}x + x^2 + 1$, calcule:

- | | |
|------------------|-------------------------|
| a) $A(x) + B(x)$ | c) $A(x) - B(x) + C(x)$ |
| b) $B(x) - C(x)$ | d) $A(x) \cdot B(x)$ |

19. Expresse os resultados na forma de polinômios.

- a) $(x^2 - 4x + 3) + (x - 2x^3 + 5x^2)$
- b) $(x^2 - 4x + 3) - (x - 2x^3 + 5x^2)$
- c) $(x^3 - 7x^2 + 10) - (x^2 - 4x + 3) + (-x^3 + 5x^2 - 4x)$
- d) $(x + 1)(x + 3)$
- e) $(2x - 3)(x^2 - 5x)$
- f) $(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$

20. Após resolver as atividades 18 e 19, responda às questões a seguir.

- a) Que relação há entre o grau dos polinômios que são adicionados e o grau do polinômio que representa a soma?
- b) Que relação há entre o grau dos polinômios que estão sendo multiplicados e o grau do polinômio que representa o produto?

21. O polinômio **A** tem grau 5 e o polinômio **B** tem grau 4. Dê o grau de cada polinômio a seguir.

- | | | |
|------------|----------------|------------|
| a) $A + B$ | b) $A \cdot B$ | c) $A - B$ |
|------------|----------------|------------|

22. Mostre que:

- a) $P(x) = (2x + 1)(x - 2) - x(x - 3) - (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ é identicamente nulo.
- b) $A(x) = (x - 1)(x + 3) + x^2(x + 3) - x - 3$ e $B(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)$ são idênticos entre si.

23. Determine **a**, **b** e **c** para que o polinômio $P(x) = 2ax^2 + ax - bx + a + 6x^2 - 2x + c + 2$ seja identicamente nulo.

24. Determine **a**, **b** e **c** para que os polinômios $A(x) = a(x^2 - 2x) + b(x^2 - 4x + 2) + c$ e $B(x) = 2(x - 1)(2x - 1)$ sejam idênticos entre si.

25. Determine a condição para que $ax^2 + bx + c$ seja polinômio quadrado perfeito.

26. (UFJF-MG) Dados dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$, sabe-se que $S(x) = A(x) + B(x)$ é um polinômio de grau 8 e que $D(x) = A(x) - B(x)$ é um polinômio de grau 5. É correto afirmar:

- a) O polinômio $W(x) = B(x) - A(x)$ tem grau 8.
- b) Os polinômios $A(x)$ e $B(x)$ têm o mesmo grau.
- c) O polinômio $C(x) = A(x) \cdot B(x)$ tem grau 13.
- d) O polinômio $A(x)$ tem grau 5.
- e) O grau do polinômio $B(x)$ é menor que 7.

27. Divida **P** por **D** em cada caso.

- a) $P(x) = x^2 + 3x - 4$, $D(x) = x^2 - x - 1$
- b) $P(x) = x^2 + x + 1$, $D(x) = x^3 + 1$
- c) $P(x) = 6$, $D(x) = 2x + 1$

28. Os polinômios $2x + 3$ e $-x + 2$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão do polinômio P por $5x^2 - 4x + 1$. Determine $P(x)$.

29. Em uma divisão exata, o divisor é $x^2 - x + 1$ e o quociente é $2x^2 + 3$. Qual é o dividendo?

30. Mostre que o polinômio:

a) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ é divisível por $x - 2$.

b) $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + x + 6$ é divisível por $x + 2$.

31. Em cada item, divida P por D .

a) $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$, $D(x) = x - 3$

b) $P(x) = 4x^4 - x^3 + 2x - 3$, $D(x) = x - 2$

c) $P(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 1$, $D(x) = x + 2$

d) $P(x) = -6x^4 + 5x^3 - 4x - 3$, $D(x) = x + 1$

32. Divida P por D em cada caso.

a) $P(x) = 6x^3 - 11x^2 + 4x - 2$, $D(x) = 2x - 1$

b) $P(x) = 8x^3 + 2x^2 + x - 4$, $D(x) = 2x + 1$

c) $P(x) = 4x^4 - 16x^3 + 15x^2 - 8x + 8$, $D(x) = 4x - 2$

d) $P(x) = 5x^4 - 6x^2 + x + 6$, $D(x) = -x + 1$

33. O quadro a seguir é o algoritmo de Briot-Ruffini da divisão de um polinômio P por $D(x) = x - a$. Determine P , D e o quociente Q da divisão de P por D .

-2	6	c	-1	e	2	g
	6	-7	d	-30	f	-123

34. (IFSC) Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, o valor de $f(-3) + f(0) + f(f(-1))$ é:

- a) -20 b) -18 c) -16 d) 20 e) 16

INVENTE VOCÊ

Este **Invente você**, como os anteriores, permite sua avaliação sobre o que os estudantes entenderam sobre o que estudaram até aqui. Observe-os enquanto criam os exemplos e o exercício sobre divisão e registre eventuais dúvidas que precisem ser discutidas com toda a classe.

REGISTRE
NO CADERNO



3. Dê exemplos de dois polinômios de grau 4 cuja soma seja um polinômio de grau 3.

4. Elabore um exercício sobre divisão de polinômios cujo quociente seja $x^2 + 6x - 7$ e o resto não nulo.

Divisibilidade por $x - a$

Seja P um polinômio de grau n . A relação que traduz a divisão de P por $x - a$ é:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x)$$

Nessa relação, o grau de Q será $n - 1$ e R será nulo, ou polinômio de grau zero. Essa igualdade mostra que é possível calcular $R(x)$ sem efetuar a divisão.

De fato, substituindo x por a em ambos os membros da equação:

$$P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R(x), \text{ temos:}$$

$$P(a) = (a - a) \cdot Q(a) + R(a) \text{ ou } P(a) = R(a)$$

$$\text{Como } R(x) = 0 \text{ ou } R(x) = k, k \in \mathbb{R}^*,$$

$$P(a) = R(a) = 0 \text{ ou } P(a) = R(a) = k.$$

Daí concluímos que:

O resto da divisão do polinômio P por $x - a$ é $P(a)$.

A seguir, veja exemplos de aplicação dessa propriedade.

Sendo $P(x) = x^3 - x - 6$:

a) O resto da divisão de $P(x) = x^3 - x - 6$ por $x + 1$ é $P(-1)$.

Substituindo x por -1 , temos: $P(-1) = (-1)^3 - (-1) - 6 = -6$; logo, o resto é -6 .

b) O resto da divisão de $P(x)$ por $x - 3$ é $P(3) = 3^3 - 3 - 6 = 18$.

Já sabemos que um número a é raiz de um polinômio se $P(a) = 0$.

Se P é divisível por $x - a$, o resto da divisão é zero ou $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + 0$; logo, $P(a) = 0$ e a é raiz do polinômio.

Reciprocamente, se b é raiz de $P(x)$, então $P(b) = 0$ e o resto da divisão de P por $x - b$ é zero; logo, P é divisível por $x - b$. Assim:

Dizer que a é raiz de P equivale a dizer que P é divisível por $x - a$.



35. Sem efetuar a divisão, calcule o resto da divisão de $x^3 - 3x^2 - 4x + 6$ por:

- a) $x - 3$ c) $2x + 4$
b) $x + 2$ d) $3x + 1$

36. Sem efetuar as divisões:

- a) verifique se $2x^4 - 3x - 26$ é divisível por $x - 2$;
b) determine o valor de k para que $P(x) = x^3 - kx^2 - 2x - 4$ seja divisível por $x + 2$;
c) indique quais dos números $-2, 0, 1, 2$ e 3 são zeros de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

37. (UFTM-MG) Dividindo-se o polinômio $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + mx + 1$ por $(x - 1)$ ou por $(x + 1)$, os restos são iguais. Nesse caso, o valor de m é igual a:

- a) -2 b) -1 c) 1 d) 2 e) 3

38. (Fuvest-SP) O polinômio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 8$, em que a, b, c são números reais, tem o número complexo $1 + i$ como raiz, bem como duas raízes simétricas.

- a) Determine a, b, c e as raízes de $p(x)$.
b) Subtraia 1 de cada uma das raízes de $p(x)$ e determine todos os polinômios com coeficientes reais, de menor grau, que possuam esses novos valores como raízes.

4 Decomposição em fatores e resolução de equações polinomiais

A fatoração de polinômios é importante na resolução de equações e inequações com base na propriedade seguinte:

Se a e b são números reais tais que $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Exemplo:

Para achar as raízes de $P(x) = x^3 - x$, usamos o fato de que $x^3 - x = x(x + 1)(x - 1)$ e podemos determinar suas raízes utilizando a propriedade: se $x(x + 1)(x - 1) = 0$, então $x = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $x - 1 = 0$; logo: $x = 0, x = -1$ e $x = 1$ são as raízes de $x^3 - x = 0$.

Vimos anteriormente que, se P admite a raiz a , ele é divisível por $x - a$, ou seja, pode ser escrito como $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + 0$ ou $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$. Nesse caso, dizemos que a fatoração de $P(x)$ tem dois fatores.

Se P admite outra raiz b diferente de a , Q deve ser divisível por $(x - b)$ e teremos $P(x) = (x - a)(x - b) \cdot Q_1(x)$.

Então, se o polinômio tiver grau n , poderá ter no máximo n raízes r_1, r_2, \dots, r_n , e sua decomposição será:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_n)$$

em que a_n é o coeficiente do termo de mais alto grau.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R7. Mostre que -1 e $\frac{3}{2}$ são raízes de $P(x) = 2x^2 - x - 3$ e decompõe P em fatores.

Resolução

$$P(-1) = 2(-1)^2 - (-1) - 3 = 0$$

$$P\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} - 3 = 0$$

Logo, -1 e $\frac{3}{2}$ são raízes de P .

$P(x)$ admite, então, os fatores $x + 1$ e $x - \frac{3}{2}$, e escrevemos $P(x) = 2(x + 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

R8. Verifique que $A(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ admite as raízes $-2, 1$ e 2 e decompõe $A(x)$ em fatores.

Resolução

Se $-2, 1$ e 2 são raízes, $A(x)$ é divisível por $x + 2, x - 1$ e $x - 2$. Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, podemos confirmar isso.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & -2 & -8 & 8 \\ \hline & 2 & -6 & 4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -2 & -8 & 8 \\ \hline & 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -2 & -8 & 8 \\ \hline & 2 & 0 & -8 & 0 \end{array}$$

Como o resto das três divisões é zero, $2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ é divisível por $x + 2$, $x - 1$ e $x - 2$ e -2 , 1 e 2 são raízes de **A**.

Podemos escrever: $A(x) = 2(x + 2)(x - 1)(x - 2)$.

R9. Sabendo que $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ admite raiz 1, decomponha **P** em fatores e encontre a solução de $P(x) = 0$.

Resolução

Como $P(x)$ tem raiz 1, é divisível por $x - 1$. Calculemos o quociente de $P(x)$ por $x - 1$.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - x - 2$ e podemos escrever:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

Para resolver $P(x) = 0$, fazemos:

$$(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou } x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ \text{ou } x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

e a solução do exercício é: $S = \{-1, 1, 2\}$.

R10. Resolva a equação $2x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$, sabendo que uma das raízes é -2 .

Resolução

Vamos dividir $P(x) = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 4$ por $x + 2$.

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & 9 & 12 & 4 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

Então, $2x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = (x + 2)(2x^2 + 5x + 2)$.

$2x^2 + 5x + 2$ é um trinômio do 2º grau que admite como raízes -2 e $-\frac{1}{2}$; assim, podemos escrever:

$$2x^2 + 5x + 2 = 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

e $P(x) = (x + 2) \cdot 2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$, e então

$$P(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 2)^2.$$

Para resolver a equação $2x^3 + 9x^2 + 12x + 4 = 0$, fazemos:

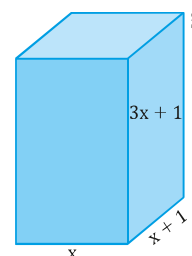
$$2(x + 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ou} \quad x + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Observe que, nesse caso, $x = -2$ é raiz de dois fatores de $P(x)$, e dizemos que -2 é uma raiz dupla de **P**.

$$S = \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}.$$

R11. As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são indicadas na figura ao lado, em metros.



a) Escreva a equação que dá os valores de x quando o volume for 42 m^3 . Sabendo que 2 metros é uma solução desse problema, investigue se há outras soluções positivas.

b) Descubra os valores de x para os quais o volume é maior que 42 m^3 .

Resolução

$$\text{a) } x(x + 1)(3x + 1) = 42$$

$$3x^3 + 4x^2 + x - 42 = 0$$

2 é solução; logo, $3x^3 + 4x^2 + x - 42$ é divisível por $x - 2$:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 3 & 4 & 1 & -42 \\ \hline & 3 & 10 & 21 & 0 \end{array}$$

Daí, $3x^3 + 4x^2 + x - 42 = (x - 2)(3x^2 + 10x + 21)$.

Se $Q(x) = 3x^2 + 10x + 21$, vamos procurar por raízes positivas de **Q**.

Para saber isso, devemos resolver $3x^2 + 10x + 21 = 0$.

Como $\Delta < 0$, não há soluções reais para $3x^2 + 10x + 21 = 0$ e, portanto, a única solução de $3x^3 + 4x^2 + x - 42 = 0$ é 2 metros.

$$\text{b) } 3x^3 + 4x^2 + x > 42 \Rightarrow 3x^3 + 4x^2 + x - 42 > 0 \Rightarrow (x - 2)(3x^2 + 10x + 21) > 0$$

Como o segundo fator não tem raízes e é sempre positivo, então:

$(x - 2)(3x^2 + 10x + 21) > 0$ quando $x - 2 > 0$; logo, $V > 42$ quando $x > 2$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO

39. Determine as raízes dos polinômios a seguir:

a) $x^3 + 2x^2 - x$

b) $m^3 + 3m^2 - 4m$

c) $y^5 + y^4 - 16y^3$

40. Fatore os polinômios da atividade 39.

41. Resolva as equações.

a) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, sabendo que 2 e 3 são raízes.

b) $6x^3 - 11x^2 + 6x - 1 = 0$, sabendo que tem 1 como raiz.

42. Resolva:

a) $(x + 1)(x - 1) = x^2 + 2x + 1$

b) $t^3 - 7t + 6 = (t - 1)^2(t + 3)$

43. Sabendo que $P(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$ admite a raiz 1 duas vezes, então:

a) decomponha $P(x)$ em fatores.

b) resolva a equação $P(x) = 0$.

44. Para $x = 2$, o polinômio $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 8x + 8$ se anula. Resolva $P(x) = 0$.

45. Uma empresa de *marketing* estima que, n meses após o lançamento de um novo produto no mercado, o número de famílias que irão comprá-lo é, em milhares, dado pela expressão $f(n) = \frac{10}{2}n(12 - n)$, com $0 \leq n \leq 12$.
- a) Esboce o gráfico de f .
- b) Ao final de quantos meses o número de pessoas que poderão comprar o produto será máximo?

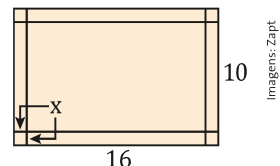
INVENTE VOCÊ

Neste **Invente você**, os estudantes terão de estabelecer diversas relações entre conceitos estudados anteriormente. Sugerimos que eles possam trabalhar em duplas ou trios.

REGISTRE
NO CADERNO



5. A partir da figura, invente um problema que trate de embalagens. Seu problema deve envolver polinômio e a noção de volume.



FOCO NA TECNOLOGIA

Calculadora

REGISTRE
NO CADERNO



1. Um recipiente em forma de cone, com 0,6 m de raio e 1 m de altura, tem o vértice voltado para baixo e está cheio de óleo combustível. O recipiente tem um pequeno furo no vértice, por onde o óleo vai gotejando.
-
- a) Calcule o volume inicial de óleo.
- b) Mostre que a expressão do volume de óleo é $V(h) = 0,12\pi h^3$.
- c) Use a calculadora e encontre o volume quando:
- $h = 0,45$ m
 - $h = 0,125$ m
 - $h = 0,25$ m
 - $h = 0,5$ m

- d) Qual é a razão entre a quantidade de óleo quando o cone está cheio e quando a altura do óleo corresponde à metade da capacidade do recipiente?
2. Um depósito de combustível tem a forma de um cilindro, cujo diâmetro da base, em metros, é dado por $2x - 4$. A altura é dada por $x^2 + 2$.
- a) Quais são os valores de x que tornam o problema possível?
- b) Encontre, em função de x , uma expressão que indique a capacidade do reservatório.
- c) Calcule quantas latas de tinta serão necessárias para pintar o reservatório por fora, se uma lata de tinta dá para 20 m^2 e o raio da base mede 2,25 m.

PALAVRAS-CHAVE

REGISTRE
NO CADERNO



Faça um resumo sobre as principais informações do capítulo envolvendo estas palavras-chave:

- Polinômios
- Função polinomial
- Operações com polinômios

Procure explicar de modo bem pessoal, ilustrando com exemplos e problemas.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

REGISTRE
NO CADERNO



1. (UFPR) Temos três caixas, uma com duas bolas azuis, outra com duas bolas brancas e uma terceira com uma bola branca e outra azul. Cada caixa tinha uma etiqueta correspondente a seu conteúdo — AA, BB e AB —, contudo alguém trocou as etiquetas de tal forma que todas ficaram etiquetadas de forma errada. Tirando apenas uma bola por vez de qualquer das caixas, sem olhar o conteúdo, qual é o menor número de bolas que deve ser retirado para saber o conteúdo de cada caixa?
- a) Cinco bolas. b) Quatro bolas. c) Três bolas. d) Duas bolas. e) Uma bola.

2. Quatro irmãs, Ana, Bia, Mariana e Carla, foram questionadas por sua mãe, pois uma delas, por brincadeira, escondeu seu secador de cabelo, e ela teve de adivinhar quem fez a travessura.
- Ana disse: Foi a Bia.

- Bia disse: Foi a Mariana.
- Mariana disse: Bia mente ao dizer que fui eu.
- Carla disse: Eu não fui.

Se a mãe das meninas sabe que apenas uma delas disse a verdade, qual delas escondeu o secador de cabelo?

APRENDER A APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Organizamos uma série de problemas envolvendo **contagem** e **probabilidade**. Para resolvê-los, você precisa:

- ler os problemas cuidadosamente, identificando termos que precisa rever;
- pensar em como o problema pode ser resolvido (lembre-se de que às vezes há mais de uma maneira de resolver o mesmo problema);
- ter um livro do 2º ano do Ensino Médio para consultar, se necessário;
- ao final, organizar no caderno uma síntese das principais ideias que você recordou sobre esses dois assuntos, para decidir se precisa estudar ainda mais sobre eles.

1. (UFU-MG) Uma fábrica de tintas necessita contratar uma equipe para desenvolver e produzir um novo tipo de produto. A equipe deve ser formada por 4 químicos, 1 engenheiro ambiental e 2 engenheiros de produção. Se no processo final de seleção compareceram 6 químicos, 3 engenheiros ambientais e 4 engenheiros de produção, o número de maneiras que a equipe poderá ser formada é igual a

- a) $6! \cdot 3$ b) $6! \cdot 18$ c) $6! \cdot \frac{3}{8}$ d) $6! \cdot \frac{3}{4}$

2. (Aman-RJ) Os alunos de uma escola realizam experiências no laboratório de Química utilizando 8 substâncias diferentes. O experimento consiste em misturar quantidades iguais de duas dessas substâncias e observar o produto obtido.

O professor recomenda, entretanto, que as substâncias S_1 , S_2 e S_3 não devem ser misturadas entre si, pois produzem como resultado o gás metano, de odor muito ruim. Assim, o número possível de misturas diferentes que se pode obter, sem produzir o gás metano, é

- a) 16 c) 25 e) 56
b) 24 d) 28

3. (UEL-PR) Um grupo de 6 alunos decide escrever todos os anagramas da palavra PERGUNTA. Essa tarefa será feita em vários turnos de trabalho. Em cada turno, 3 alunos escrevem e os outros descansam. Para serem justos, decidiram escrever o mesmo número de anagramas em cada turno.

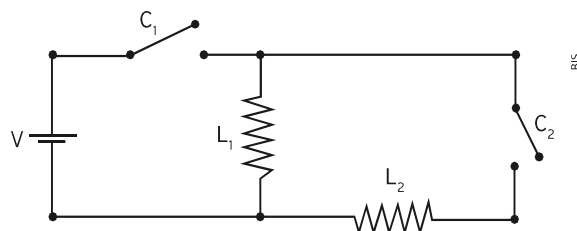
Qual deve ser o número mínimo de anagramas, escrito por turno, de modo que não se repitam grupos de trabalho?

- a) 23 c) 2 016 e) 35 000
b) 720 d) 5 040

4. (Fuvest-SP) Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

- a) 551 c) 553 e) 555
b) 552 d) 554

5. (Cesgranrio-RJ) Um circuito é composto por uma bateria, cuja diferença de potencial elétrico (d.d.p.) vale V , além de duas lâmpadas idênticas e duas chaves (interruptores). Todos os componentes do circuito estão em perfeito funcionamento. A probabilidade de que a chave C_1 esteja aberta é de 60%. A probabilidade de que a chave C_2 esteja aberta é de 40%.



Qual a probabilidade de que pelo menos uma das duas lâmpadas esteja apagada?

- a) 76% c) 52% e) 24%
b) 60% d) 40%

6. (Fuvest-SP) Considere todos os pares ordenados de números naturais (a, b) , em que $11 \leq a \leq 22$ e $43 \leq b \leq 51$. Cada um desses pares ordenados está escrito em um cartão diferente. Sorteando-se um desses cartões ao acaso, qual é a probabilidade de que se obtenha um par ordenado (a, b) de tal forma que a fração $\frac{a}{b}$ seja irredutível e com denominador par?

- a) $\frac{7}{27}$ b) $\frac{13}{54}$ c) $\frac{6}{27}$ d) $\frac{11}{54}$ e) $\frac{5}{27}$

7. (Fuvest-SP) Um dado cúbico, não viciado, com faces numeradas de 1 a 6, é lançado três vezes. Em cada lançamento, anota-se o número obtido na face superior do dado, formando-se uma sequência (a, b, c) . Qual é a probabilidade de que b seja sucessor de a ou de que c seja sucessor de b ?

- a) $\frac{4}{27}$ b) $\frac{11}{54}$ c) $\frac{7}{27}$ d) $\frac{10}{27}$ e) $\frac{23}{54}$

Polinômio: chave de segredos

As tentativas de se guardar um segredo “a sete chaves” são antigas. Têm-se registros de cerca de 2000 a.C. sobre métodos criados para esconder um segredo por meio de códigos: criptografia.

A evolução histórica de registros criptografados é no mínimo curiosa. Textos salpicados de termos sem sentido, grafados em argila, pedra ou madeira; mensagens tatuadas no couro cabeludo de escravos; papiros enrolados em bastão, tendo na forma de desenrolar a revelação da mensagem; manuscritos com sistema de códigos quase invioláveis; e outros tantos mecanismos de guardar segredo.

Na Idade Média, todos os governos se utilizavam da criptografia; nas guerras, tal como hoje, ter uma inviolável criptografia é tão importante quanto ter poderosas armas.

O avanço tecnológico trouxe os computadores, guardando em sua memória as informações pessoais. Com a internet colocando essas máquinas em rede, a proteção dos segredos ficou fragilizada, e a criptografia deixou de ser arte ou simples técnica para se constituir em uma área de estudo da Matemática. Assim, na atualidade, avançados centros de pesquisa se dedicam a desenvolver métodos sofisticados para cifrar e decifrar dados, contribuindo para a ampliação dos métodos de proteção da informação.

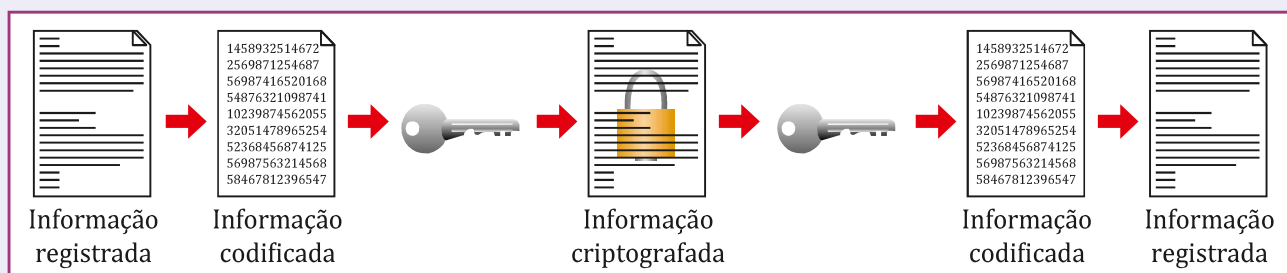
Dois destaques são interessantes, um deles se sobressai pela curiosidade: em 1999, Sarah Flannery, uma estudante de 16 anos de uma escola secundária da Irlanda, ganhou evidência nas páginas de jornal do mundo inteiro ao apresentar, em uma feira de trabalhos científicos escolares, um método matemático de codificação e decodificação de informação. Na ocasião, os organizadores da feira convocaram uma comissão de matemáticos de alto nível para julgar o trabalho de Sarah. A comissão não só considerou corretos seus resultados, como classificou o trabalho da jovem como uma brilhante contribuição à criptografia. A base do seu método utilizava multiplicação de matrizes; o outro destaque diz respeito ao tema sobre o qual temos interesse. Em 2002, os matemáticos indianos Agrawal, Kayal e Saxena surpreenderam a todos apresentando um método com base em complexidade polinomial: algoritmo AKS (iniciais de seus nomes).

A multiplicação de matrizes ou as operações com polinômios fazem parte do rol de possibilidades de operar números para cifrar ou decifrar mensagens. Esses métodos matemáticos são chamados algoritmos. O segredo da criptografia está em usar um algoritmo e uma chave (tabela de números que constituem o segredo, como uma senha) para transformar uma mensagem, já codificada em números, em outra mensagem. A segurança da chave está em usar números que não são facilmente identificados e por isso são usados fatores primos de um número inteiro enorme. Reconhecer um número pelos seus fatores primos é fácil quando se trata de números pequenos, tal como: $15 = 3 \cdot 5$. Porém, com números muito grandes (com milhões de algarismos) é muito difícil, mesmo com o uso de processos computacionais avançados.

Sucintamente, os sistemas criptográficos atuais podem ser esquematizados como mostrado a seguir. A mensagem escrita é codificada em números que são alterados por um algoritmo junto a uma chave (números que constituem o segredo). Para decifrar, faz-se o processo inverso.



Maksim Kabakov/Shutterstock



Representação de um fluxograma para o processo de criptografia em ambiente virtual.

O que a equipe de indianos conseguiu foi um método (o algoritmo) de se obter os fatores primos de um número enorme usando um sistema de complexidade polinomial. Para um entendimento ainda que restrito, pois o processo exige um considerável espaço, vamos simular a criptografia da palavra *viktoria*, usando um codificador ASCII (um programa destinado a isso) e um polinômio como algoritmo.

O primeiro passo é codificar as letras (uso do codificador).

V	I	K	T	O	R	I	A
86	73	75	84	79	82	73	65

O segundo passo é escolher o algoritmo. Optamos por um polinômio-chave de grau 5, bem simples, pois comumente se utilizam polinômios de grau bastante elevado.

$f(x) = p_0x^5 + p_1x^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5$, em que:

p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 são os coeficientes que formam a chave privada e x é a variável da posição da letra no texto da mensagem.

Escolhemos a chave privada (formada por números primos) 1 – 5 – 1 – 2 – 7 – 1 e a utilizamos como coeficientes do polinômio. Assim, tem-se:

$f(x) = 1x^5 + 5x^4 + 1x^3 + 2x^2 + 7x + 1$, em que $f(1) = 17$, $f(2) = 143$...

Vamos usar uma tabela para organizar o processo de cifração.

	Posição 1	Posição 2	Posição 3	Posição 4	Posição 5	Posição 6	Posição 7	Posição 8
Mensagem	V	I	K	T	O	R	I	A
Código ①	86	72	75	84	79	82	73	65
$f(x)$ ②	17	143	715	2 429	6 461	14 587	29 303	53 945
① + ②	103	216	790	2 513	6 540	14 669	29 376	54 010
Texto cifrado	g	Ø		Ñ	CE	M	À	Ú

Nas linhas da tabela indicadas pelas setas verde e azul, estão, respectivamente, os números do código e os números formados pelo valor da função polinomial $f(x)$, conforme a posição da letra no texto $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... Na linha indicada pela seta vermelha tem-se uma operação de soma dos números das duas linhas anteriores, obtendo novos valores numéricos como resultado. Esses valores, transformados em mensagens pelo mesmo codificador ASCII, formam o texto cifrado. Assim, a palavra *viktoria* fica registrada: gØ ÑCEMÀÚ.

É interessante perceber que a letra *i* aparece duas vezes no texto original, mas no texto cifrado não se percebe que se trata da mesma letra.

Muitos sistemas são usados ou estão em fase de pesquisa e aperfeiçoamento para cifrar mensagens. Os algoritmos utilizados são vários: logaritmos, exponencial, matricial... Polinômios é apenas um deles.

ATIVIDADE



1. Que tal você e os colegas criarem um sistema de criptografia? Ele não precisa ser complexo. Aceita o desafio?

9 Números complexos

Quais são as raízes da equação $x^2 + 3x + 5 = 0$?

Para resolver essa equação, podemos utilizar a conhecida fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

No conjunto dos números reais, essa equação não possui solução, pois não existe um número real r tal que $r^2 = -11$. Não existe $\sqrt{-11}$ no conjunto dos números reais.

No entanto, no campo dos **números complexos** é possível resolver essa equação.

Situe-se

Neste capítulo, você conhecerá um novo campo numérico, o dos **números complexos**. Esse é um exemplo interessante de um conhecimento que nasce na Matemática para a resolução de equações que, por exemplo, a Física e áreas da engenharia utilizam em modelos para explicar fenômenos relacionados à eletricidade e movimentos em fluidos como ar ou água.

O objetivo deste capítulo não é o tratamento exaustivo dos números complexos e de suas propriedades, mas sim que os estudantes conheçam um pouco da história de como a Matemática foi se construindo pelas mãos dos seres humanos, em sua cultura e tempo, bem como possam rever e aprofundar os conhecimentos que possuem sobre as operações e suas aplicações na resolução de equações. Por isso, incentive a leitura do texto deste capítulo individualmente ou em pequenos grupos, seguida de discussões coletivas.

1 Números não reais: números imaginários

Um pouco de história

Por volta da primeira metade do século XVI, alguns matemáticos italianos, Niccolo Tartaglia (1499-1557) e Jerônimo Cardano (1501-1576), descobriram um modo para resolver equações do tipo $x^3 + ax + b = 0$.

Em sua obra *Ars magna*, Cardano apresentou pela primeira vez a fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

como solução de uma equação do tipo $x^3 + ax + b = 0$, em que $a > 0$ e $b > 0$.

Essa fórmula só se aplicava quando $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} \geq 0$, pois na época não se extraíam raízes quadradas de números negativos.

Na mesma época, outro matemático, Rafael Bombelli (1526-1573), resolvendo a equação $x^3 - 15x = 4$, chegou a um impasse.

Por cálculo direto, ele verificou que 4 era uma raiz do polinômio, pois $4^3 - 15 \cdot 4 = 4$, e tentou verificar se encontrava a raiz 4 aplicando a fórmula de Cardano. No entanto, para a equação $x^3 = 15x + 4$, tem-se $a = -15 < 0$ e $b = -4 < 0$, o que resultou em:

$$x = \sqrt[3]{+\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{3375}{27}}} + \sqrt[3]{+\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{3375}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{+2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{+2 - \sqrt{-121}}$$



Jerônimo Cardano, em gravura de R. Cooper.

Mary Evans Picture Library/Diomedea/Coleção particular

Por causa desse resultado, Bombelli acreditava que a equação não devia ter solução, pois $\sqrt{-121}$ não é um número real. No entanto, ele sabia que $x = 4$ era uma das raízes da equação.

Para superar esse problema, Bombelli tentou encontrar regras para trabalhar com raízes quadradas de números negativos.

Resolveu considerar $\sqrt{-1}$ como um número qualquer e, usando as mesmas regras da Álgebra elementar, conseguiu mostrar que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ era a raiz da equação que ele estava tentando resolver.

Bombelli passou a desenvolver regras para operar com esses novos “números” chamando-os de números “fictícios”, “impossíveis”, “místicos” ou “imaginários”.

A partir daí, os matemáticos passaram a estudar e a trabalhar com raízes quadradas de números negativos de forma cada vez mais sistematizada. Nesse trabalho, sempre que possível, usavam as mesmas propriedades dos números reais em relação à adição, à subtração, à multiplicação...

- 1629: Albert Girard (1590-1633) escreve as raízes quadradas de números negativos na forma $a + b\sqrt{-1}$; assim, $2 + \sqrt{-16} = 2 + 4\sqrt{-1}$.
- 1637: dada a notação $a + b\sqrt{-1}$, René Descartes (1596-1650) chama **a** de “parte real” e **b** de “parte imaginária”.
- 1748: Leonhard Euler (1707-1783) usa a letra **i** para representar $\sqrt{-1}$. Assim, uma expressão do tipo $4 + 3\sqrt{-1}$ passou a ser escrita como $4 + 3i$.

Mas foi no final do século 18 e início do século 19, especialmente a partir dos trabalhos do matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que se passou a chamar os números da forma $a + bi$ de **complexos** e esses números ganharam o *status* de campo numérico, merecendo um estudo organizado em torno de suas aplicações dentro e fora do interesse da Matemática. Mas, afinal, o que são números complexos?

FIQUE CONECTADO

Como as abelhas e sua dança podem ter influenciado as pesquisas sobre Matemática e computação? Para responder a essa pergunta, leia o capítulo 45 do livro *A vida secreta dos números*, de George S. Szpiro (Difel).

2 Número complexo

Consideremos a equação $x^2 - 6x + 13 = 0$, que não tem soluções reais, pois seu discriminante é $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16$.

Vamos procurar as soluções dessa equação completando quadrados.

$$x^2 - 6x = -13 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -13 + 9 \Leftrightarrow (x - 3)^2 = -4$$

No conjunto dos números reais, essa equação não teria solução porque não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x - 3 = \pm\sqrt{-4}$. No entanto, no conjunto dos números complexos, $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i$, e teremos $x - 3 = \pm 2i$; logo:

$$\begin{cases} x - 3 = 2i \Leftrightarrow x = 3 + 2i \\ \text{ou} \\ x - 3 = -2i \Leftrightarrow x = 3 - 2i \end{cases}$$

Podemos, então, dizer que $3 + 2i$ e $3 - 2i$ são as soluções de $x^2 - 6x + 13 = 0$; esses números são chamados de números complexos.

Número complexo é todo par ordenado (a, b) que pode ser escrito na forma $a + bi$, em que **a** e **b** são números reais e **i** é a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$. A escrita $a + bi$ é chamada de **forma algébrica de um número complexo**.

Exemplos:

a) $\pi + \frac{2}{3} \cdot i$, em que $a = \pi$ e $b = \frac{2}{3}$.

b) $(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3} \cdot i$, em que $a = 1 - \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{3}$.

c) $0 + 6i$, em que $a = 0$ e $b = 6$, que convencionamos escrever $6i$.

d) $5 + 0i$, em que $a = 5$ e $b = 0$, que convencionamos escrever 5 .

e) $0 + 0i$, em que $a = 0$ e $b = 0$, que escrevemos 0 .

Dizemos que os números complexos dos exemplos a , b e c são imaginários; o do exemplo c é imaginário puro; e os dos exemplos d e e são reais.

Sendo $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, podemos escrever:

z é imaginário se $b \neq 0$;

z é imaginário puro se $a = 0$ e $b \neq 0$;

z é real se $b = 0$.

Costumamos indicar um número complexo por z .

Sendo $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, chamamos:

a de parte real de z e a denotamos por $R(z)$ ou $\text{Re}(z)$;

b de parte imaginária de z e a denotamos por $I(z)$ ou $\text{Im}(z)$.

Observando os exemplos, verificamos que os números reais podem ser considerados números complexos. Vejamos a relação entre os diferentes campos numéricos por meio do diagrama ao lado.

Como cada número complexo está associado a um par ordenado, $z = a + bi \Leftrightarrow (a, b)$, em que $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$, o conjunto \mathbb{C} , dos números complexos, pode ser representado em um plano:

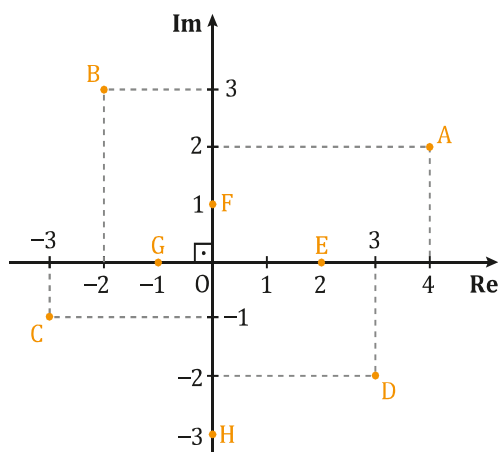
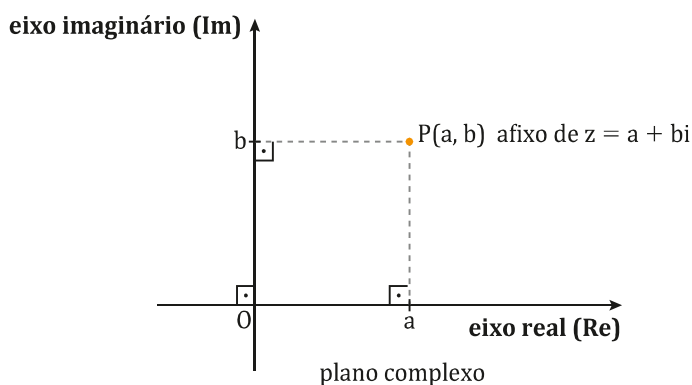
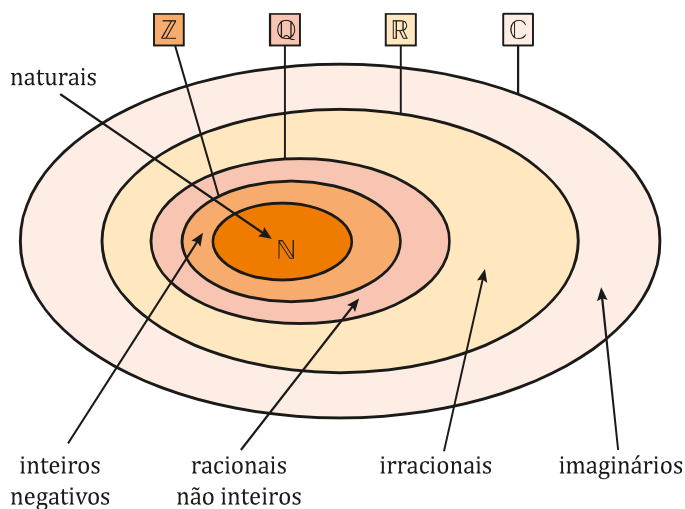
- a cada número complexo z está associado um único par ordenado $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$ de números reais e vice-versa;
- então, a cada número complexo z corresponde um único ponto P , de abscissa $\text{Re}(z)$ e de ordenada $\text{Im}(z)$, do plano e vice-versa.

Nessa correspondência, os números reais são representados por pontos do eixo das abscissas, que chamamos de **eixo real**, e os imaginários puros, por pontos do eixo das ordenadas, que chamamos de **eixo imaginário**.

O plano no qual representamos os números complexos chama-se **plano complexo**, ou **plano de Argand-Gauss**, e o ponto P , correspondente a um número complexo z , é chamado de **afixo de z** .

Exemplos:

Pontos afixos	Números complexos correspondentes
A(4, 2)	$4 + 2i$
B(-2, 3)	$-2 + 3i$
C(-3, -1)	$-3 - i$
D(3, -2)	$3 - 2i$
E(2, 0)	2
F(0, 1)	i
G(-1, 0)	-1
H(0, -3)	$-3i$



Imagens: BLS

Foi graças à representação geométrica feita por Argand e divulgada por Gauss que os números complexos acabaram aceitos. Para os matemáticos, a representação de Argand-Gauss tornou esses novos números concretos e visíveis, o que permitiu o desenvolvimento do estudo e o cálculo com esses números.

Por isso, a partir de agora vamos identificar o número complexo $z = a + bi$ com o ponto $P(a, b)$, seu afixo no plano complexo.

PARA COMPLEMENTAR

Foi Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), matemático francês, que, em 1820, divulgou para o mundo a representação gráfica dos números complexos no plano cartesiano. Ele deu a essa representação o nome de **diagrama de Wessel-Argand-Gauss**, três matemáticos que, de modo independente um do outro, deram o passo que permitiu a aceitação generalizada desses números, que até então pareciam tão misteriosos.

- Caspar Wessel (1745-1818) publicou na Dinamarca, em 1798, a apresentação dos números complexos no plano cartesiano.
- Jean Robert Argand, matemático belga (1768-1822), publicou a mesma representação em 1806.
- Carl Friedrich Gauss, expoente da Matemática alemã, responsável também pela representação geométrica dos números complexos e pelos avanços no estudo das propriedades desse campo numérico.

Igualdade e operações entre números complexos

Quando se estrutura um novo conjunto numérico, é preciso não apenas definir esse novo tipo de número, mas também analisar a igualdade de números nesse conjunto e as operações que aí podem ser efetuadas. É a partir delas que poderemos deduzir as propriedades que as operações possuem nesse conjunto.

Pensando nos números complexos como pares ordenados, são razoáveis as três definições a seguir.

Igualdade

Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a, b, c e d** reais, dizemos que $z = w$ quando $a = c$ e $b = d$.

Não é possível estabelecer uma relação de ordem entre números complexos de forma $a + bi$, com $b \neq 0$. Um número complexo (não real) não é maior nem menor que outro complexo (não real). Com relação a números complexos, podemos apenas indicar se são iguais ou diferentes.

Exemplo:

$z = 2 - 3i$ é igual a $w = \frac{4}{2} - \sqrt{9}i$, enquanto os números $5 - i$ e $5 + i$ são diferentes.

Adição

Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a, b, c e d** reais, chama-se soma de **z** com **w** o número complexo: $(a + c) + (b + d)i$.

Escrevemos: $z + w = (a + c) + (b + d)i$.

Exemplo:

Sendo $z = 7 + 5i$ e $w = 3 + 2i$, temos $z + w = (7 + 3) + (5 + 2)i = 10 + 7i$.

Subtração

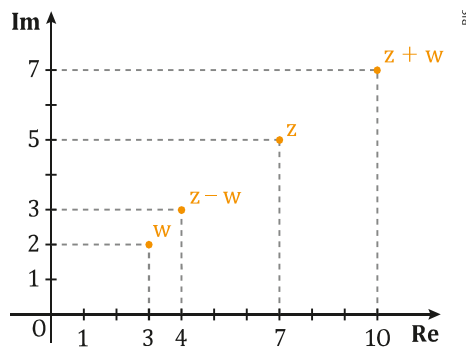
Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a, b, c e d** reais, chama-se diferença entre **z** e **w** o número complexo: $(a - c) + (b - d)i$.

Escrevemos: $z - w = (a - c) + (b - d)i$.

Exemplo:

Seja $z = 7 + 5i$ e $w = 3 + 2i$, temos
 $z - w = (7 - 3) + (5 - 2)i = 4 + 3i$ e
 $z + w = (7 + 3) + (5 + 2)i = 10 + 7i$, como
representado no plano complexo ao lado.

A definição de multiplicação de números complexos não é tão natural, mas ela tem consequências interessantes, como veremos no próximo **Para complementar** (página 197).



Multiplicação

Seja $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, chama-se produto de **z** por **w** o número complexo: $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Escrevemos: $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Observe que essa relação aparece se usarmos as propriedades que conhecemos em \mathbb{R} .

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Considerando que $i^2 = -1$ (porque $i^2 = (\sqrt{-1})^2$), temos:

$$z \cdot w = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo:

Seja $z = 2 + 3i$ e $w = 3 + 5i$, temos:

$$z \cdot w = (2 + 3i)(3 + 5i) = 6 + 10i + 9i + 15i^2 = 6 - 15 + 19i = -9 + 19i$$

No caso de **z** e **w** serem números reais, o seu produto como números complexos coincide com o produto em \mathbb{R} .

Antes de definir a divisão de números complexos, é preciso definir o conjugado de um número em \mathbb{C} .

Conjugado

Chama-se **conjugado do número complexo** $z = a + bi$, com **a** e **b** reais, o número complexo $a - bi$.

Indicamos o conjugado de **z** por \bar{z} .

Exemplos:

a) $z = 5 + 3i \Rightarrow \bar{z} = 5 - 3i$

c) $z = 10i \Rightarrow \bar{z} = -10i$

b) $z = -6 - 2i \Rightarrow \bar{z} = -6 + 2i$

d) $z = 8 \Rightarrow \bar{z} = 8$

Vamos analisar o que ocorre com o produto de $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, pelo seu conjugado \bar{z} .

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2i^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$$

Portanto, o produto de $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, pelo seu conjugado é o número real não negativo.

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Exemplos:

a) $z = 3 + 4i \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 3^2 + 4^2 = 25$

b) $z = -1 - i \Rightarrow z \cdot \bar{z} = (-1)^2 + (-1)^2 = 2$

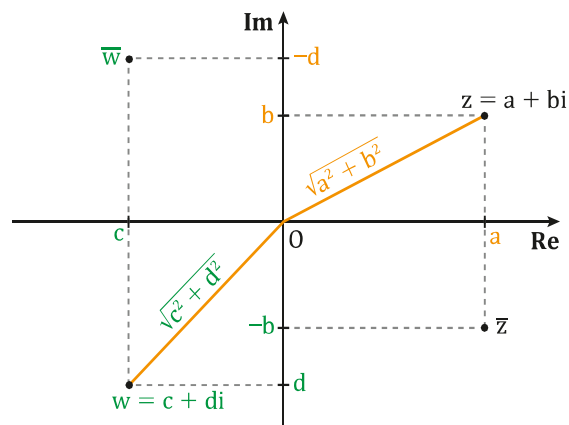
c) $z = 2i \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 0^2 + 2^2 = 4$

Representando no plano complexo, podemos observar que z e \bar{z} correspondem a pontos simétricos em relação ao eixo real e que $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ é o quadrado da distância do afixo de z à origem do plano.

Com o apoio do conceito de conjugado de um número complexo, vamos definir a divisão em \mathbb{C} usando o fato de que $w \cdot \bar{w}$ é um número real,

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}},$$

o que faz a divisão de complexos se transformar num produto em \mathbb{C} e na divisão por um número real.



Divisão

Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, a, b, c e d reais, obtemos o quociente entre z e w multiplicando o divisor e o dividendo pelo conjugado do divisor.

Escrevemos: $z : w = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}}.$

Exemplo:

$$\frac{3 + 2i}{1 + i} = \frac{3 + 2i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 3i + 2i - 2i^2}{1^2 + (-1)^2} = \frac{5 - i}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}i.$$

3 Propriedades

As propriedades da adição e da multiplicação em \mathbb{C} são as mesmas dessas operações em \mathbb{R} .

Convém destacar o oposto e analisar as potências de expoente natural da unidade imaginária.

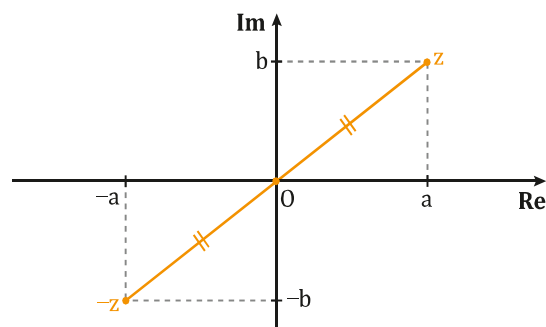
Oposto de um número complexo

O **oposto** do complexo $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, é o número complexo $-z = -a - bi$.

Exemplo:

O oposto de $z = -3 + 7i$ é $-z = 3 - 7i$.

Representando no plano complexo, $-z$ corresponde ao ponto simétrico do afixo de z em relação à origem O do plano. Ou seja, O é o ponto médio do segmento que tem extremos nos afixos de z e $-z$.



Imagens: BIS

Potências de i

Para calcular i^n , com $n \in \mathbb{N}$, usamos as propriedades de potenciação já conhecidas em \mathbb{R} e fazemos:

$i^0 = 1$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$
$i^1 = i$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^9 = i^8 \cdot i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^{10} = i^8 \cdot i^2 = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$	$i^{11} = i^8 \cdot i^3 = -i$

Os valores de i^n se repetem de 4 em 4, de 8 em 8, de 12 em 12 etc., ou seja, constituem um fato periódico de período 4. Então, para calcular i^n , indicando por q e r , respectivamente, o quociente e o resto da divisão de n por 4, temos:

$$\begin{array}{l} n \mid 4 \\ r \quad q \end{array} \quad i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$

Se $n = 4q + r$, então $i^n = i^r$

Observe que o resto da divisão de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 100$, por 4 é obtido dividindo-se o número formado pelo algarismo das dezenas e pelo algarismo das unidades de n por 4.

Exemplo:

Os restos das divisões de 1324, 10 001, 19 354 e 20 355 por 4 são, respectivamente, 0, 1, 2 e 3:

$$\begin{array}{cccc} 1324 & \mid 4 & 10\,001 & \mid 4 & 19\,354 & \mid 4 & 20\,355 & \mid 4 \\ 0 & & 1 & & 2 & & 3 & \end{array}$$

Então:

$$\begin{aligned} i^{1324} &= i^0 = 1 \\ i^{10001} &= i^1 = i \\ i^{19354} &= i^2 = -1 \\ i^{20355} &= i^3 = -i \end{aligned}$$

Para elevar um número complexo $z = a + bi$ a uma potência n , $n \in \mathbb{N}$, podemos utilizar a multiplicação ou o binômio de Newton.

Exemplos:

a) Para calcular $(1 + 2i)^2$ fazemos $(1 + 2i)^2 = (1 + 2i)(1 + 2i) = 1 + 2i + 2i + 4i^2 = -3 + 4i$.

b) Para calcular $(2 + i)^4$ podemos ver os coeficientes do triângulo de Pascal.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} (2 + i)^4 &= (2 + i)^2 \cdot (2 + i)^2 = (4 + 4i - 1) \cdot (4 + 4i - 1) = \\ &= (3 + 4i) \cdot (3 + 4i) = 9 + 12i + 12i - 16 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } (2 + i)^4 = -7 + 24i.$$

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R1. Determine $x \in \mathbb{R}$ para que $z = (x^2 - 2x) + (x - 2)i$ seja:

- a) imaginário. c) real.
b) imaginário puro.

Resolução

a) z é imaginário $\Leftrightarrow x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.

Note que *um* dos números que satisfazem a condição é $z = -2i$.

b) z é imaginário puro \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \\ \text{e} \\ x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Nesse caso, o *único* número que satisfaz a condição é $z = -2i$.

c) z é real $\Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Nesse caso, temos $z = 0$.

R2. Calcule:

a) $(1 - i)^2$ b) $(1 - i)^8$ c) $(1 - i)^{1004}$

Resolução

a) $(1 - i)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot i + i^2 = 1 - 2i + (-1) = -2i$

b) $(1 - i)^8 = [(1 - i)^2]^4 = [-2i]^4 = (-2)^4 \cdot i^4 = 16 \cdot 1 = 16$

c) $(1 - i)^{1004} = [(1 - i)^2]^{502} = [-2i]^{502} = (-2)^{502} \cdot i^{502} = 2^{502} \cdot i^2 = -2^{502}$

R3. Determine $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ para que:

a) $(x + yi)(1 - 3i) = -13 - i$.

b) $(x + yi)^2 = 8i$.

Resolução

a) $(x + 3y) + (-3x + y)i = -13 - i \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = -13 \\ -3x + y = -1 \end{cases}$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = -1$ e $y = -4$.

b) Como $(x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, temos:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = 8i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y \\ 2xy = 8 \Leftrightarrow xy = 4 \end{cases}$$

Em $xy = 4$, para:

- $x = y$ temos $y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2$ ou $y = -2$;
 - $x = -y$ temos $-y^2 = 4$, que não tem soluções reais.
- Portanto, $x = 2, y = 2$ ou $x = -2, y = -2$.

R4. Resolva, em \mathbb{C} , as equações e represente no plano complexo as raízes obtidas.

a) $x^2 + 25 = 0$

b) $x^4 - 16 = 0$

c) $x^2 - 6x + 10 = 0$

Resolução

a) $x^2 + 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -25$

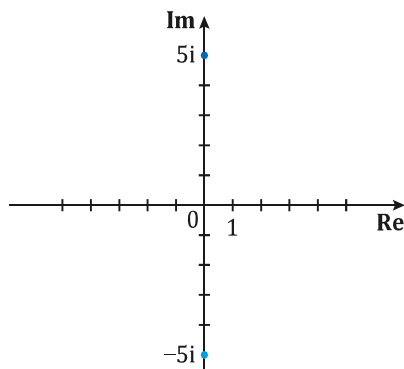
Para facilitar a manipulação, podemos escrever:

$$-25 = 25(-1) = 25i^2$$

Então:

$$x^2 = 25i^2 \Leftrightarrow x = 5i \text{ ou } x = -5i$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{5i, -5i\}$.

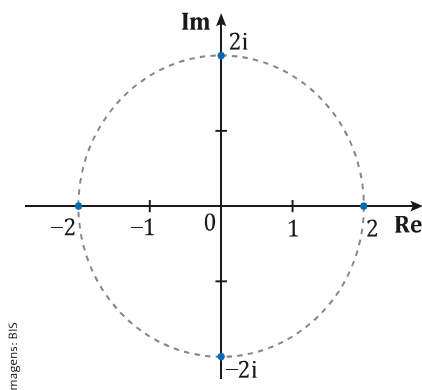


b) $x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \\ \text{ou} \\ x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2i \end{cases}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{+2, -2, +2i, -2i\}$.

A resolução nos mostra que a raiz quarta de 16 é 2 ou -2 ou 2i ou -2i, cuja representação no plano corresponde a quatro pontos na circunferência de centro na origem e raio 2.



c) $x^2 - 6x + 10 = 0$ tem

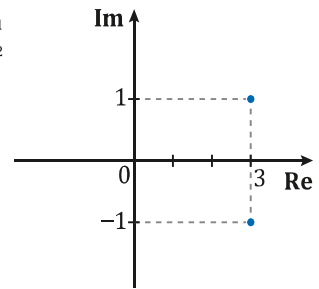
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 10 = -4 = 4i^2$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{6 \pm 2i}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 + i \text{ ou } x = 3 - i$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{3 + i, 3 - i\}$.



R5. Determine $x \in \mathbb{R}$ para que $z = \frac{x + x \cdot i}{x + i}$ seja:

a) real.

b) imaginário puro.

Resolução

Inicialmente, escrevemos z na forma $a + bi$:

$$z = \frac{x + x \cdot i}{x + i} \cdot \frac{x - i}{x - i} = \frac{x^2 - x \cdot i + x^2 i - x \cdot i^2}{x^2 + i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} + \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \cdot i$$

a) z é real $\Leftrightarrow \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

Nesse caso, temos $z = 0$ ou $z = 1$.

b) z é imaginário puro $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x^2 + 1} = 0 & \textcircled{1} \\ \text{e} \\ \frac{x^2 - x}{x^2 + 1} \neq 0 & \textcircled{2} \end{cases}$

De $\textcircled{1}$ obtemos $x = 0$ ou $x = -1$ e de $\textcircled{2}$ obtemos $x \neq 0$ e $x \neq 1$. Portanto, $x = -1$.

Nesse caso, temos $z = i$.

R6. Determine $z \in \mathbb{C}$ que satisfaz a condição:

a) $z \cdot \bar{z} + 2z - i\bar{z} = 0$.

b) $2z^2 - 7i \cdot z - 3 = 0$.

Resolução

a) Seja $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Temos:

$$(a + bi)(a - bi) + 2(a + bi) - i(a - bi) = 0$$

$$a^2 + b^2 + 2a + 2b \cdot i - a \cdot i + b \cdot i^2 = 0$$

$$(a^2 + b^2 + 2a - b) + (2b - a)i = 0$$

Da definição de igualdade de números complexos, obtemos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + 2a - b = 0 & \textcircled{1} \\ 2b - a = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

De $\textcircled{2}$ obtemos $a = 2b$; substituindo em $\textcircled{1}$, resulta:

$$(2b)^2 + b^2 + 2 \cdot 2b - b = 0 \Rightarrow 5b^2 + 3b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 0 \text{ ou } b = -\frac{3}{5}$$

Em $\textcircled{2}$: $b = 0 \Rightarrow a = 0$

$$b = -\frac{3}{5} \Rightarrow a = -\frac{6}{5}$$

Portanto, $z = 0$ ou $z = -\frac{6}{5} - \frac{3}{5} \cdot i$.

b) $2z^2 - 7iz - 3 = 0$ é equação do 2º grau em z ; então:

$$\Delta = (-7i)^2 - 4 \cdot 2(-3) = -49 + 24 = -25 = 25(-1) = 25i^2$$

$$z = \frac{7i \pm 5i}{4} \Rightarrow z = 3i \text{ ou } z = \frac{1}{2} \cdot i$$

Portanto, $z = 3i$ ou $z = \frac{1}{2} \cdot i$.



- Dê a parte real e a parte imaginária de cada complexo.
 - $z = -6 + 0,5i$
 - $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot i$
- Determine $x \in \mathbb{R}$ para que $z = (x-2) + (x+3)i$ seja:
 - real.
 - imaginário puro.
- Determine $x \in \mathbb{R}$ para que $z = x^2 - 9 + (x^2 - 3x)i$ seja:
 - real.
 - imaginário.
 - imaginário puro.
- Determine x e y reais para que:
 - $2x - y + (x + y)i = 6 - 9i$
 - $2x + (x - 2y)i = 6i$
 - $(x + yi)(1 + 2i) = 8 + 6i$
 - $(x - yi)^2 = -16$
- Sejam $z_1 = -1 + 6i$ e $z_2 = 3 - 2i$. Calcule:
 - $z_1 + z_2$
 - $z_1 - z_2$
 - $z_1 \cdot z_2$
 - z_1^2
 - z_2^2
 - $i(z_2 - z_1)$
- Calcule:
 - $i^{236} + i^{549} + i^{526} + i^{855}$
 - $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot i\right)^{100}$
- (UFC-CE) O valor do número complexo $\left(\frac{1+i^9}{1+i^{27}}\right)^{20}$ é:
 - 1
 - i
 - $-i$
 - -1
 - 2^{20}
- Determine $x \in \mathbb{R}$ para que $z = (x+i)^3$ seja:
 - real.
 - imaginário puro.
- Resolva, em \mathbb{C} , as equações e represente suas raízes no plano complexo.
 - $x^2 + 64 = 0$
 - $x^4 - 81 = 0$
 - $2x^2 - 6x + 5 = 0$
 - $x^4 - 1 = 0$
- Resolva em \mathbb{C} a equação proposta no início do capítulo.

- Resolva em \mathbb{C} .
 - $z^2 = -9$
 - $z^2 = -3$
 - $-3z^2 + 6z + 1 = 0$
 - $(x-2i)(2x^2-3x+5) = 0$
- Seja a função $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto 13z^2 - 24z + 13$$
 - Encontre em \mathbb{C} os zeros da função.
 - Expresse $f(z)$ na forma de um produto de fatores do 1º grau com coeficientes complexos.
- Determine o conjugado de cada número complexo.
 - $z = 8 + 5i$
 - $z = -62 + 7i$
 - $z = -6i$
 - $z = -4$
- Calcule os quocientes.
 - $\frac{5-2i}{3+4i}$
 - $\frac{3+5i}{4-2i}$
 - $\frac{-2+3i}{3+i}$
 - $\frac{-2-10i}{-1+i}$
 - $\frac{1+i}{i}$
 - $\frac{1-i}{1+i}$
- Expresse z na forma algébrica.
 - $z = \frac{1+i}{1+2i} + \frac{1-i}{i}$
 - $z = \frac{1+i}{i} - \frac{i}{1-i}$
 - $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1}$
 - $z = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - \frac{2-4i}{1+i}$
- Determine $x \in \mathbb{R}$ para que $z = \frac{2x-x \cdot i}{1+2x \cdot i}$ seja:
 - real.
 - imaginário.
 - imaginário puro.
- Determine $z \in \mathbb{C}$ que satisfaz a condição:
 - $i \cdot z + 3(\bar{z}-1) - 6 = 11i$
 - $z^2 - i \cdot \bar{z} = 0$
- Determine $u \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}$ que satisfazem as condições:
 - $\begin{cases} \overline{u+v} = 4 + 2i \\ \overline{u-v} = -6 + 4i \end{cases}$
 - $\begin{cases} u^2 - v^2 = 5 + 3i \\ \overline{u-v} = -i \end{cases}$

INVENTE VOCÊ



- Invente uma equação para ser resolvida em \mathbb{C} cuja solução seja $\{-4i, 4i\}$. *Avalie as produções dos estudantes e utilize algumas delas para elaborar tarefas de casa ou listas complementares de exercícios.*
- Elabore exercícios sobre operações com números complexos.

Algumas atividades que apresentam números complexos em seus enunciados não requerem conhecimentos muito aprofundados sobre eles, mas sim a leitura, que permite relacionar números complexos a outros conteúdos. Esse é o caso da atividade a seguir.

(Cefet-MG) Os números complexos $z_1 = -1 - 3i$, $z_2 = -2 + bi$, com $b > 0$, e $z_3 = 4 + 2i$, em que i é a unidade imaginária, representados geometricamente no plano de Argand-Gauss, definem, respectivamente, o triângulo isósceles ABC, de base BC. A área desse triângulo, em unidades de área, é:

a) 15

b) 20

c) 25

d) 30

e) 35

Observe que, uma vez que os números complexos sejam identificados com pontos no plano de Argand-Gauss, o problema passa a ser de Geometria analítica.

Inicialmente, é preciso determinar a ordenada **b** do ponto correspondente a z_2 para que tenhamos um triângulo isósceles.

Se $A(-1, -3)$, $B(-2, b)$ e $C(4, 2)$, com $b > 0$, e $d(A, B) = d(A, C)$, calcule **b**.

Conhecido **b**, é preciso calcular a área do triângulo ABC, identificados os seus vértices. Retome o que você estudou sobre isso na unidade 2 e resolva a atividade. A alternativa correta é a **b**.

Muitas vezes, diante de um enunciado podemos desistir rapidamente porque nos enganamos em relação ao que é efetivamente solicitado. Essa atividade mostra que o conhecimento exigido sobre números complexos é muito simples; ela efetivamente avalia seus conhecimentos sobre Geometria analítica, além da leitura, é claro.

4 Módulo de um número complexo

Na parte sobre conjugados vimos que, se $z = a + bi$, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ é um número real.

Representando z e \bar{z} no plano complexo, temos, pelo Teorema de Pitágoras, que:

$$OP = OP' = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

Ou seja, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, no plano complexo, $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ representa a distância de z à origem do plano complexo.

Definimos então:

Módulo de um número complexo $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, que denotamos por $|z|$, é o número real não negativo $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$z = a + bi, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Note que $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

Algumas vezes, o módulo de z é indicado pela letra grega ρ (rô) ou pela letra r .

Como consequências da definição:

- $|z|$ é a distância do afixo de z à origem do plano;
- $|z| = |\bar{z}|$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Vale a pena destacar mais uma propriedade do módulo de números complexos.

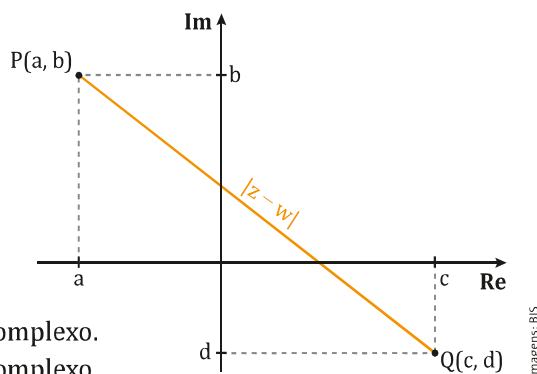
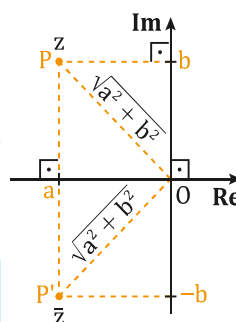
Se $z = a + bi$ e $w = c + di$ são dois números complexos quaisquer, vamos calcular:

$$|z - w| = |(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

Observando os afixos de z e w e lembrando a fórmula da distância de dois pontos no plano cartesiano, temos:

$|z - w|$ é igual à distância entre os afixos de z e de w no plano complexo.

Ou, simplificada, $|z - w|$ é a distância de z a w no plano complexo.



DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R7. Determine $z \in \mathbb{C}$ que satisfaz a condição:

$$|z| - i \cdot \bar{z} = 2 - 4i.$$

Resolução

Seja $z = x + yi$, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$; então,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } \bar{z} = x - yi.$$

Substituindo na equação dada, temos:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - i(x - yi) = 2 - 4i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - xi + yi^2 = 2 - 4i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - y - xi = 2 - 4i$$

Da definição de igualdade de números complexos, temos:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - y = 2 \\ -x = -4 \Rightarrow x = 4 \end{cases} \quad (1)$$

$x = 4$ em (1):

$$\sqrt{16 + y^2} - y = 2 \Rightarrow \sqrt{16 + y^2} = 2 + y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16 + y^2 = 4 + 4y + y^2 \Rightarrow y = 3$$

Portanto, $z = 4 + 3i$.

R8. Represente geometricamente, no plano de Argand-Gauss, os números complexos z que satisfazem a condição $|z - 3 - 2i| = |z - 1 - 4i|$.

Resolução

Seja $z = x + yi$, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$; então:

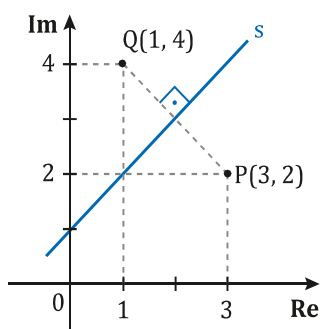
$$|x + yi - 3 - 2i| = |x + yi - 1 - 4i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x - 3) + (y - 2)i| = |(x - 1) + (y - 4)i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = (x - 1)^2 + (y - 4)^2 \Rightarrow x - y + 1 = 0$$

Portanto, os afijos $P(x, y)$ dos complexos $z = x + yi$ pertencem à reta s de equação $x - y + 1 = 0$.



Podemos resolver de outro modo, observando que:

- $|z - (3 + 2i)|$ é a distância entre o afixo de z e $P(3, 2)$.
- $|z - (1 + 4i)|$ é a distância entre o afixo de z e $Q(1, 4)$.

Daí, $|z - (3 + 2i)| = |z - (1 + 4i)|$ é a equação do conjunto dos pontos do plano complexo equidistantes de $P(3, 2)$ e de $Q(1, 4)$, ou seja, é a equação da mediatriz do segmento PQ .

R9. Represente geometricamente os números complexos z que satisfazem a condição:

a) $|z + 1 - i| = 1$

b) $|z + 1 - i| > 1$

Resolução

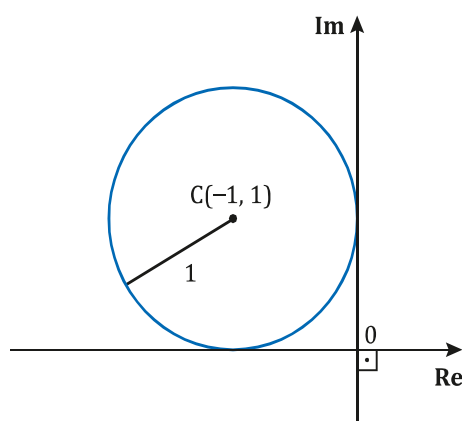
Seja $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

a) $|x + yi + 1 - i| = 1 \Rightarrow |(x + 1) + (y - 1)i| = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

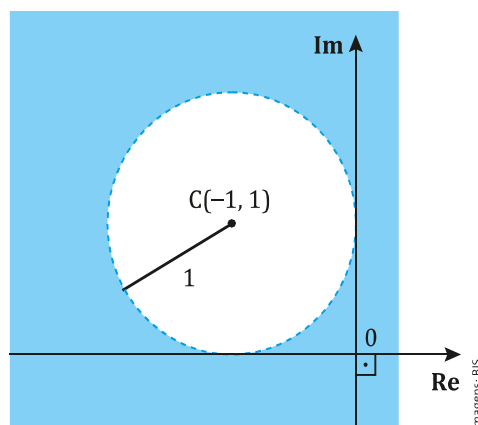
Temos, então, a circunferência de centro $C(-1, 1)$ e de raio $r = 1$.



b) $|x + yi + 1 - i| > 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 > 1$$

Temos, então, a região exterior à circunferência de centro $C(-1, 1)$ e de raio $r = 1$.



R10. Se $|z + 3 + 4i| = 6$, determine o menor valor de $|z|$.

Resolução

Pela desigualdade triangular, temos:

$$|z + (3 + 4i)| \leq |z| + |3 + 4i| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \leq |z| + \sqrt{3^2 + 4^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \leq |z| + 5 \Rightarrow |z| \geq 1 \Rightarrow |z|_{\text{mínimo}} = 1$$



19. Represente, no plano de Argand-Gauss, os números $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -4 + 2i$, $z_3 = -2 - 3i$, $z_4 = 1 - 4i$, $z_5 = 4$, $z_6 = 2i$, $z_7 = -3$ e $z_8 = -2i$.

20. Os pontos **A** e **B** são afijos, respectivamente, de $-1 + 3i$ e $2 - i$. Qual é a distância entre **A** e **B**?

21. Os pontos **A** e **B** são afijos de $z = 2 - 7i$ e $w = 1 + 3i$. Quais são as coordenadas do ponto médio de \overline{AB} ?

Na atividade 21, lembre como encontrar o ponto médio de um segmento no plano cartesiano.

22. Os pontos **A**, **B** e **C** são afijos de $2 + i$, $-1 + 3 - 2i$, respectivamente. De que tipo é o triângulo **ABC**?

23. Faça o que se pede a seguir.

- Represente, no plano de Argand-Gauss, os complexos $-2 + i$, $4i$, $\frac{7}{2} + 2i$, $\frac{3}{2} - i$.
- De que tipo é o quadrilátero **ABCD**?
- A atividade apresenta dados suficientes para se calcular a área desse quadrilátero? Em caso afirmativo, calcule-a.

24. Calcule os módulos de:

- $z = -16 + 12i$
- $z = -1 - i$
- $z = 50i$
- $z = -80$

25. Se $z_1 = -2 + i$ e $z_2 = -3 - i$, calcule:

- $|\overline{z}_1|$
- $|z_1 \cdot z_2|$
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right|$
- $|z_1 + z_2|$

26. Determine $z \in \mathbb{C}$ que satisfaz a condição:

- $|z| + i \cdot z = 1 - 3i$
- $z + |z| = 2 + i$

27. Determine os conjuntos de pontos descritos pelos afijos dos complexos z que satisfazem a condição:

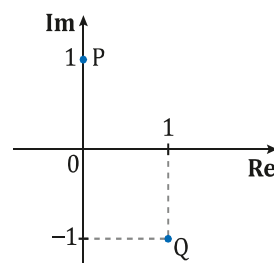
- $|z - 1 + i| = |z - i|$
- $|\overline{z} - 2 + 3i| = 4$
- $|z + 1 - 2i| \leq 1$
- $|z - 2i| > 3$

28. Considere os números complexos z que satisfazem a condição $|z + 6 - 8i| = 15$.

- Qual é o valor mínimo de $|z|$?
- Represente geometricamente z e identifique o afixo de z cujo módulo é mínimo.

29. (UFMT) O número complexo $z = a + bi$ é representado geometricamente por um ponto $P(a, b)$ no plano de Argand-Gauss que se denomina afixo. Seja $z = 2 + 3i$ e \overline{z} seu conjugado. Os afijos de z , \overline{z} , $-z$ e $-\overline{z}$, representados no plano de Argand-Gauss, são os vértices de um quadrilátero **Q**. Determine o perímetro de **Q**.

30. (PUCC-SP) Considere os números complexos z_1 e z_2 , cujas imagens são, respectivamente, os pontos **P** e **Q** representados na figura.



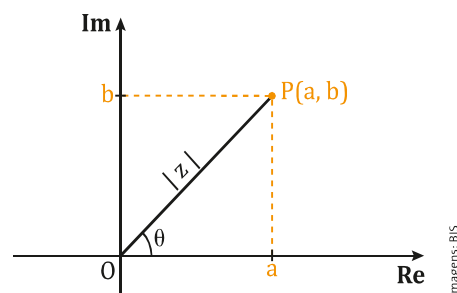
Determine o número complexo $z = z_1^3 \cdot \overline{z}_2$, no qual \overline{z}_2 é o conjugado de z_2 .

5 Forma trigonométrica de um número complexo

Se $z = a + bi$ é um número complexo qualquer, vamos considerar o arco θ , em radianos, formado entre o eixo real e a semirreta de origem **O** e que passa pelo afixo $P(a, b)$ do número z , orientado da direção positiva do eixo real até essa semirreta.

Se z está no 1º quadrante do plano complexo, temos:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \text{ e } \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$



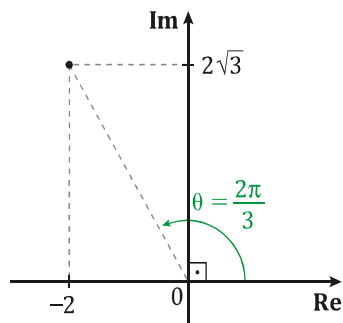
Nos demais quadrantes vale o mesmo. Observe nos exemplos:

a) $z = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i$

Temos: $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4,$

$\cos \theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}, \text{ sen } \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

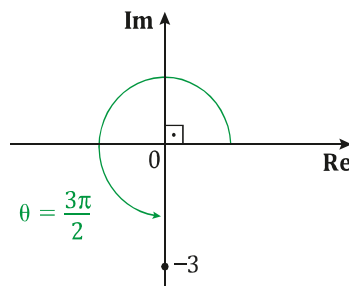
e $\theta = \frac{2\pi}{3}.$



b) $z = -3i$

Temos: $|z| = 3, \cos \theta = \frac{0}{3} = 0,$

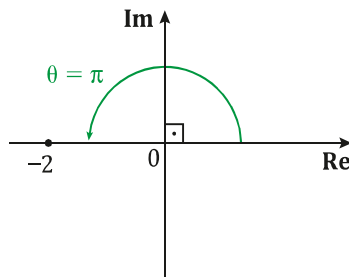
$\text{sen } \theta = -\frac{3}{3} = -1 \text{ e } \theta = \frac{3\pi}{2}.$



c) $z = -2$

Temos: $|z| = 2, \cos \theta = -\frac{2}{2} = -1,$

$\text{sen } \theta = \frac{0}{2} = 0 \text{ e } \theta = \pi.$



Imagens: BLS

Podemos definir então:

Argumento de um número complexo $z = a + bi$, não nulo, é um número θ que satisfaz as condições:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \text{ e } \text{sen } \theta = \frac{b}{|z|}$$

Note que θ fica determinado a menos de um número de voltas inteiras no ciclo trigonométrico.

O valor θ_0 de θ , tal que $0 \leq \theta_0 < 2\pi$, é chamado de **argumento principal** de z .

Algumas vezes, denotamos um argumento de z por $\arg(z)$.

Nos exemplos anteriores, temos:

a) Se $z = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i$, o argumento principal de z é $\frac{2\pi}{3}$ (ou 120°), e os argumentos são expressos por $\theta = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ (ou $\theta = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$), $k \in \mathbb{Z}$.

b) Para $z = -3i$, o argumento principal de z é $\frac{3\pi}{2}$ (ou 270°), e os argumentos são dados por $\theta = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ (ou $\theta = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$), $k \in \mathbb{Z}$.

c) Para $z = -2$, o argumento principal de z é π (ou 180°), e os argumentos são dados por $\theta = \pi + k \cdot 2\pi$ (ou $\theta = 180^\circ + k \cdot 360^\circ$), $k \in \mathbb{Z}$.

Forma polar ou trigonométrica de um número complexo

Seja θ um argumento de $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}^*$ ou $b \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{De } \begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} \end{cases} \quad \text{vem: } \begin{cases} a = |z| \cdot \cos \theta \\ b = |z| \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Logo, $z = a + bi$ pode ser escrito:

$$z = |z| \cdot \cos \theta + |z| \cdot \sin \theta \cdot i$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

que é denominada forma **polar** ou **trigonométrica** de $z = a + bi$.

A forma polar ou trigonométrica dos números complexos tem a vantagem de permitir a rápida visualização de um ponto no plano complexo, além de facilitar o cálculo do produto, do quociente e, especialmente, a potenciação e a radiciação de números complexos.

Exemplos:

a) Se $z = 3 + 3i$, então $|z| = 3\sqrt{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e um argumento de z é $\frac{\pi}{4}$.

Portanto, uma forma polar de $z = 3 + 3i$ é $z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

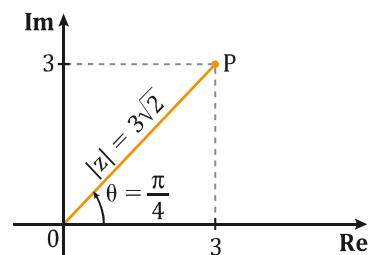
Podemos também escrever:

$$z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{9\pi}{4} \right)$$

$$z = 3\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{7\pi}{4} \right) + i \cdot \sin \left(-\frac{7\pi}{4} \right) \right]$$

$$z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{17\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{17\pi}{4} \right)$$

$$z = 3\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \right) \right], k \in \mathbb{Z}$$



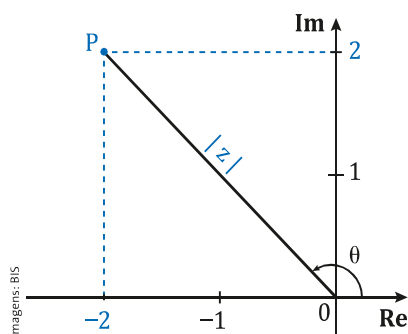
b) Se $z = -2\sqrt{3} - 2i$, então $|z| = 4$, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \theta = -\frac{1}{2}$ e um argumento é $\frac{7\pi}{6}$.

Portanto, uma forma polar é $z = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{6} \right)$.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R11. Escreva $z = -2 + 2i$ na forma trigonométrica.

Resolução



O afixo de $z = -2 + 2i$ é $P(-2, 2)$.

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

O argumento θ é tal que:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para $0 \leq \theta < 2\pi$, temos $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

E uma forma trigonométrica é dada por:

$$z = |z|(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$$

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

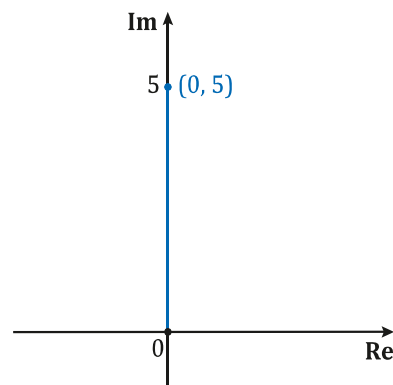
R12. Obtenha a forma algébrica do número complexo $z = 5(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$ e represente-o no plano de Argand-Gauss.

Resolução

Sabemos que $\cos 90^\circ = 0$ e $\sin 90^\circ = 1$.

Então, $z = 5(\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ) = 5(0 + 1 \cdot i) = 5i$.

Como $a = 0$, a representação no plano é da figura ao lado.



FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



31. Calcule o argumento principal de cada número complexo.

- | | |
|----------------------------|---------------------------------|
| a) $z = 10 + 10i$ | d) $z = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i$ |
| b) $z = 8$ | e) $z = -1 - i$ |
| c) $z = -10\sqrt{3} + 10i$ | f) $z = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ |

32. Represente z na forma trigonométrica.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------|
| a) $z = \sqrt{3} + i$ | d) $z = -4$ |
| b) $z = 6 + 6\sqrt{3} \cdot i$ | e) $z = 10i$ |
| c) $z = -3 + 3i$ | f) $z = -2\sqrt{3} - 2i$ |

33. Represente z na forma algébrica.

- a) $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right)$
 b) $z = 6 (\cos 2730^\circ + i \cdot \sin 2730^\circ)$
 c) $z = \sqrt{8} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4} \right)$

34. Determine as partes real e imaginária dos complexos a seguir, dados o módulo $|z|$ e o argumento θ .

- a) $|z| = 10$ e $\theta = 2\pi$
 b) $|z| = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$
 c) $|z| = \sqrt{2}$ e $\theta = 135^\circ$
 d) $|z| = 2$ e $\theta = -90^\circ$

35. Indique a forma algébrica de z .

- a) $z = \sqrt{3} (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)$
 b) $z = 10 (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$

36. Represente os números da atividade 35 no plano de Argand-Gauss.

37. (ITA-SP) Se $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

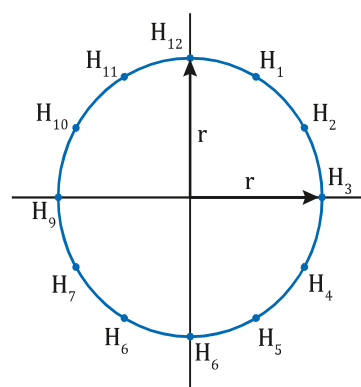
- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) $-\frac{\pi}{2}$ | c) $\frac{\pi}{2}$ | e) $\frac{7\pi}{4}$ |
| b) $\frac{\pi}{4}$ | d) $\frac{3\pi}{4}$ | |

38. Qual é a representação de todos os números complexos que têm módulo igual a uma constante, como, por exemplo, $|z| = 2$?

39. Qual é a representação de todos os números complexos que têm argumento igual a uma constante, como, por exemplo, $\theta = \frac{\pi}{3}$?

40. Imagine um relógio no qual as horas são marcadas por doze pontos do ciclo trigonométrico.

- a) Indique os afijos dos doze pontos.
 b) Indique os números complexos que representam cada ponto sob a forma algébrica e também trigonométrica.



Imagens: B15

INVENTE VOCÊ

REGISTRE
NO CADERNO



- 3.** Elabore um problema sobre números complexos cuja pergunta seja: Qual é o módulo e qual é o argumento de $z + \bar{z}$?
- 4.** Elabore um problema envolvendo representação gráfica e afixo de número complexo.

Multiplicação e divisão na forma polar

Sejam $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \cdot \sin \theta_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \cdot \sin \theta_2)$ dois números complexos não nulos.

Vamos calcular $z_1 \cdot z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \\ &= |z_1| \cdot |z_2| (\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i \cdot \cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + i \cdot \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2 + i^2 \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2) = \\ &= |z_1| \cdot |z_2| [\underbrace{(\cos \theta_1 \cdot \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \cdot \sin \theta_2)}_{\cos(\theta_1 + \theta_2)} + i \underbrace{(\cos \theta_1 \cdot \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cdot \cos \theta_2)}_{\sin(\theta_1 + \theta_2)}] \end{aligned}$$

Portanto:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

Na prática, multiplicamos os módulos e somamos os argumentos dos dois números.

O resultado obtido é válido também para o produto de três ou mais fatores.

De forma análoga:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

Na prática, dividimos os módulos e subtraímos os argumentos.

Exemplo:

Se $z_1 = 12(\cos 40^\circ + i \cdot \sin 40^\circ)$ e $z_2 = 4(\cos 25^\circ + i \cdot \sin 25^\circ)$, temos:

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot 4(\cos(40^\circ + 25^\circ) + i \cdot \sin(40^\circ + 25^\circ)) = 48(\cos 65^\circ + i \cdot \sin 65^\circ)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{4} (\cos(40^\circ - 25^\circ) + i \cdot \sin(40^\circ - 25^\circ)) = 3(\cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ)$$

PARA COMPLEMENTAR

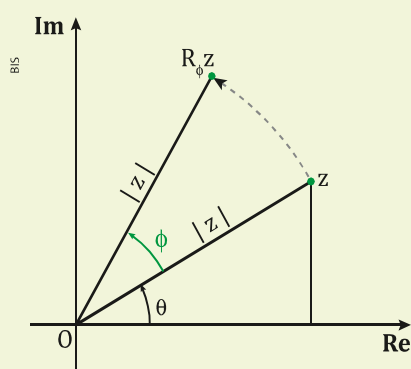
Números complexos e simetria Nesta leitura é possível estabelecer uma integração entre Matemática e Arte.

A multiplicação de um número complexo $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ por um complexo da forma $R_\phi = \cos \phi + i \cdot \sin \phi$, de módulo 1, produz como resultado:

$$R_\phi \cdot z = |z| \cdot (\cos(\theta + \phi) + i \cdot \sin(\theta + \phi)),$$

que é um número com o mesmo módulo de z , mas com argumento igual à soma dos argumentos de z e R_ϕ .

No plano complexo, isso corresponde a uma rotação do ponto z por um ângulo ϕ em torno da origem.

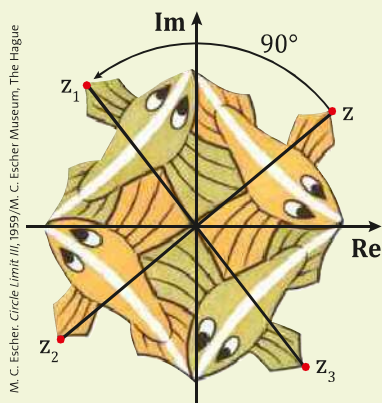


A rotação pode ser pensada como uma função.

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto R_\phi \cdot z \end{aligned}$$

A rotação de imagens foi um dos recursos usados pelo artista Maurits C. Escher em suas obras. Observe que os quatro peixes do centro do quadro *Limite circular III* correspondem à rotação de 90° em torno da origem dos pontos de cada figura.

No plano complexo, temos:

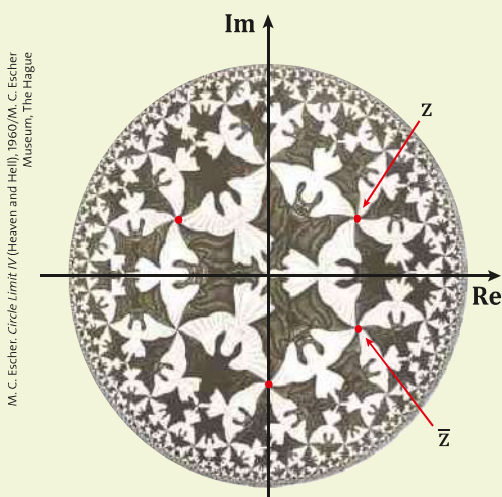


M. C. Escher, *Circle Limit III*, 1959/M. C. Escher Museum, The Hague

$$z_1 = z \cdot (\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ)$$

$$\begin{cases} z_1 = z \cdot i, \text{ ou seja, } R_{90^\circ} = i \\ z_2 = z_1 \cdot i \\ z_3 = z_2 \cdot i \\ z = z_3 \cdot i \end{cases}$$

E o mesmo vale para todo ponto e seu correspondente nas quatro figuras.



M. C. Escher, *Circle Limit IV* (Heaven and Hell), 1960/M. C. Escher Museum, The Hague

Na obra *Limite circular IV* (céu e inferno) ao lado, investigue por quais números deve ser multiplicado o número que corresponde ao ponto indicado no 1º quadrante para obtermos seu correspondente no 2º quadrante e sobre o eixo imaginário.

A multiplicação de números complexos também corresponde à reflexão de um ponto z em relação a uma reta r que passa pela origem e forma um ângulo ϕ com Re .

O ponto simétrico de z em relação à reta r pode ser obtido pela rotação do conjugado \bar{z} de z em torno da origem do ângulo.

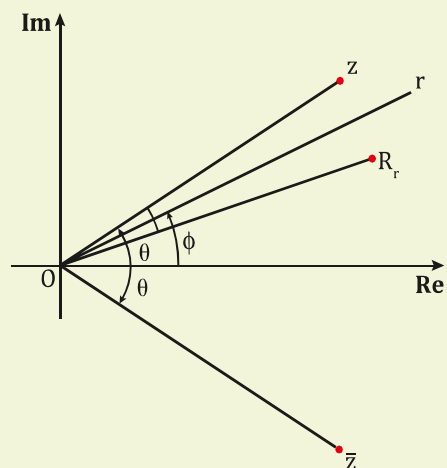
$$2\theta - 2(\theta - \phi) = 2\phi$$

Então, se $R_r = \cos 2\phi + i \cdot \sin 2\phi$, a reflexão pode ser considerada como a função:

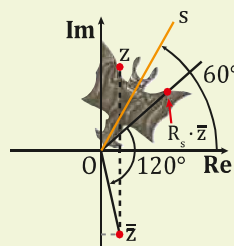
$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto R_r \cdot \bar{z} \end{aligned}$$

Ao lado, destacamos uma figura que aparece na obra *Limite circular IV* (acima). Essa figura é simétrica em relação à reta que passa pela origem e tem inclinação de 60° . Assim, cada ponto de uma das metades da figura pode ser obtido como o produto do conjugado do ponto simétrico a ele em relação a s por:

$$R_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$



BIS



M. C. Escher, *Circle Limit IV* (Heaven and Hell), 1960/M. C. Escher Museum, The Hague

Potenciação de números complexos na forma trigonométrica ou polar

conteúdo opcional

Se $z = |z|(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ é não nulo, então:

$$z^2 = z \cdot z = |z| \cdot |z| [\cos (\theta + \theta) + i \cdot \sin (\theta + \theta)]$$

$$z^2 = |z|^2 [\cos (2\theta) + i \cdot \sin (2\theta)]$$

De forma análoga (não provaremos aqui), calculamos z^3, z^4, z^5 etc.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos escrever:

$$z^n = |z|^n [\cos (n\theta) + i \cdot \sin (n\theta)]$$

que é chamada de **primeira fórmula de De Moivre**.

Vamos estender a relação obtida para expoente inteiro negativo. Sendo n inteiro positivo, temos:

$$\begin{aligned} z^{-n} &= \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^n [\cos (n\theta) + i \cdot \sin (n\theta)]} = \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{1}{\cos (n\theta) + i \cdot \sin (n\theta)} \cdot \frac{\cos (n\theta) - i \cdot \sin (n\theta)}{\cos (n\theta) - i \cdot \sin (n\theta)} = \\ &= \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{\cos (n\theta) - i \cdot \sin (n\theta)}{\cos^2 (n\theta) + \sin^2 (n\theta)} = |z|^{-n} [\cos (-n\theta) + i \cdot \sin (-n\theta)] \end{aligned}$$

Portanto:

$$z^n = |z|^n [\cos (n\theta) + i \cdot \sin (n\theta)], n \in \mathbb{Z}$$

Na prática, elevamos o módulo à potência n e multiplicamos o argumento por n .

Exemplo:

Se $z = 2 (\cos 20^\circ + i \cdot \sin 20^\circ)$, então:

$$z^2 = 2^2 (\cos (2 \cdot 20^\circ) + i \cdot \sin (2 \cdot 20^\circ)) = 4 (\cos 40^\circ + i \cdot \sin 40^\circ)$$

$$z^3 = 2^3 (\cos (3 \cdot 20^\circ) + i \cdot \sin (3 \cdot 20^\circ)) = 8 (\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ)$$

$$\begin{aligned} z^{500} &= 2^{500} (\cos (500 \cdot 20^\circ) + i \cdot \sin (500 \cdot 20^\circ)) = \\ &= 2^{500} (\cos 10000^\circ + i \cdot \sin 10000^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^{-10} &= 2^{-10} (\cos (-10 \cdot 20^\circ) + i \cdot \sin (-10 \cdot 20^\circ)) = \\ &= 2^{-10} (\cos (-200^\circ) + i \cdot \sin (-200^\circ)) \end{aligned}$$

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R13. Seja $z = (\sqrt{3} + i)^n$, com $n \in \mathbb{Z}$. Determine:

a) n para que z seja imaginário puro.

b) n para que z seja real negativo.

Resolução

Vamos, inicialmente, escrever $\sqrt{3} + i$ na forma polar.

$\sqrt{3} + i$ tem módulo 2 e argumento principal $\frac{\pi}{6}$; logo:

$$\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

Pela primeira fórmula de De Moivre, temos:

$$z = 2^n \left[\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \right]$$

a) z é imaginário puro $\Leftrightarrow \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 3 + 6k, k \in \mathbb{Z}.$$

Atribuindo alguns valores a k , temos:

k	0	1	2	3	-1	-2	-3
n	3	9	15	21	-3	-9	-15

Portanto, $n = \pm 3; \pm 9; \pm 15; \pm 21; \dots$

b) z é real negativo $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \\ \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) < 0 \end{cases}$

Os arcos de medida $\frac{n\pi}{6}$ que satisfazem as duas condições são côngruos aos arcos de medida π ; então:

$$\frac{n\pi}{6} = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6 + 12k, k \in \mathbb{Z}.$$

Atribuindo alguns valores a $k \in \mathbb{Z}$, temos:

k	0	1	2	3	-1	-2	-3
n	6	18	30	42	-6	-18	-30

Portanto, $k = \pm 6; \pm 18; \pm 30; \dots$

R14. Dos números complexos z que satisfazem a condição $|z + 2 + 2i| \leq 2$, determine:

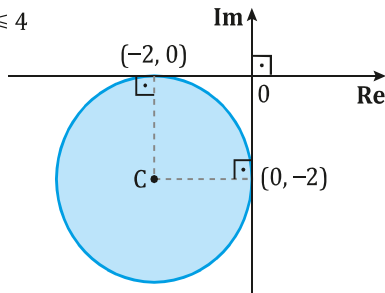
- o de menor argumento principal.
- o de maior argumento principal.
- o de menor módulo.
- o de maior módulo.

Resolução

Seja $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$. Então:

$$|(x + 2) + (y + 2)i| \leq 2 \Rightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 2)^2} \leq 2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 2)^2 \leq 4$$

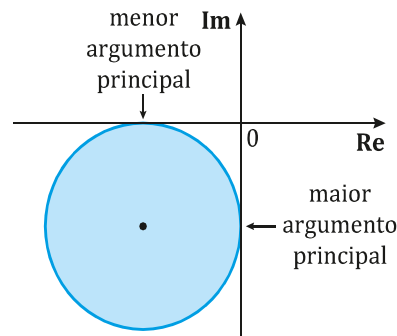
Os afijos de z que satisfazem a condição pertencem ao círculo de centro $C(-2, -2)$ e de raio 2.



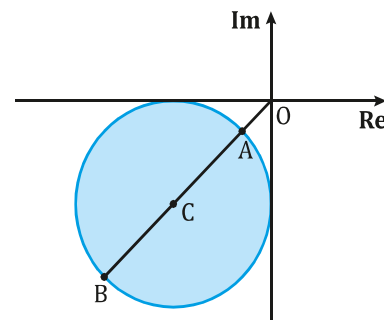
- a) Os complexos z da questão têm argumentos principais no intervalo $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Logo, o de menor argumento principal π tem afixo $(-2, 0)$, ou seja, é o complexo $z = -2 + 0i = -2$.

- b) O complexo z de maior argumento principal $\frac{3\pi}{2}$ tem afixo $(0, -2)$, ou seja, $z = -2i$.



- c) As interseções de \overrightarrow{OC} com a circunferência nos fornecem os pontos do círculo mais próximo (A) e mais distante (B) de O.



O complexo z de menor módulo tem afixo A e argumento $\frac{5\pi}{4}$:

$$|z| = d_{OA} = d_{OC} - d_{AC},$$

$$\text{em que } d_{OC} = 2\sqrt{2} \text{ e } d_{AC} = r = 2.$$

$$\text{Logo, } |z| = 2\sqrt{2} - 2.$$

$$\text{Portanto, } z = 2(\sqrt{2} - 1)\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4}\right).$$

- d) O complexo z de maior módulo tem afixo B e argumento $\frac{5\pi}{4}$:

$$|z| = d_{OB} = d_{OC} + d_{CB}, \text{ em que } d_{OC} = 2\sqrt{2} \text{ e } d_{CB} = r = 2.$$

$$\text{Logo, } |z| = 2(\sqrt{2} + 1).$$

$$\text{Portanto, } z = 2(\sqrt{2} + 1)\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4}\right).$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



41. Sejam $z_1 = 10(\cos 70^\circ + i \cdot \sin 70^\circ)$ e $z_2 = 5(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$. Calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$ c) $z_2 : z_1$ d) $\frac{1}{z_2}$

42. Sejam os números complexos z, u e v tais que $|z| = 4, |u| = 1, |v| = 2, \arg(z) = \frac{\pi}{3}, \arg(u) = \frac{\pi}{6}$ e $\arg(v) = \frac{5\pi}{6}$. Determine a forma algébrica de:

a) $z \cdot u \cdot v$ b) $\frac{u \cdot v}{z}$ c) $\frac{z \cdot v}{u}$ d) $\frac{v}{z \cdot v}$

43. Seja $z = 2 + 2i$.

- Determine z na forma polar.
- Obtenha z^8, z^{17}, z^{26} e z^{39} na forma algébrica.

44. Seja $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} - i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right)$.

- Determine z na forma trigonométrica.
- Obtenha z^{-1} e z^{-10} na forma algébrica.

45. Seja $z = (1 + \sqrt{3} \cdot i)^n, n \in \mathbb{Z}$. Determine:

- n para que z seja real.
- o menor valor de n natural para que z seja real negativo.

46. Seja $z = (1 + i)^n$. Determine:

- n inteiro para que z seja imaginário puro com coeficiente negativo.
- o menor n natural para que z seja imaginário puro.

47. Considere os números complexos z que satisfazem a condição $|z + 1 + i| \leq 1$. Determine z de:

- a) menor argumento principal;
- b) maior argumento principal;
- c) menor módulo;
- d) maior módulo.

48. Seja $z = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$. Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, mostre que:

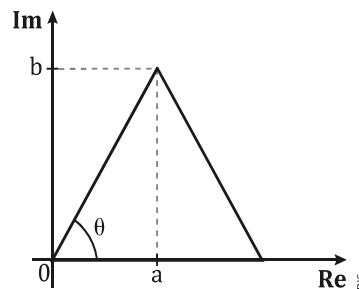
- a) $z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos(n\theta)$;
- b) $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \cdot \sin(n\theta)$.

49. Mostre que $\cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ$ é solução da equação $2x^{10} - x^6 + \sqrt{3} = 0$.

50. Seja $z \in \mathbb{C}^*$ tal que $\frac{i \cdot z}{\bar{z}}$ é real. Mostre que:

- a) $|z| = |\operatorname{Re}(z)| \cdot \sqrt{2}$;
- b) o argumento principal de z é $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$.

51. (AFA-SP) O número complexo $z = a + bi$ é vértice de um triângulo equilátero, como mostra a figura a seguir.



É correto afirmar que o conjugado de z^2 tem afixo que pertence ao:

- a) 1º quadrante.
- b) 2º quadrante.
- c) 3º quadrante.
- d) 4º quadrante.

52. (UFRGS-RS) O menor número inteiro positivo n para o qual a parte imaginária do número complexo $\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \cdot \sin \frac{\pi}{8}\right)^n$ é negativa é:

- a) 3
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 9

Radiciação de números complexos

conteúdo opcional

Vamos fazer alguns cálculos:

1) $(1 - 2i)^2 = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2i + (2i)^2 = -3 - 4i$

$(-1 + 2i)^2 = (-1)^2 + 2(-1)2i + (2i)^2 = -3 - 4i$

Dizemos que $1 - 2i$ e $-1 + 2i$ são raízes quadradas de $-3 - 4i$.

2) $2^3 = 8$

$(-1 + \sqrt{3} \cdot i)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot i + 3(-1)(\sqrt{3} \cdot i)^2 + (\sqrt{3} \cdot i)^3 =$
 $= -1 + 3\sqrt{3} \cdot i + 9 - 3\sqrt{3} \cdot i = 8$

$(-1 - \sqrt{3} \cdot i)^3 = (-1)^3 - 3(-1)^2 \cdot \sqrt{3} \cdot i + 3(-1)(\sqrt{3} \cdot i)^2 - (\sqrt{3} \cdot i)^3 =$
 $= -1 - 3\sqrt{3} \cdot i + 9 + 3\sqrt{3} \cdot i = 8$

Dizemos que 2 , $-1 + \sqrt{3} \cdot i$ e $-1 - \sqrt{3} \cdot i$ são raízes cúbicas de 8 .

3) $1^4 = 1$

$(-1)^4 = 1$

$i^4 = 1$

$(-i)^4 = i^4 = 1$

Dizemos que 1 , -1 , i e $-i$ são raízes quartas de 1 .

Quantas são as raízes n -ésimas de um número complexo z e como determiná-las?

Vejamos a seguir as soluções a essas indagações.

Um número complexo w é raiz n -ésima ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) de um número complexo z se, e somente se, $w^n = z$.

Seja $w = |w|(\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha)$ uma raiz n -ésima de $z = |z|(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$, não nulo.

Então:

$w^n = z \Leftrightarrow |w|^n [\cos(n\alpha) + i \cdot \sin(n\alpha)] = |z|(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$

Da última igualdade, obtemos:

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \begin{cases} \cos(n\alpha) = \cos \theta \\ \sin(n\alpha) = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow n\alpha = \theta + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Logo:

$$w = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right]$$

Essa relação é conhecida como **segunda fórmula de De Moivre**.

Admitindo que θ seja o argumento principal de z , vamos determinar os valores de w , indicando-os por w_k , de acordo com o valor atribuído a k :

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \frac{\theta}{n} + i \cdot \sin \frac{\theta}{n} \right]$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) \right]$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n} \right) \right]$$

$$k = n-1 \Rightarrow w_{n-1} = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{(n-1)2\pi}{n} \right) \right]$$

Todos esses argumentos pertencem ao intervalo $[0, 2\pi[$ e são distintos entre si; logo, $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ são distintos entre si.

Continuando a atribuir valores a k , notamos que:

$$w_n = w_0, w_{n+1} = w_1, w_{n+2} = w_2 \text{ etc.}$$

Podemos, então, concluir que:

Todo número complexo $z = |z|(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)$ não nulo tem n raízes n -ésimas distintas entre si, que são dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right],$$

com $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Para determinar as n raízes de z , ou seja, $\sqrt[n]{z}$, podemos atribuir a k valores diferentes dos citados, mas desde que sejam n valores inteiros consecutivos.

Exemplo:

Vamos calcular as raízes quartas de $z = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i$.

Temos: $|z| = 16$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, e o argumento principal é 240° .

Logo, $z = 16 (\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ)$.

Aplicando a segunda fórmula de De Moivre, obtemos:

$$w_k = \sqrt[4]{16} \left[\cos \frac{240^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} + i \cdot \sin \frac{240^\circ + k \cdot 360^\circ}{4} \right]$$

$$w_k = 2 [\cos (60^\circ + k \cdot 90^\circ) + i \cdot \sin (60^\circ + k \cdot 90^\circ)]$$

$$k = 0 \Rightarrow w_0 = 2 [\cos 60^\circ + i \cdot \sin 60^\circ] = 2 \left[\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \Rightarrow w_0 = 1 + \sqrt{3} \cdot i$$

$$k = 1 \Rightarrow w_1 = 2 [\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ] = 2 \left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2} \right] \Rightarrow w_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2 \Rightarrow w_2 = 2 [\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ] = 2 \left[-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \Rightarrow w_2 = -1 - \sqrt{3} \cdot i$$

$$k = 3 \Rightarrow w_3 = 2 [\cos 330^\circ + i \cdot \sin 330^\circ] = 2 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2} \right] \Rightarrow w_3 = \sqrt{3} - i$$

Portanto, as raízes quartas de $-8 - 8\sqrt{3} \cdot i$ são $1 + \sqrt{3} \cdot i$; $-\sqrt{3} + i$; $-1 - \sqrt{3} \cdot i$ e $\sqrt{3} - i$.

Propriedades das raízes n-ésimas de um número complexo

As raízes n-ésimas de um número complexo não nulo $z = |z|(\cos \theta + i \cdot \operatorname{sen} \theta)$ são dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|} \left[\cos \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen} \frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n} \right], \text{ com } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Observe que:

1) $|w_0| = |w_1| = |w_2| = \dots = |w_{n-1}|$

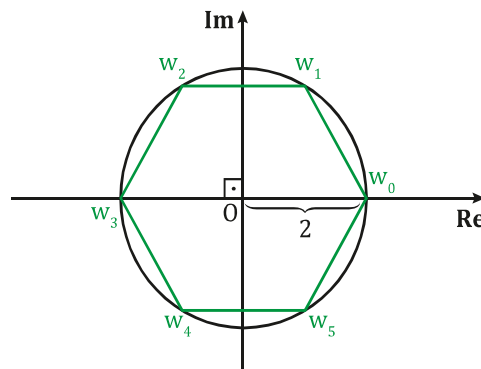
Geometricamente, isso significa que os afixos de $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ pertencem à circunferência centrada na origem do plano complexo e de raio $\sqrt[n]{|z|}$.

2) $\arg(w_j) - \arg(w_{j-1}) = \frac{2\pi}{n}, 0 < j \leq n-1$

Geometricamente, isso significa que a circunferência citada fica dividida em n partes congruentes entre si, cada uma de comprimento $\frac{2\pi \cdot |w_k|}{n}$.

Em outras palavras:

- os afixos das raízes n-ésimas de z não nulo são vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt[n]{|z|}$;
- os argumentos das raízes formam uma P.A. de razão $\frac{2\pi}{n}$.



Os afixos das raízes sextas de $z = 64$ são vértices de um hexágono regular inscrito na circunferência de centro O e de raio 2.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R15. Faça o que se pede a seguir:

- Calcule as raízes quadradas de $-3 + 4i$.
- Resolva a equação $z^2 - (3 + 4i)z - 1 + 5i = 0$.

Resolução

a) Seja $w = a + b \cdot i$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, uma raiz quadrada de $-3 + 4i$; então:

$$w^2 = -3 + 4i \Rightarrow (a + b \cdot i)^2 = -3 + 4i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2a \cdot b \cdot i = -3 + 4i$$

Da última igualdade, temos:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 1$, $b = 2$ ou $a = -1$, $b = -2$.

Portanto, $w = 1 + 2i$ ou $w = -1 - 2i$.

b) $\Delta = [-(3 + 4i)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1 + 5i) = -3 + 4i$
Pela fórmula de Bhaskara, $z = \frac{(3 + 4i) \pm w}{2}$.

Logo:

$$z = \frac{(3 + 4i) + (1 + 2i)}{2} = 2 + 3i \text{ ou}$$

$$z = \frac{(3 + 4i) - (1 + 2i)}{2} = 1 + i$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{2 + 3i, 1 + i\}$.

R16. Uma das raízes quartas de um número complexo z é $w_0 = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i$. Determine as outras raízes quartas de z e o complexo z .

Resolução

Seja α_0 o argumento principal de w_0 ; então:

$$|w_0| = 4, \cos \alpha_0 = -\frac{1}{2}, \operatorname{sen} \alpha_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } \alpha_0 = 120^\circ$$

Os afixos de w_0 e das demais raízes w_1, w_2 e w_3 de z são vértices de um quadrado inscrito na circunferência centrada na origem e de raio 4.

Os argumentos principais de w_1, w_2 e w_3 são, respectivamente, $120^\circ + 90^\circ$, $120^\circ + 180^\circ$ e $120^\circ - 90^\circ$, ou seja, $210^\circ, 300^\circ$ e 30° ; logo:

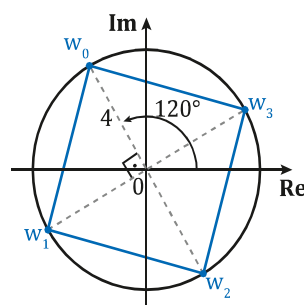
$$w_1 = 4 (\cos 210^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 210^\circ) = -2\sqrt{3} - 2i$$

$$w_2 = 4 (\cos 300^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 300^\circ) = 2 - 2\sqrt{3} \cdot i$$

$$w_3 = 4 (\cos 30^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 30^\circ) = 2\sqrt{3} + 2i$$

Para determinarmos z , basta elevar uma de suas raízes quartas à quarta potência.

$$z = (w_3)^4 \Rightarrow z = 4^4 (\cos 120^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 120^\circ) = -128 + 128\sqrt{3} \cdot i$$



Imagens: BLS



53. Aplicando a definição, calcule as raízes quadradas de:

- a) $5 + 12i$ c) i
b) $12 + 16i$ d) $-2i$

54. Resolva as equações.

- a) $z^2 - (2 + 8i)z - 15 = 0$
b) $z^2 - (-1 + 2i)z - 7 - i = 0$

55. Calcule as raízes cúbicas de:

- a) $-i$ b) i c) -8 d) 1

56. Determine as raízes quartas de:

- a) $-32 + 32\sqrt{3} \cdot i$
b) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

57. Uma das raízes quadradas de um número z é $-2 + 3i$. Determine a outra raiz quadrada de z e o número z .

58. Uma das raízes sextas de um número z é $-2i$. Determine as outras raízes sextas de z .

59. Resolva em \mathbb{C} as equações.

- a) $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$ c) $(x + 2 + i)^4 = 81$
b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ d) $(2x + 4i)^2 = 8i$

60. Determine as raízes cúbicas de 8 e dê a sua representação geométrica.

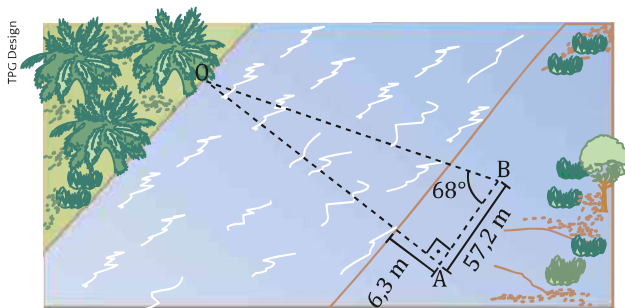
61. Determine as raízes quadradas do número complexo $z = 5 - 12i$ e dê a sua representação geométrica.

62. (Insper-SP) No conjunto dos números complexos, o número 1 apresenta três raízes cúbicas: $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Os pontos que correspondem às representações desses três números no plano de Argand-Gauss são vértices de um triângulo de área:

- a) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ c) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) 1
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{3}$

FOCO NA TECNOLOGIA

1. Analise as medições feitas por um agrimensor e calcule a largura do rio.



2. A distribuição de salários, em reais, de uma empresa é mostrada na tabela a seguir.

a) Qual é a média e qual é a mediana dessa distribuição de salários?

b) Suponha que sejam contratados dois novos funcionários com salário de R\$ 2 000,00 cada um. A variância da nova distribuição de salários ficará menor, igual ou maior que a anterior?

Salário	Número de funcionários
R\$ 500,00	10
R\$ 1 000,00	5
R\$ 1 500,00	1
R\$ 2 000,00	10
R\$ 5 000,00	4
R\$ 10 500,00	1
Total	31

Calculadora



PALAVRAS-CHAVE



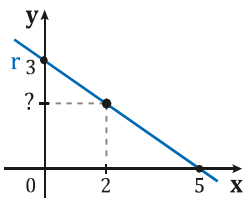
Escreva sobre estas ideias, tentando destacar os pontos mais significativos para você.

- Números complexos
- Forma algébrica
- Plano de Argand-Gauss
- Módulo
- Forma trigonométrica



A seguir encontra-se uma miscelânea de atividades de conteúdos e temas bem variados. Propomos que, antes de resolver cada uma delas, você escreva os nomes dos conteúdos matemáticos que são necessários na resolução e compare com um colega. Discutam os porquês de suas escolhas e busquem esclarecer as eventuais discordâncias entre vocês. Esse é um modo eficaz para aprender.

1. Observe o gráfico ao lado.
- a) Determine a função f cujo gráfico é a reta r .
- b) Estude o sinal da função.
- c) Dê o domínio e a imagem de f .



2. Um observador, do alto da torre de uma plataforma marítima de petróleo, a uma altura de 50 m, avista um barco. Sabendo que o ângulo de depressão em relação à proa do barco é de 60° , a que distância da plataforma o barco está?

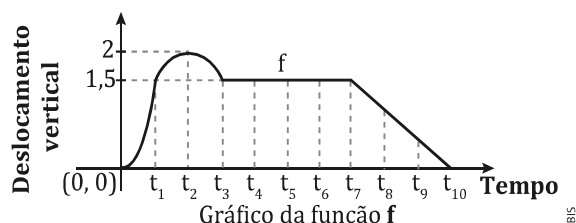
3. (UERJ) Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R\$ 65,00. Veja na tabela os preços da água por embalagem:

Volume da embalagem (L)	20	10	2
Preço (R\$)	10,00	6,00	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a n . O valor de n é um divisor de:

- a) 32 b) 65 c) 77 d) 81
4. Usando a regra de Cramer, discuta os sistemas:
- a) $\begin{cases} a + b + c = 12 \\ 3a - b + 2c = 14 \\ 2a - 2b + c = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x - 3y + z = 3 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 5x - 2y + 3z = 2 \end{cases}$

5. (UEL-PR) O gráfico de uma função f mostra o deslocamento vertical de um surfista sobre uma onda, em função do tempo.



Com base no gráfico e nos conhecimentos sobre funções, considere as afirmativas a seguir.

- I. Para todo $t \in (t_3, t_7)$, f é constante.
- II. Para todo $t \in (0, t_3)$, $f(t) = \cos t + 2$.
- III. Para todo $t \in (t_7, t_{10})$, $f(t) = m \cdot t + b$, onde $m > 0$.
- IV. A função f assume seu valor máximo em $t = t_2$.

Assinale a alternativa correta.

- a) Somente as afirmativas I e III são corretas.
- b) Somente as afirmativas I e IV são corretas.
- c) Somente as afirmativas II e III são corretas.
- d) Somente as afirmativas I, II e IV são corretas.
- e) Somente as afirmativas II, III e IV são corretas.
6. (Insper-SP) Dois faraós do antigo Egito mandaram construir seus túmulos, ambos na forma de pirâmides quadrangulares regulares, num mesmo terreno plano, com os centros de suas bases distando 120 m. As duas pirâmides têm o mesmo volume, mas a área da base de uma delas é o dobro da área da base da outra. Se a pirâmide mais alta tem 100 m de altura, então a distância entre os vértices das duas pirâmides, em metros, é igual a:
- a) 100 b) 120 c) 130 d) 150 e) 160

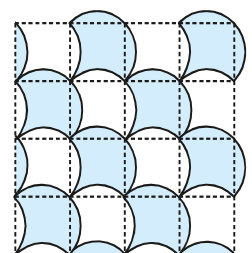
7. (UFPR) O produto de 417 por $\otimes 1 \Delta \otimes \oplus$ é $9 \oplus \nabla \oplus 057$, sendo que os símbolos representam números da base decimal. Assinale a alternativa que apresenta o produto correto.

- a) 9 131 057 c) 9 242 057 e) 9 141 057
- b) 9 343 057 d) 9 121 057

8. (Fuvest-SP) O segmento AB é lado de um hexágono regular de área $\sqrt{3}$. O ponto P pertence à mediatriz de AB de tal modo que a área do triângulo PAB vale $\sqrt{2}$. Então, a distância de P ao segmento AB é igual a:

- a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

9. (UnB-DF) A figura ao lado mostra um mosaico formado por arcos de circunferências. Sabendo que os quadrados pontilhados têm lado medindo $\sqrt{7}$ cm e considerando π igual a $\frac{22}{7}$, determine a área da região destacada, em cm^2 .



10. (ESPM-SP) A composição de uma certa população, por faixa etária, é verificada na tabela abaixo:

Crianças (0 a 14 anos)	32%
Jovens (15 a 24 anos)	24%
Adultos (25 a 60 anos)	38%
Idosos (+ de 60 anos)	6%

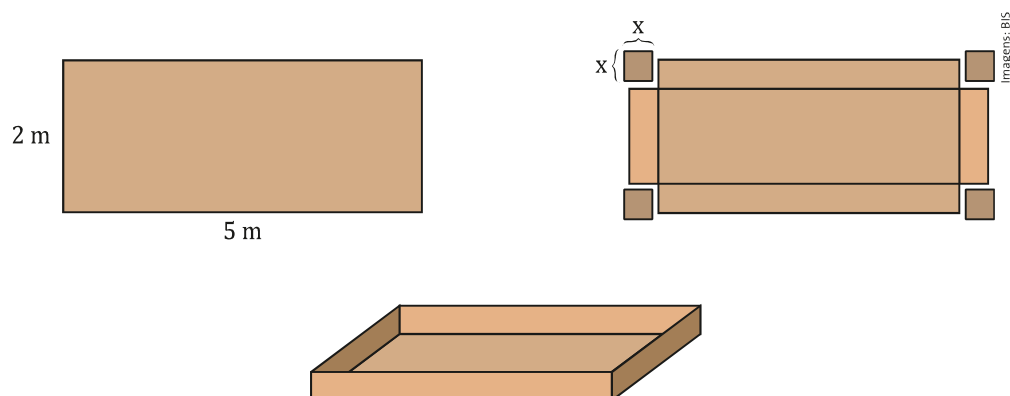
Num gráfico de setores, o ângulo central correspondente à população de jovens medirá, aproximadamente:

- a) 86° b) 54° c) 78° d) 67° e) 94°

10

Equações polinomiais

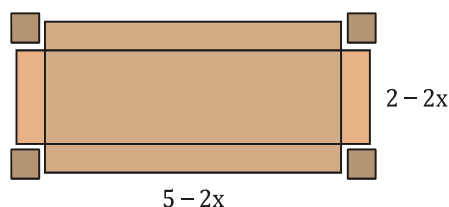
Com uma folha de papelão retangular pretende-se fazer uma caixa sem tampa. Para isso, quatro quadrados de lados x são cortados dos cantos da folha, como mostra a figura.



Este capítulo completa o estudo sobre polinômios e equações polinomiais, do ponto de vista algébrico, e avança na interpretação gráfica de funções polinomiais, para que o estudante possa conhecer as aplicações do que está estudando na resolução de problemas de máximo ou de mínimo dessas funções.

Qual deve ser a medida de x para que o volume da caixa seja de 2 m^3 ?

Se cortarmos os quatro cantos conforme indicado na figura, obteremos uma caixa em forma de paralelepípedo. Sabemos que o volume do paralelepípedo pode ser calculado por $V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$.



Assim, o volume da caixa em função de x é:

$$V(x) = (5 - 2x)(2 - 2x)x$$

$$V(x) = 4x^3 - 14x^2 + 10x$$

O problema nos pede o valor de x para que $V = 2 \text{ m}^3$. Então, chegamos à seguinte equação:

$$4x^3 - 14x^2 + 10x = 2$$

Resolvendo essa equação, encontramos a resposta do problema.

Situe-se

No capítulo 8, **Estudo de polinômios**, você conheceu a resolução de algumas dessas equações. Mas, agora que conhecemos também os números complexos, podemos aprofundar o estudo. Isso é o que faremos neste capítulo.

1 Equação polinomial

A resolução de equações sempre foi uma das preocupações dos matemáticos, que se perguntavam: toda equação polinomial tem solução?

Matemáticos como Albert Girard (1595-1632), Jean d'Alembert (1717-1783), Leonhard Euler (1707-1783) e Joseph Lagrange (1736-1813) envolveram-se na busca de uma resposta a essa pergunta. Eles acreditavam que toda equação tinha solução, embora em sua época não tenham conseguido provar isso.

O primeiro matemático a provar que toda equação polinomial de grau n , $n \in \mathbb{N}^*$, e coeficientes complexos tem ao menos uma raiz complexa foi Carl Friedrich Gauss.

Mas o que é uma equação polinomial?

Já conhecemos, e sabemos resolver, algumas equações polinomiais, como, por exemplo:

- equação polinomial de grau 1 é toda equação da forma $ax + b = 0$, com $x \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$ e $b \in \mathbb{C}$;
- equação polinomial de grau 2 é toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $x \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ e $c \in \mathbb{C}$.

De forma análoga, podemos falar em equações polinomiais de graus 3, 4, 5 etc.

Equação polinomial (ou algébrica) de grau $n \geq 1$ é toda equação da forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (1)$$

em que a incógnita x e os coeficientes $a_n \neq 0$, a_{n-1} , a_{n-2} , ..., a_1 , a_0 pertencem ao conjunto dos números complexos e $n \in \mathbb{N}^*$.

Um número complexo r é raiz (ou solução) de (1) se, e somente se, $a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$.

Exemplos:

a) São equações polinomiais:

$$2x^3 - 7x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$ix^2 + (3 + 2i)x + 4 = 0$$

b) Na equação $2x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$:

- 1 não é solução, pois $2 \cdot 1^3 - 1^2 + 8 \cdot 1 - 4 = 0$ é falsa;
- $2i$ é solução, pois $2(2i)^3 - (2i)^2 + 8 \cdot 2i - 4 = 0$ é verdadeira.

FIQUE CONECTADO

Matemáticos e juízes de direito são personagens do capítulo 34 do livro *A vida secreta dos números*, de George G. Szpiro (Difel). Para conhecer essa história, leia esse capítulo.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



1. Quais dos seguintes números: 0 , -1 , 1 , $\frac{1}{2}$, 2 , $-i$, i , $2i$ são soluções da equação

$$2x^3 - (1 + 2i)x^2 + (4 + i)x - 2 = 0?$$

2. Dada a equação $x^3 + mx - m - 1 = 0$.

- a) Determine m para que -2 seja solução.
b) Para que valor de m , 1 é solução?

INVENTE VOCÊ

REGISTRE
NO CADERNO



1. Dê exemplos de equações polinomiais de grau 4 com soluções:

a) 4

b) $3i$

2. Dê exemplos de equações que não sejam polinomiais.

2 Teorema fundamental da Álgebra e teorema da decomposição

Ao provar que toda equação polinomial de grau n e coeficientes complexos tem ao menos uma raiz complexa, Gauss formulou a afirmação que ficou conhecida como **Teorema fundamental da Álgebra (T.F.A.)** e que é um dos teoremas básicos para o estudo das equações polinomiais:

Teorema fundamental da Álgebra

Toda equação polinomial de grau $n \geq 1$ admite, pelo menos, uma raiz complexa.

É importante notar que o T.F.A. nos assegura apenas que existe pelo menos um número que é solução de uma equação algébrica de grau $n \geq 1$; o teorema não nos informa quantas são as soluções nem como determiná-las. Não há fórmulas resolutivas para equações polinomiais de qualquer grau. Ou seja, não sabemos resolver qualquer equação polinomial por algoritmos predefinidos. O que sabemos fazer é transformar o polinômio em fatores mais simples de serem resolvidos. Sabemos, no entanto, para a equação particular de grau 3:

$$x^3 + ax + b = 0$$

que uma das raízes pode ser calculada pela fórmula de Cardano-Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + w} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - w},$$

em que w indica a raiz quadrada de $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}$.

Decomposição de um polinômio

Consideremos os polinômios $P_1(x) = 3x - 12$ e $P_2(x) = 3x^2 - 5ix - 2$:

- $P_1(x)$ tem raiz 4 e pode ser escrito $P_1(x) = 3(x - 4)$.
- $P_2(x)$ tem raízes $\frac{2i}{3}$ e i e pode ser escrito $P_2(x) = 3\left(x - \frac{2i}{3}\right)(x - i)$.

Vamos mostrar que $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $a_3 \neq 0$, pode ser colocado na forma $P(x) = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$, em que r_1 , r_2 e r_3 são raízes de $P(x)$.

Pelo T.F.A., $P(x)$ admite uma raiz r_1 . Dividindo $P(x)$ por $x - r_1$, obtemos:

$$P(x) = (x - r_1) Q_1(x), \text{ em que grau } (Q_1) = 2.$$

Pelo T.F.A., existe raiz r_2 de $Q_1(x)$. Dividindo $Q_1(x)$ por $x - r_1$, obtemos:

$$Q_1(x) = (x - r_2) Q_2(x), \text{ em que grau } (Q_2) = 1.$$

Pelo T.F.A., existe a raiz r_3 de $Q_2(x)$; então:

$$Q_2(x) = (x - r_3) Q_3, \text{ em que grau } (Q_3) = 0, \text{ ou seja, } Q_3 = a_3.$$

$$\text{Portanto, } P(x) = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Essa possibilidade de decompor um polinômio em fatores quando $n \geq 1$ é garantida pelo segundo teorema importante neste nosso estudo de polinômios:

Teorema da decomposição em fatores

Todo polinômio de grau n , com $n \geq 1$, pode ser fatorado em n fatores do 1º grau com coeficientes complexos.

O teorema nos assegura que o número de raízes complexas de um polinômio de grau $n \geq 1$ é exatamente n .

Observe que esses fatos não seriam verdade em \mathbb{R} .

Por exemplo, $x^2 + 1 = 0$ não possui nenhuma raiz em \mathbb{R} e não pode ser decomposto, em \mathbb{R} , em fatores do 1º grau. No entanto, $P(x) = x^2 + 1$ tem em \mathbb{C} duas raízes, $\pm i$, e pode ser decomposto em $P(x) = (x + i)(x - i)$.

Exemplos:

a) As raízes de $P(x) = 3x^3 - x^2 - 12x + 4$ são $\frac{1}{3}$, 2 e -2; então:

$$P(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 2)(x + 2)$$

b) $P(x) = 5(x - 1)^2(x - 4)\left(x + \frac{i}{2}\right)$ tem grau 4 e raízes 1, 4 e $-\frac{i}{2}$.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R1. Resolva $2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4 = 0$, sabendo que -2 e $\frac{1}{2}$ são raízes.

Resolução

Vamos dividir o primeiro membro da equação por $x - (-2)$ e o quociente obtido por $x - \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & -1 & -4 & 10 & -4 \\ -2 & 2 & -5 & 6 & -2 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

A equação dada pode ser escrita:

$$[x - (-2)]\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 - 4x + 4) = 0$$

Então, determinamos as outras raízes resolvendo a equação:

$$2x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm 4i}{4} = 1 \pm i$$

Portanto, o conjunto solução da equação dada é:

$$S = \left\{-2, \frac{1}{2}, 1 + i, 1 - i\right\}$$

R2. Resolva $x^3 - 2ix^2 - (5 + 2i)x - 2 + 4i = 0$, sabendo que uma das raízes é real.

Resolução

Seja α a raiz real; dividindo

$P(x) = x^3 - 2ix^2 - (5 + 2i)x - 2 + 4i$ por $x - \alpha$, obtemos resto nulo.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2i & -5 - 2i & -2 + 4i \\ \alpha & 1 & \alpha - 2i & \alpha^2 - 5 - 2\alpha i - 2i & \alpha^3 - 5\alpha - 2 - 2\alpha^2 i - 2\alpha i + 4i \\ & & \text{coeficientes do} & & \text{resto } R \\ & & \text{quociente } Q(x) & & \end{array}$$

Devemos ter:

$$\alpha^3 - 5\alpha - 2 + (-2\alpha^2 - 2\alpha + 4)i = 0$$

Dessa igualdade de números complexos, temos:

$$\begin{cases} \alpha^3 - 5\alpha - 2 = 0 & (1) \\ -2\alpha^2 - 2\alpha + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo a equação (2), obtemos:

$\alpha = -2$ ou $\alpha = 1$ (não serve, pois não satisfaz a equação (1))

Para $\alpha = -2$: $P(x) = (x - \alpha) Q(x) + R$

$$P(x) = (x + 2) Q(x)$$

Logo, obtemos as demais raízes resolvendo $Q(x) = 0$:

$$x^2 + (\alpha - 2i)x + \alpha^2 - 5 - 2\alpha i - 2i = 0, \alpha = -2$$

$$x^2 + (-2 - 2i)x - 1 + 2i = 0$$

$$\Delta = (-2 - 2i)^2 - 4(-1 + 2i) = 4$$

$$x = \frac{2 + 2i \pm 2}{2} \Rightarrow x = 2 + i \text{ ou } x = i$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{-2, 2 + i, i\}$.

3 Multiplicidade de uma raiz

As raízes de $P(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 2)(x + 4)(x + 4)(x - 8)$ são 2, 2, 2, -4, -4 e 8.

Dizemos que: 2 é raiz de **P** com multiplicidade 3;

-4 é raiz de **P** com multiplicidade 2;

8 é raiz de **P** com multiplicidade 1.

A multiplicidade de uma raiz é a quantidade de vezes que esse número aparece como raiz de um polinômio. Na forma fatorada, a multiplicidade de uma raiz aparece como expoente do fator que contém essa raiz. No polinômio anterior, temos:

$$P(x) = (x - 2)^3(x + 4)^2(x - 8)$$

Note, ainda, que a afirmação **2 é raiz de P com multiplicidade 3** equivale a:
 $P(x)$ é divisível por $(x-2)$, por $(x-2)^2$ e por $(x-2)^3$ e **não é divisível por $(x-2)^4$.**

Raiz múltipla

Seja P um polinômio de grau $n \geq 1$.

Um número r é raiz de P com multiplicidade m , $m \in \mathbb{N}^*$, $m \leq n$, se, e somente se, existe Q tal que:

$$P(x) = (x-r)^m Q(x) \text{ e } Q(r) \neq 0$$

Para $m = 1, 2, 3, \dots$ dizemos raiz, respectivamente, simples, dupla, tripla, \dots .

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R3. Determine a multiplicidade da raiz -2 no polinômio

$$P(x) = 2x^5 + 15x^4 + 40x^3 + 40x^2 - 16.$$

Resolução

Usando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

	2	15	40	40	0	-16
-2	2	11	18	4	-8	0
-2	2	7	4	-4	0	
-2	2	3	-2	0		
-2	2	-1	0			
-2	2	-5				

Então, $P(x) = [x - (-2)]^4 \underbrace{(2x-1)}_{Q(x)}$ e $Q(-2) = -5$.

Portanto, -2 é raiz de $P(x)$ com multiplicidade 4.

R4. Determine a , b e c para que 1 seja raiz tripla da equação
 $2x^5 - 7x^4 + (a+4)x^3 + (a^2-3a-6)x^2 + bx + c = 0$.

Resolução

O primeiro membro da equação dada deve ser divisível por $(x-1)^3$ e não pode ser divisível por $(x-1)^4$.

	2	-7	a+4	a^2-3a-6	b	c
1	2	-5	a-1	a^2-2a-7	b+a^2-2a-7	b+c+a^2-2a-7
1	2	-3	a-4	a^2-a-11	b+2a^2-3a-18	
1	2	-1	a-5	a^2-16		
1	2	1	a-4			

$$\text{Devemos ter: } b + c + a^2 - 2a - 7 = 0 \quad (1)$$

$$b + 2a^2 - 3a - 18 = 0 \quad (2)$$

$$a^2 - 16 = 0 \quad (3)$$

$$a - 4 \neq 0 \quad (4)$$

De (3) e (4), obtemos $a = -4$.

$a = -4$ em (2) resulta $b = -26$.

$a = -4$ e $b = -26$ em (1) fornece $c = 9$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



3. Decomponha $P(x)$ em produto de fatores do 1º grau.

a) $P(x) = 3x^2 - 18x + 24$

b) $P(x) = 5x^3 - 30x^2 + 55x - 30$, sabendo que 2 é uma das raízes.

c) $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 36$, sabendo que 1 e -2 são duas raízes.

4. Uma das raízes de $2x^3 - (m+3)x^2 + 11x - m = 0$ é 1. Quais são as outras raízes dessa equação?

5. Uma das raízes de $x^3 + 2(m-1)x^2 + 2(1-2m)x - 4 = 0$, $m \in \mathbb{R}$, é 2. Determine m para que as outras soluções sejam reais.

6. Mostre que a única raiz real de $x^3 - 4x + 15 = 0$ é -3 .

7. Resolva $x^3 - (3+2i)x^2 + (1+5i)x + 2-2i = 0$, sabendo que uma das raízes é real.

8. Mostre que 3 é raiz tripla de $P(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27$.

9. Resolva $3x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 12x + 8 = 0$, sabendo que -2 é raiz dupla.

10. Forme uma equação polinomial cujas raízes são:

a) $-3, 2+i$ e $2-i$.

b) $2, i$ e $-2i$ com multiplicidade, respectivamente, 3, 2 e 1.

11. Determine m para que 2 seja raiz dupla de
 $x^3 - (4+m)x^2 + (4+4m)x - 4m = 0$.

12. (FGV-SP) O polinômio $P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$ tem o número 1 como raiz dupla.
O valor absoluto da diferença entre as outras raízes é igual a:

a) 5

c) 3

e) 1

b) 4

d) 2

13. Considere a equação
 $x^4 - x^3 - mx^2 + (m^2 - 2m + 2)x + 3m - 11 = 0$.

a) Determine m para que 1 seja raiz de multiplicidade pelo menos 1.

b) Determine m para que 1 seja raiz simples.

c) 1 pode ser raiz dupla?

d) 1 pode ser raiz tripla?

4 Relações de Girard

As relações que vamos estudar agora servem para trocar uma equação por um sistema de equações que, se forem mais simples, permitem a resolução da equação inicial.

Em uma equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são r_1 e r_2 , sabemos que:

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \quad r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Essas relações entre raízes e coeficientes são conhecidas como **relações de Girard** da equação do 2º grau. Vamos obter as relações de Girard para equações de graus 3 e 4.

Equação de grau 3

Sejam r_1 , r_2 e r_3 as raízes de $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_3 \neq 0$.

Pelo teorema da decomposição, temos:

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3[x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3]$$

$$\text{Da identidade de polinômios, vem: } \begin{cases} a_2 = -a_3(r_1 + r_2 + r_3) \\ a_1 = a_3(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) \\ a_0 = -a_3(r_1r_2r_3) \end{cases}$$

$$\text{Então, as relações de Girard são: } r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3}; \quad r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{a_1}{a_3}; \quad r_1r_2r_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

Equação de grau 4

Sejam r_1 , r_2 , r_3 e r_4 as raízes de $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_4 \neq 0$.

Pelo teorema da decomposição, temos:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_4(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$$

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_4[x^4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2 - (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)x + r_1r_2r_3r_4]$$

$$\text{Da identidade de polinômios, vem: } \begin{cases} a_3 = -a_4(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\ a_2 = a_4(r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4) \\ a_1 = -a_4(r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4) \\ a_0 = a_4(r_1r_2r_3r_4) \end{cases}$$

$$\text{Então, as relações de Girard são: } \begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + r_4 &= -\frac{a_3}{a_4} & r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 &= \frac{a_2}{a_4} \\ r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 &= -\frac{a_1}{a_4} & r_1r_2r_3r_4 &= \frac{a_0}{a_4} \end{aligned}$$

Exemplos:

a) Na equação $2x^2 + 11x + 5 = 0$, temos: $r_1 + r_2 = -\frac{11}{2}$ e $r_1r_2 = \frac{5}{2}$

b) Na equação $4x^3 + 7x^2 + 10x + 6 = 0$, temos: $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{7}{4}$; $r_1r_2r_3 = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$; $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

c) Na equação $3x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 7x + 2 = 0$, temos: $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{-8}{3} = \frac{8}{3}$;

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{7}{3}; \quad r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{10}{3}; \quad r_1r_2r_3r_4 = \frac{2}{3}$$

Observe que a resolução desses sistemas gerados pelas relações de Girard não é simples. Tente resolver o sistema do item a e veja que se recai na equação que gerou o sistema.

As relações de Girard são úteis quando se sabe alguma outra propriedade das raízes da equação que torna o sistema mais simples. Isso pode ser visto nas atividades R6 e R7 a seguir.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R5. Sejam α, β e γ as raízes de $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$. Calcule:

- a) $\alpha + \beta + \gamma$ d) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
 b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ e) $(\alpha\beta)^{-1} + (\alpha\gamma)^{-1} + (\beta\gamma)^{-1}$
 c) $\alpha\beta\gamma$

Resolução

Aplicando as relações de Girard, temos:

- a) $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$
 b) $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{4}{2} = 2$
 c) $\alpha\beta\gamma = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$
 d) Elevando os dois membros de $\alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2}$ ao quadrado, obtemos:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\underbrace{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}_2) = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{9}{4} - 2 \cdot 2 = -\frac{7}{4}$$

 e) $\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma} = \frac{\gamma + \beta + \alpha}{\alpha\gamma} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$

R6. Resolva $x^3 - 13x^2 + 39x - 27 = 0$, sabendo que as raízes são reais e estão em P.G.

Resolução

Raízes: $\frac{r}{q}, r, rq, r \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}^*$.

Pela terceira relação de Girard, temos:

$$\frac{r}{q} \cdot r \cdot rq = 27 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$$

Dividindo o primeiro membro da equação dada por $x - 3$, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -13 & 39 & -27 \\ 3 & 1 & -10 & 9 & 0 \end{array}$$

As outras raízes da equação dada vêm de:

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 9$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{1, 3, 9\}$.

R7. Resolva $6x^3 - 35x^2 + 26x - 5 = 0$, sabendo que a soma dos inversos de duas raízes é igual à outra raiz.

Resolução

Raízes: r_1, r_2, r_3 .

Condição do problema: $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = r_3$.

Então, $r_2 + r_1 = r_1 r_2 r_3$.

Da terceira relação de Girard: $r_1 r_2 r_3 = -\frac{-5}{6} = \frac{5}{6}$

Logo, $r_1 + r_2 = \frac{5}{6}$.

Da primeira relação de Girard: $\underbrace{r_1 + r_2}_{\frac{5}{6}} + r_3 = -\frac{-35}{6} \Rightarrow r_3 = 5$

Dividindo o primeiro membro da equação dada por $x - 5$, obtemos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -35 & 26 & -5 \\ 5 & 6 & -5 & 1 & 0 \end{array}$$

As demais raízes da equação dada estão em:

$$6x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = \frac{1}{3}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{5, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



14. Sejam α e β as raízes de $3x^2 - 7x + 5 = 0$. Calcule:

- a) $\alpha + \beta$ c) $\alpha^{-1} + \beta^{-1}$
 b) $\alpha\beta$ d) $\alpha^2 + \beta^2$

15. Sejam m, n e p as raízes de $2x^3 + 5x^2 + x - 2 = 0$. Calcule:

- a) $m + n + p$ c) mnp
 b) $mn + mp + np$

16. Sejam m, n, p e q as raízes de $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0$. Calcule:

- a) $m + n + p + q$
 b) $mn + mp + mq + np + nq + pq$

17. Resolva $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, sabendo que a soma de duas de suas raízes vale 6.

18. Resolva $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é igual à diferença das outras.

19. Resolva $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é igual ao dobro da soma das outras.

20. As dimensões de um paralelepípedo reto-retângulo são, em centímetros, as raízes da equação $x^3 - 19x^2 + 108x - 180 = 0$. Calcule:

- a) o volume. b) a área total.

21. Resolva $x^3 - 12x^2 + 49x - 68 = 0$, sabendo que as raízes estão em P.A.

22. Resolva $x^3 - (3 + 2i)x^2 + (-4 + 6i)x + 8i = 0$, cujas raízes estão em P.G.

23. Resolva $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 6x + 9 = 0$, sabendo que as raízes têm multiplicidade 2.

24. (IFCE) Se 3 e $\frac{1}{3}$ são as raízes da equação $ax^2 - 6x + p = 0$, então o valor de $a + p$ é:

- a) -5 b) $-\frac{9}{5}$ c) 0 d) $\frac{18}{5}$ e) 4

25. (UFPE) Se as raízes da equação $x^3 - 7x^2 - 28x + k = 0$ são termos de uma progressão geométrica, determine e assinale o valor do termo constante k .

- 26.** (UECE) Se os números **m**, **p** e **q** são as soluções da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, então o valor da soma $\log_2 m + \log_2 p + \log_2 q$ é:

a) 1 c) 3
b) 2 d) 4

27. (FGV-SP) Se **m**, **n** e **p** são raízes distintas da equação algébrica $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, então $m^3 + n^3 + p^3$ é igual a:

a) -1 c) 3 e) 5
b) 1 d) 4

5 Raízes imaginárias

Consideremos as equações:

$$(E1) \quad 4x^2 - 4\sqrt{3}x + 7 = 0$$

$$(E2) \quad 2x^3 - 13x^2 + 32x - 13 = 0$$

$$(E3) \quad x^2 - 3ix = 0$$

(E1) tem **todos os coeficientes reais**; suas raízes são $\frac{\sqrt{3}}{2} + i$ e $\frac{\sqrt{3}}{2} - i$, que são números imaginários **conjugados entre si**.

(E2) tem **todos os coeficientes reais**; suas raízes são o real $\frac{1}{2}$ e os números imaginários $3 + 2i$ e $3 - 2i$, que são **conjugados entre si**.

Um dos coeficientes de (E3) é número **complexo não real**; suas únicas raízes são o real zero e o imaginário $3i$ (o seu conjugado $-3i$ não é raiz).

Em geral, vale o seguinte teorema:

Se um número imaginário z é raiz de uma equação polinomial de grau $n > 1$, **com todos os coeficientes reais**, então \bar{z} é também raiz dessa equação (as multiplicidades de z e de \bar{z} são iguais).

Esse resultado traz duas consequências importantes.

- 1) Em toda equação polinomial de coeficientes reais, o número de raízes imaginárias é par.
- 2) Em toda equação polinomial de coeficientes reais e de grau ímpar, existe um número ímpar de raízes reais.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R8. Resolva:

- a) $3x^3 + 10x^2 + 7x - 10 = 0$, sabendo que $-2 - i$ é uma de suas raízes.
- b) $2x^4 - 11x^3 + 13x^2 + 16x - 10 = 0$, sabendo que $3 - i$ é uma de suas raízes.

Resolução

- a) Como a equação tem todos os coeficientes reais, $-2 + i$ é também raiz. Indicando por r a terceira raiz, pela primeira relação de Girard, temos:
- $$(-2 - i) + (-2 + i) + r = -\frac{10}{3} \Rightarrow r = -\frac{10}{3} + 4 = \frac{2}{3}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{-2 - i, -2 + i, \frac{2}{3}\right\}$.

- b)** Como a equação tem todos os coeficientes reais, $3 + i$ é também raiz. Indicando as outras raízes com α e β , pela primeira e pela segunda relação de Girard, temos:

$$\begin{cases} (3+i) + (3-i) + \alpha + \beta = -\frac{-11}{2} \\ (3+i)(3-i) + (3+i)\alpha + (3+i)\beta + \\ + (3-i)\alpha + (3-i)\beta + \alpha\beta = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{11}{2} - 6 \\ 10 + 6(\beta + \alpha) + \alpha\beta = \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \\ 10 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \alpha\beta = \frac{13}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\alpha = -1$, $\beta = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -1$.

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{3 - i, 3 + i, -1, \frac{1}{2}\right\}$.

Outro modo:

Dividindo o primeiro membro da equação por $x - (3 - i)$ e o quociente por $x - (3 + i)$, temos:

	2	-11	13	16	-10
3 - i	2	-5 - 2i	-4 - i	3 + i	0
3 + i	2	1	-1	0	

As demais raízes da equação dada são de:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

Outro modo:

O primeiro membro da equação dada é divisível por $[x - (3 - i)][x - (3 + i)] = x^2 - 6x + 10$; efetuando a divisão, temos:

$$2x^4 - 11x^3 + 13x^2 + 16x - 10 \equiv (x^2 - 6x + 10)(2x^2 + x - 1)$$

As outras raízes são as raízes de $2x^2 + x - 1 = 0$, isto é, -1 e $\frac{1}{2}$.

R9. Resolva $x^3 + 3x + 2i = 0$, sabendo que $-i$ é uma raiz.

Resolução

Note que não podemos concluir que i seja raiz, porque os coeficientes da equação não são reais.

Dividindo o primeiro membro da equação por $x - (-i)$, obtemos:

	1	0	3	2i
-i	1	-i	2	0

As outras raízes são de:

$$x^2 - ix + 2 = 0 \Rightarrow x = 2i \text{ ou } x = -i$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{2i, -i\}$.

R10. Forme uma equação polinomial de grau mínimo que admita para raízes os números 3 , $1 - 2i$ e i com:

- coeficientes reais.
- coeficientes complexos.

Resolução

a) Se os coeficientes da equação devem ser reais, a equação deve admitir, pelo menos, as raízes 3 , $1 - 2i$, $1 + 2i$, i e $-i$; então, a equação solicitada é:

$$a(x - 3)[x - (1 - 2i)][x - (1 + 2i)][x - i][x - (-i)] = 0, \text{ para qualquer } a \neq 0$$

$$a(x^5 - 5x^4 + 12x^3 - 20x^2 + 11x - 15) = 0, \text{ para qualquer } a \neq 0$$

b) Os conjugados de $1 - 2i$ e i não são obrigatoriamente raízes da equação; logo, ela deve admitir, ao menos, as raízes 3 , $1 - 2i$ e i ; então, a equação pedida é:

$$a[x - 3][x - (1 - 2i)][x - i] = 0, \text{ para qualquer } a \neq 0$$

$$a[x^3 - (4 - i)x^2 + (5 - 2i)x - 6 - 3i] = 0, \text{ para qualquer } a \neq 0$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



28. Determine:

- a outra raiz de uma equação do 2º grau com os coeficientes reais, sabendo que $5 + 3i$ é uma raiz;
- as outras raízes de uma equação polinomial do 4º grau com coeficientes reais, sabendo que $1 - 2i$ e $-3 + i$ são raízes.

29. Resolva $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = 0$, sabendo que $1 + i$ é uma de suas raízes.

30. Resolva $3x^4 - 11x^3 + 27x^2 - 29x + 10 = 0$, sabendo que $1 + 2i$ é uma de suas raízes.

31. Forme uma equação polinomial de grau mínimo que admita como raízes os números $4 - i$ e 2 com a condição:

- os coeficientes são reais.

- os coeficientes são complexos.

32. Determine o grau mínimo de um polinômio que admite para raízes os números $2 - 5i$, 8 e $-2 + i$, com multiplicidades, respectivamente, 2 , 3 e 1 , se:

- os coeficientes do polinômio são reais.
- os coeficientes do polinômio são complexos.

33. Resolva:

a) $3x^6 - 5x^5 + 8x^4 - 10x^3 + 7x^2 - 5x + 2 = 0$, sabendo que i é raiz dupla.

b) $2x^6 - x^5 + 15x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 16x - 16 = 0$, sabendo que $2i$ é raiz dupla.

34. Resolva $x^3 - (2 + i)x^2 + 2(1 + i)x - 2i = 0$, sabendo que i é uma raiz.

35. (UFRS) Um polinômio de 5ª grau com coeficientes reais, que admite os números complexos $-2 + i$ e $1 - 2i$ como raízes, admite:

- a) no máximo mais uma raiz complexa.
- b) $2 - i$ e $-1 + 2i$ como raízes.
- c) uma raiz real.
- d) duas raízes reais distintas.
- e) três raízes reais distintas.

36. (UFPE) Se o número complexo $3 + 2i$ é raiz da equação $x^3 - 23x + c = 0$, com c sendo uma constante real, qual o valor de c ?

37. (UEPG) Sabendo que a equação $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ admite 1 como raiz dupla, -2 como raiz simples e i como raiz simples, assinale o que for correto.

- 01) $b + c = 0$
- 02) $c + d + e = 1$
- 04) $c = d$
- 08) $a + e = 0$
- 16) $e < 0$

6 Pesquisa de raízes racionais

As raízes da equação $3x^2 - 7x + 2 = 0$, cujos coeficientes são inteiros, são os números racionais $\frac{1}{3}$ e 2 ; elas podem ser encontradas, sem o uso da fórmula de Bhaskara, testando-se os elementos da listagem que se obtêm calculando os quocientes dos divisores $\pm 1, \pm 2$ do termo independente 2 pelos divisores $\pm 1, \pm 3$ do coeficiente do termo em x^2 .

$$-1, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -2, 2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}$$

É óbvio que em uma equação do 2ª grau é mais rápido aplicar a fórmula de Bhaskara. Mas, nas equações polinomiais de grau $n \geq 3$, o recurso de pesquisar raízes racionais é de extrema utilidade porque facilita o processo de resolução.

Teorema: Se uma equação polinomial $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, $a_n \neq 0$, de **coeficientes inteiros**, admite uma raiz racional $\frac{p}{q}$, p e q primos entre si, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Demonstração:

Se $\frac{p}{q}$ é raiz de $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, então:

$$a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + a_{n-2} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

Multiplicando por q^n :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + a_{n-2} p^{n-2} q^2 + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

Isolando $a_0 q^n$ em um dos membros e no outro colocando p em evidência, obtemos:

$$p \underbrace{(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + a_{n-2} p^{n-3} q^2 + \dots + a_1 q^{n-1})}_{\text{inteiro}} = -a_0 q^n$$

Então:

$$\left. \begin{array}{l} p \text{ divide } a_0 q^n \\ p \text{ e } q \text{ são primos entre si} \end{array} \right\} \Rightarrow p \text{ é divisor de } a_0$$

Isolando $a_n p^n$ em um dos membros e no outro colocando q em evidência, obtemos:

$$q \underbrace{(a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} q + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 p q^{n-2})}_{\text{inteiro}} = -a_n p^n$$

Então:

$$\left. \begin{array}{l} q \text{ divide } a_n q^n \\ q \text{ e } p \text{ são primos entre si} \end{array} \right\} \Rightarrow q \text{ é divisor de } a_n$$

É importante observar que em uma equação polinomial com coeficientes inteiros:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_0 \neq 0:$$

- 1) os candidatos a raízes inteiras são os divisores de a_0 ;
- 2) se $a_n = 1$, as possíveis raízes racionais são os inteiros divisores de a_0 .

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R11. Resolva:

$$4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 15x + 9 = 0$$

Resolução:

Vamos pesquisar se a equação admite alguma raiz racional.

$$p: \text{divisor de } 9 \Rightarrow p = \pm 1, \pm 3, \pm 9$$

$$q: \text{divisor de } 4 \Rightarrow q = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

Os candidatos a raízes racionais são todos os possíveis valores de $\frac{p}{q}$:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm 9, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{9}{4}$$

Verificamos (usando o dispositivo de Briot-Ruffini) que

$\frac{1}{2}$ e 3 são raízes; dividindo o 1º membro da equação por $x - \frac{1}{2}$ e o quociente por $x - 3$, obtemos:

	4	-10	-2	-15	9	
$\frac{1}{2}$	4	-8	-6	-18	0	
3	4	4	6	0		

As demais raízes da equação são de:

$$4x^2 + 4x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot i$$

portanto, o conjunto solução é

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot i \right\}.$$

R12. Mostre que $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$ é número inteiro.

Resolução

Vamos indicar o número real citado por x .

$$x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$$

Elevando os dois membros ao cubo, temos:

$$x^3 = \left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)^3 + \\ + 3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right)}_x$$

$$x^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 7 - 5\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{7^2 - (5\sqrt{2})^2} \cdot x$$

$$x^3 = 14 - 3x \Rightarrow x^3 + 3x - 14 = 0 \quad (1)$$

As possíveis raízes racionais são os divisores $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$ do termo independente -14 .

Testando, descobrimos que 2 é raiz; dividindo o primeiro membro de (1) por $x - 2$, obtemos:

	1	0	3	-14	
2	1	2	7	0	

As demais raízes de (1) estão em:

$$x^2 + 2x + 7 = 0$$

e não são reais, pois $\Delta < 0$.

Portanto, x representa, apenas, o número real 2.

R13. Mostre que $x^n + 4x + 2 = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, não tem soluções racionais.

Resolução

Os únicos candidatos a raízes racionais são ± 1 e ± 2 , divisores do termo independente 2. Vamos verificar cada um deles.

$$x = 1 \Rightarrow 1^n + 4 \cdot 1 + 2 = 0 \text{ é falsa}$$

$$x = -1 \Rightarrow (-1)^n + 4(-1) + 2 = 0 \text{ é falsa}$$

$$x = 2 \Rightarrow 2^n + 4 \cdot 2 + 2 = 0 \text{ é falsa}$$

$$x = -2 \Rightarrow (-2)^n + 4(-2) + 2 = 0 \text{ é falsa}$$

Portanto, a equação dada não admite soluções racionais.



Observe a seguinte questão:

(Cefet-SP) Analise o seguinte polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 11x^2 - 12x + 36$.

Está correto afirmar que:

- a) -3 é raiz de $P(x)$ com multiplicidade 3.
- b) -2 é raiz de $P(x)$ com multiplicidade 2.
- c) 0 é raiz de $P(x)$ com multiplicidade 2.
- d) 3 é raiz de $P(x)$ com multiplicidade 3.
- e) 2 é raiz de $P(x)$ com multiplicidade 2.

Um caminho possível é buscar as possíveis raízes de $P(x) = 0$ para verificar qual é a alternativa correta. Mas resolver uma equação do 4º grau com possíveis raízes inteiras, sendo todos os divisores de 36, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$, é um trabalho árduo.

No entanto, a observação das alternativas pode dar pistas de como resolver a questão.

1. Para começar, verifique se $-3, -2, 0, 2$ ou 3 são ou não raízes de $P(x)$.
2. Encontrada uma ou mais raízes, aplique Briot-Ruffini e resolva a equação.

Conclusão: algumas vezes, a leitura das alternativas de um teste pode auxiliar ou simplificar sua resolução.

FAZER E APRENDER



38. Determine as raízes racionais de:

$$3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$$

39. Resolva as equações:

- a) $10x^3 - 7x^2 - 2x + 2 = 0$
- b) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

40. Determine as raízes inteiras de:

$$3x^4 - 3x^3 - 17x^2 - x - 6 = 0$$

41. Retorne ao problema do início deste capítulo e resolva a equação $4x^3 - 14x^2 + 10x - 2 = 0$. Em seguida, responda ao problema analisando as raízes da equação.

42. Mostre que a equação $x^n + 2ax + 2 = 0$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, não admite raízes inteiras.

43. (Fuvest-SP) Mostre que é inteiro o número:

$$\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}}$$

44. (UEM-PR) Considerando o seguinte polinômio $p(x) = (ax^2 + x + 2)(bx + c)$, em que a, b, c são números reais e $b \neq 0$ em relação à equação polinomial $p(x) = 0$, assinale o que for correto.

- 01) Se $c = 0$ e $a > \frac{1}{8}$, então a equação tem duas raízes não reais.
- 02) A equação tem pelo menos uma raiz real.
- 04) Se $a \leq 0$, então a equação terá todas as raízes reais.

08) Se $a = b = 1$, então as raízes da equação são:

$$x_1 = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{7}}{2}, x_2 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2} \text{ e } x_3 = -c$$

16) Se $a = b = c = -1$, então a equação terá três raízes distintas.

45. (UFSC) Qual(is) é(são) a(s) proposição(ões) correta(s)?

- a) O número real 1 (um) é uma das raízes do polinômio $p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 5x - 3$.
- b) Se o polinômio $x^3 + ax^2 + bx + 3$ admite três raízes reais distintas, então uma das possibilidades é que elas sejam 1, -1 e 3.
- c) O polinômio $x^3 + 3x - 2$ possui (pelo menos) uma raiz real.
- d) O polinômio $f(x) = x^3 + mx - 5$ é divisível por $x - 3$ quando m é igual a 4.

46. (UFPR) Considere o polinômio $p(x) = \begin{bmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{bmatrix}$.

Calcule as raízes de $p(x)$. Justifique sua resposta, deixando claro se utilizou propriedades de determinantes ou algum método para obter as raízes do polinômio.

- 47. Se $(2 - 3i)$ é uma das raízes da equação $x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13 = 0$, calcule para essa equação:
 - a) a soma de todas as suas raízes;
 - b) o produto de todas as suas raízes;
 - c) a soma das raízes reais.



3. Elabore um problema parecido com o da abertura do capítulo, considerando um papelão quadrado de 20 cm de lado.

PARA COMPLEMENTAR

Gráficos de funções polinomiais

Com o que estudamos até aqui vamos tentar esboçar o gráfico de uma função polinomial a partir de suas raízes. Vamos fazer isso no exemplo:

$$P(x) = x^5 + 2x^4 - x - 2$$

Investigando as possíveis raízes racionais de **P**, temos +1, -1, +2, -2.

$P(1) = 0 \Rightarrow 1$ é raiz e podemos dividir $P(x)$ por $(x - 1)$:

	1	2	0	0	-1	-2
1	1	3	3	3	2	0

$$P(x) = (x - 1)(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2)$$

As possíveis raízes racionais de $x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ são: +1, -1, +2, -2. Como $x = -1$ é raiz:

	1	3	3	3	2
-1	1	2	1	2	0

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^3 + 2x^2 + x + 2)$$

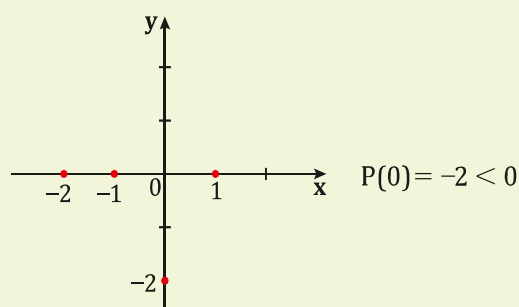
Por sua vez, as raízes racionais de $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$ podem ser: +1, -1, +2, -2. Como -2 é raiz:

	1	2	1	2
-2	1	0	1	0

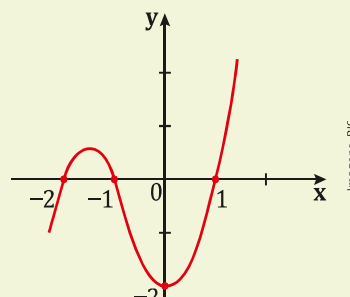
$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)(x^2 + 1)$$

e sabemos que $x^2 + 1$ é sempre positivo em \mathbb{R} ; logo, as raízes reais de **P** são: 1, -1 e -2.

Para esboçar o gráfico de **P**, representamos suas raízes e escolhemos apenas um ponto entre duas delas para verificar se, nesse ponto, **P** é positivo ou negativo. No caso, escolhemos $x = 0$ e $P(0) < 0$



Com apenas essa informação, usaremos agora o fato de o gráfico de uma função polinomial ser contínuo. Como ele deve passar pelas raízes de **P** e por $(0, -2)$, uma possibilidade de gráfico para **P** é:



Tente fazer o mesmo para $Q(x) = x^6 - 2x^5 - x^4 - 4x^3 - 6x^2$.

Com o uso do Winplot, que você explorou no capítulo 6, esboce o gráfico das funções:

a) $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$

c) $h(x) = 2x^4 - 3x^2 + 8$

b) $g(x) = -x^3 - 4x^2 + 3x + 5$

d) $k(x) = 7x^3 - 5x^2$

Observe como os gráficos se assemelham.

Agora, faça o gráfico de funções conhecidas suas raízes, apenas para confirmar isso no gráfico. Para isso, esboce o gráfico de:

a) $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

b) $g(x) = x(x - 5)(x + 5)$

c) $h(x) = x^2(x + 1)(x - 4)$

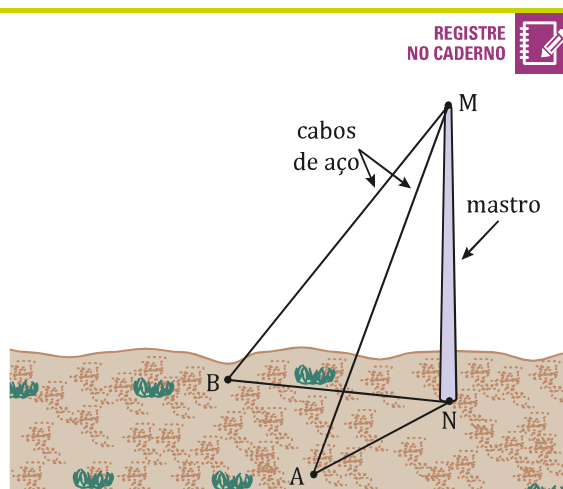
Caminhe sobre o gráfico das funções com o cursor para verificar que nas raízes cada função se anula.

Finalmente, faça o gráfico de $f(x) = 4x^3 - 14x^2 + 10x - 2$, cujas raízes são as respostas ao problema da introdução deste capítulo, e certifique-se de que apenas duas delas são respostas ao problema, porque a terceira raiz é maior que 2, que é a medida de um dos lados da folha de papelão para fazer a caixa.

FOCO NA **TECNOLOGIA**

Calculadora

1. Um mastro foi erguido verticalmente em relação ao chão e é sustentado por dois cabos de aço, como se vê na ilustração ao lado. Sabe-se que $AN = 32,8$ m; que o ângulo de elevação de **A** a **M** é de 53° ; que o ângulo de elevação de **B** a **M** é de 49° ; e que o ângulo entre \overline{BN} e \overline{AN} mede 31° .
 - a) Calcule a altura do mastro.
 - b) Calcule a distância de **B** ao pé do mastro.
 - c) O cabo de aço \overline{BM} está velho e precisa ser trocado. Calcule o comprimento do novo cabo.
 - d) Há uma proposta para recobrir com grama a superfície interior do triângulo ABN ao custo de R\$ 9,30 o metro quadrado. Quanto deverá ser gasto com grama?



PALAVRAS-CHAVE

Selecione algumas palavras do capítulo que você considere essenciais entre as ideias estudadas e elabore um pequeno texto sobre elas.

Depois, releia os textos que você escreveu na seção **Palavras-chave** dos capítulos 8 e 9 e, nesta seção, observe a relação entre esses capítulos e como eles se complementam.

APRENDER A APRENDER

Aqui está um conjunto bem variado de questões envolvendo ideias centrais do que você tem estudado em Matemática. Essa é uma oportunidade de retomada e de aperfeiçoamento de seus conhecimentos e de sua habilidade de resolver problemas.

1. (UEM-PR) Um número natural é chamado quadrado perfeito, se ele for o quadrado de algum número natural. Sabendo disso, assinale o que for correto.

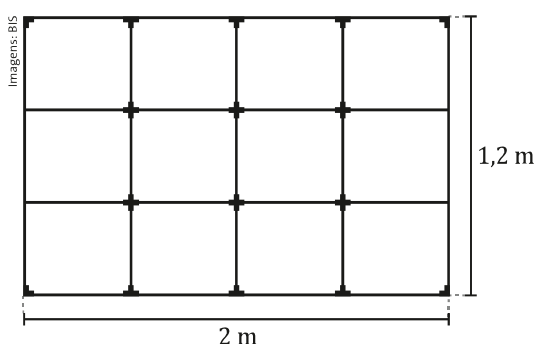
- 01) Existem quadrados perfeitos cuja diferença é 730.
- 02) Todo quadrado perfeito que é múltiplo de 7 é múltiplo de 49.
- 04) A multiplicação de um quadrado perfeito por outro quadrado perfeito é sempre um quadrado perfeito.
- 08) O resultado da soma de quadrados perfeitos é sempre um quadrado perfeito.
- 16) 1 025 710 é um quadrado perfeito.

2. (PUC-MG) Sabe-se que $a^2 + b^2 = 7$ e que $a^2 - b^2 = 3$. Então, qual é o valor de a^2 ?
3. Qual é a área do polígono ABCD, em que A(2, 2), B(6, 6), C(4, 8) e D(0, 6) são os vértices?
4. Sejam as circunferências C_1 e C_2 , de equações $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$. É correto afirmar que C_1 e C_2 não se intersectam? Por quê?
5. Um paralelepípedo reto-retângulo tem suas dimensões dadas, em centímetros, pelas expressões $x - 4$, $x - 3$ e $\frac{2x + 3}{3}$, nas quais x é um número racional maior do que 4. Se o volume do paralelepípedo é 30 cm^3 , qual será sua área total, em centímetros quadrados?
6. Uma herança de R\$ 6 000 000,00 iria ser dividida, em partes iguais, entre os herdeiros de uma mesma família. No momento da divisão, verificou-se que havia mais dois herdeiros e isso implicou uma nova divisão em partes iguais, na qual os herdeiros iniciais receberam R\$ 100 000,00 a menos do que esperavam receber anteriormente. Qual era o número total de herdeiros?
7. (Enem-MEC) Em 2010, um caos aéreo afetou o continente europeu, devido à quantidade de fumaça expelida por um vulcão na Islândia, o que levou ao cancelamento de inúmeros voos. Cinco dias após o início desse caos, todo o espaço aéreo europeu acima de 6 000 metros estava liberado, com exceção do espaço aéreo da Finlândia. Lá, apenas voos internacionais acima de 31 mil pés estavam liberados.

Disponível em: <www1.folha.uol.com.br>. Acesso em: 21 abr. 2010.

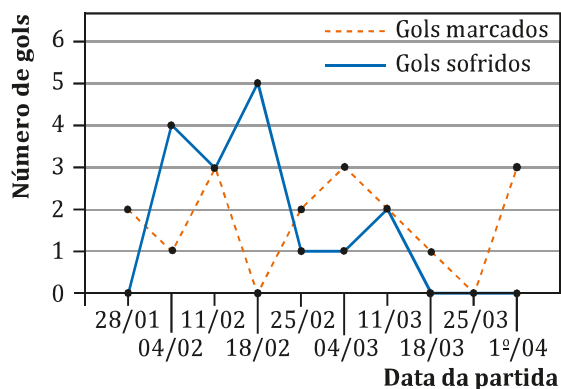
Considere que 1 metro equivale a aproximadamente 3,3 pés. Qual a diferença, em pés, entre as altitudes liberadas na Finlândia e no restante do continente europeu cinco dias após o início do caos?

- a) 3 390 pés. c) 11 200 pés. e) 50 800 pés.
b) 9 390 pés. d) 19 800 pés.
8. (UERJ) Uma grade retangular é montada com 15 tubos de 40 cm na posição vertical e com 16 tubos de 50 cm na horizontal. Para esse tipo de montagem, são utilizados encaixes nas extremidades dos tubos, como ilustrado abaixo:



Se a altura de uma grade como essa é igual ao comprimento de x tubos, e a largura equivale ao comprimento de y tubos, a expressão que representa o número total de tubos usados é:

- a) $x^2 + y^2 + x - 1$
b) $xy + x + y + 1$
c) $xy + 2x + 2y$
d) $2xy + x + y$
9. (EPCAR-MG) Para a reforma do Ginásio de Esportes da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (segunda-feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10º dia, 4 operários foram dispensados.
- No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma.
- Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folga em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é:
- a) domingo.
b) segunda-feira.
c) terça-feira.
d) quarta-feira.
10. (Enem-MEC) No gráfico estão representados os gols marcados e os gols sofridos por uma equipe de futebol nas dez primeiras partidas de um determinado campeonato.



Considerando que, nesse campeonato, as equipes ganham 3 pontos para cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto em caso de derrota, a equipe em questão, ao final da décima partida, terá acumulado um número de pontos igual a:

- a) 15
b) 17
c) 18
d) 20
e) 24

Controle de populações e curvas polinomiais

Modelos matemáticos têm sido usados para simular situações reais por meio de alguma representação matemática.

O fluxo de trânsito de grandes cidades, o crescimento de populações, a variação do lucro de uma empresa são alguns exemplos que foram examinados em diversos capítulos desta coleção de livros. Nesta unidade, você conheceu uma aplicação dos polinômios à criptografia de mensagens e senhas de segurança.

Agora, vamos conhecer o ajuste de curvas em uma situação de acompanhamento de uma população de macacos ameaçada de extinção.

Imagine a seguinte situação: uma espécie de macacos ameaçada de extinção foi devolvida à natureza em uma ilha com condições ideais de sobrevivência.

Inicialmente, foram levados para essa ilha 144 exemplares dessa espécie e a cada ano os cientistas voltaram para acompanhar os animais e contar a população, coletando os seguintes dados:

Ano	População de macacos
0	144
1	180
2	250
3	350
4	400

Analisando esses dados, os cientistas se preocuparam com a redução da velocidade de crescimento da população de animais e resolveram investigar o comportamento da variação dessa população.

Para isso, utilizaram o que chamamos de ajuste de curva, ou seja, um modelo matemático na forma de uma função que mais se aproxima dos pontos da tabela e que permite calcular os valores da população para além do quarto ano, para assim prever o tamanho da população e confirmar ou não as preocupações com o futuro dessa espécie de animais.

Vamos conhecer como se faz isso com o uso do computador e uma planilha eletrônica, como a do Libreoffice.

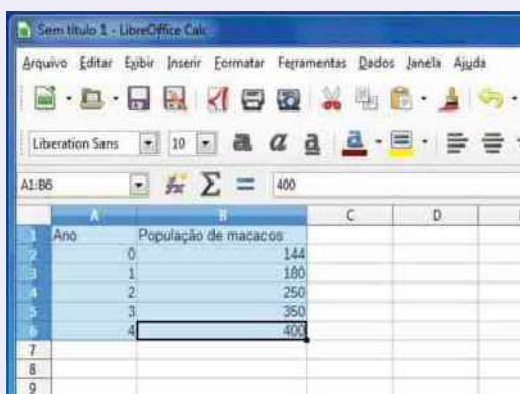
O sauí-de-coleira (*Saguinus bicolor*) é um primata que pode chegar a medir cerca de 33,6 cm de comprimento. Segundo o Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio), é o primata mais ameaçado de extinção de toda a Amazônia.



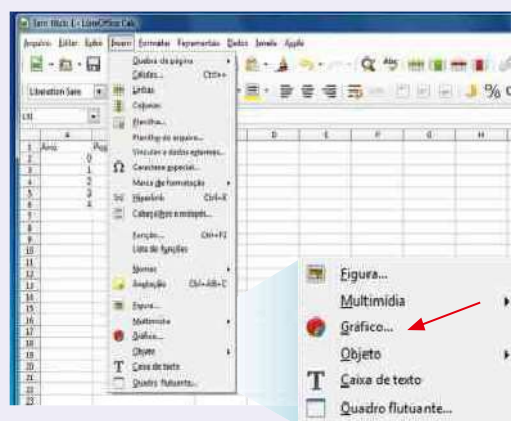
Solna, Juergen & Christine/
Animals Animals/Keystone Brasil

1ª etapa:

Na tela inicial, a tabela é digitada. Em seguida, selecionamos todas as células preenchidas e, no menu “Inserir”, selecionamos “Gráfico...”.

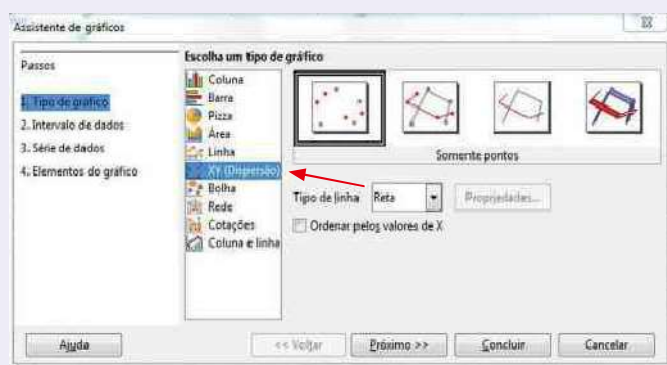


Ano	População de macacos
0	144
1	180
2	250
3	350
4	400



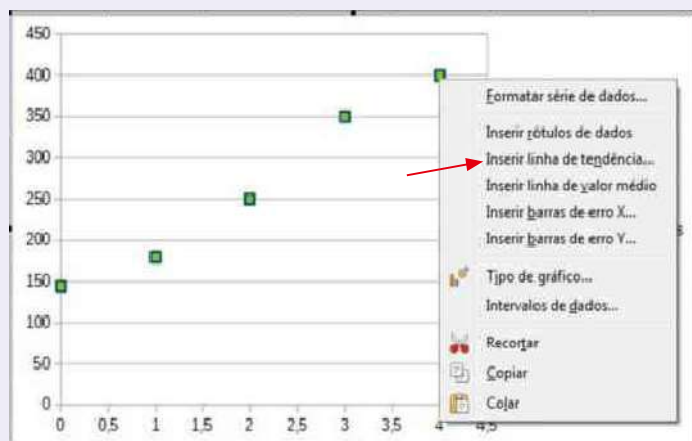
Imagens: 2000-2015 Colaboradores do LibreOffice

Na tela que se abrirá, o menu “Assistente de gráficos”, selecionamos “Gráfico de dispersão”.



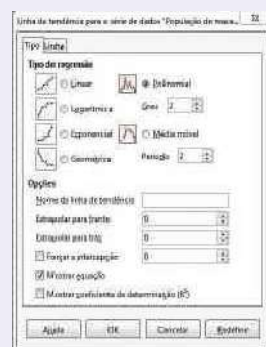
2ª etapa:

Com o botão esquerdo do *mouse*, selecionamos os pontos do gráfico gerado na etapa anterior e, depois, clicando com o botão direito sobre um desses pontos, abrirá um menu no qual selecionamos a opção “Inserir linha de tendência...”.

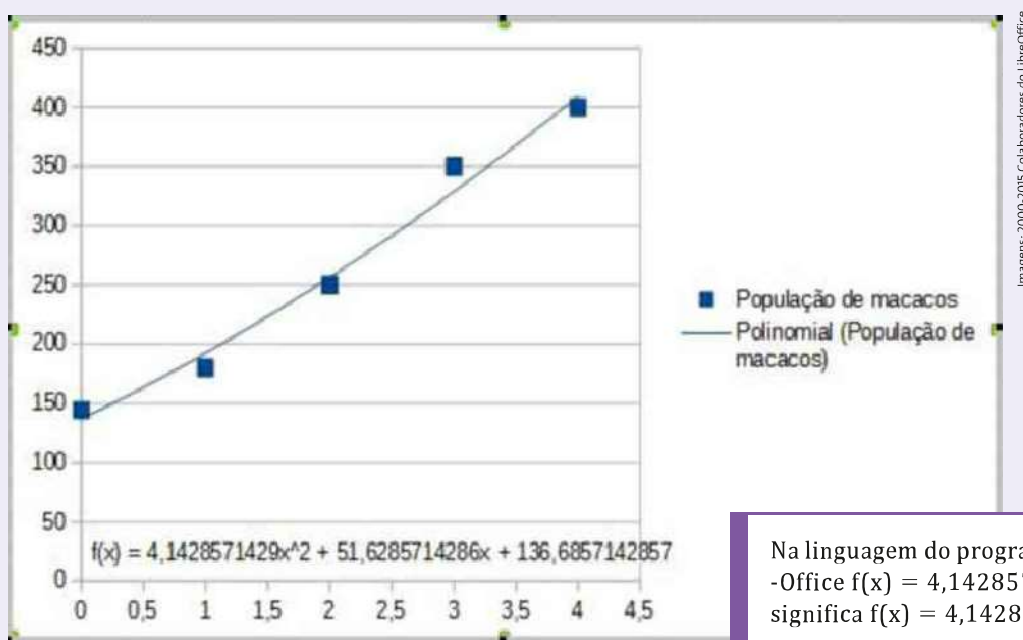


Na aba “Tipo” do menu que se abrirá, é possível escolher a função que se deseja ajustar aos pontos traçados a partir da tabela.

Selecione a função polinomial de grau 2 e marcamos a opção “Mostrar equação”.

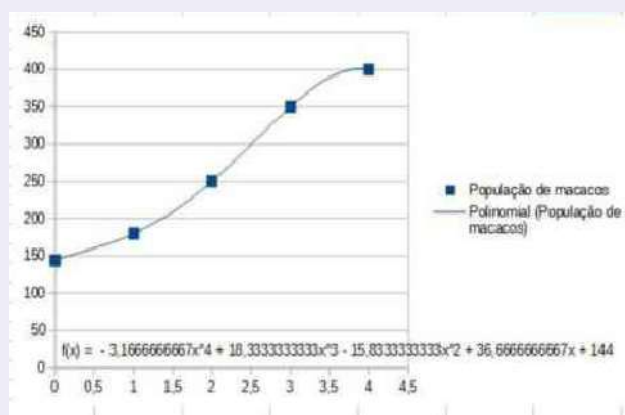
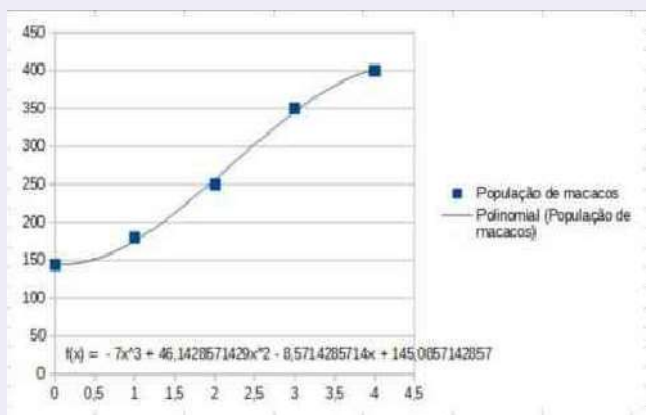


Como o gráfico da função dado por $f(x) = 4,1428571429x^2 + 51,6285714286x + 136,6857142857$ tem concavidade para cima e ela é crescente a partir do valor $x = 4$, os cientistas não deveriam se preocupar, uma vez que por esse ajuste de curva há indícios de que a população de animais continuaria a crescer.



3ª etapa:

Não contentes com essa informação, os cientistas fizeram novos ajustes com funções polinomiais de 3º e de 4º graus, que já mostram que o crescimento da população não é tão certo após o valor $x = 4$. Observe.



4ª etapa:

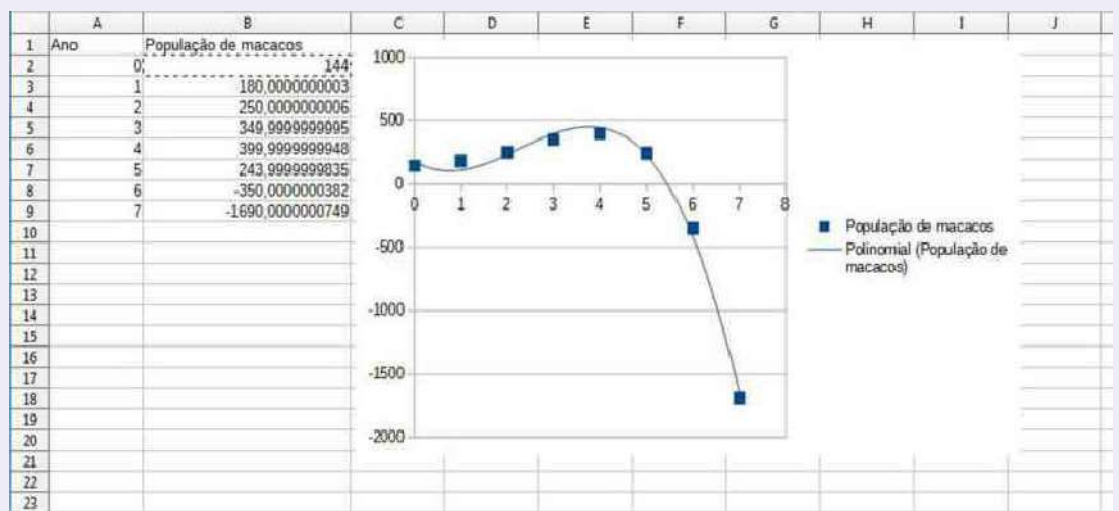
Faremos, então, uma investigação mais apurada da função de 4º grau que se ajusta aos dados do censo de macacos até o ano $x = 4$.

Novamente, na planilha de dados digitamos uma tabela, agora para a função $f(x) = -3,1666666667x^4 + 18,3333333333x^3 - 15,8333333333x^2 + 36,6666666667x + 144$, ampliando-se o intervalo de dados para $[0,7]$.

Para isso, digitamos, na coluna **A**, os valores de x de 0 a 7 e, na célula B2, registramos: $=-3,1666666667*A2^4+18,3333333333*A2^3-15,8333333333*A2^2+36,6666666667*A2+144$

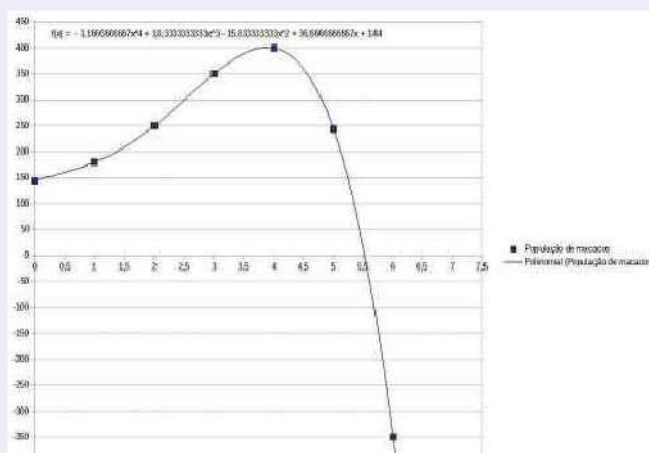
SOMA		$=-3,1666666667*A2^4+18,3333333333*A2^3-15,8333333333*A2^2+36,6666666667*A2+144$						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ano	População de macacos						
2		$=-3,1666666667*A2^4+18,3333333333*A2^3-15,8333333333*A2^2+36,6666666667*A2+144$						
3	1							

Essa função é copiada e arrastada para os demais valores de x produzindo a tabela completa. Em seguida, de acordo com os passos anteriores, é possível também obter o seu gráfico:



Imagens: 2000-2015 Colaboradores do LibreOffice

A seguir, mostramos novamente o gráfico acima, porém formatado e recortado.



A partir desse gráfico, é possível observar que a população de animais está ameaçada e que muito rapidamente, se nada for feito, pode ocorrer a extinção do grupo.

Logo, o estudo da queda dessa população merece um aprofundamento e alguma tomada de decisão para proteger a espécie.

O mico-leão-dourado (*Leontopithecus rosalia*) é um primata que pode chegar a medir cerca de 37 cm de comprimento. De acordo com o ICMBio, essa espécie é encontrada principalmente na Mata Atlântica do Rio de Janeiro e, apesar de esforços conservacionistas e da criação de áreas protegidas, ainda é ameaçada de extinção.



LacZ, Gerard/Animals Animals/Keystone Brasil

ATIVIDADES

REGISTRE
NO CADERNO

1. Você pode imaginar o que investigar e como garantir a preservação desses animais? Converse com os colegas, troquem opiniões e depois, junto com toda a classe, apresentem suas sugestões de modo a assegurar a continuidade e o crescimento dessa espécie animal.
2. Junto com os colegas, faça uma pesquisa sobre espécies ameaçadas de extinção no Brasil e sobre iniciativas que visam à preservação dessas espécies.

A questão a seguir é discursiva e envolve a leitura e interpretação de gráfico, além de divisão de polinômios. O objetivo é calcular o resto de uma divisão de polinômios.

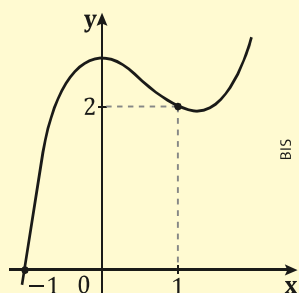
É importante, antes de resolver, fazer uma leitura minuciosa e destacar quais informações são necessárias para resolver a questão. Algumas perguntas podem auxiliá-lo. Observe:

- Em que as informações do gráfico auxiliam na resolução da questão?
- Na divisão de polinômios são usados diversos termos. Você sabe todos eles?
- Conhece a fórmula do algoritmo da divisão?
- Sabe aplicar a fórmula e resolver o sistema para obter a resposta do problema?
- Você sabe que o grau do polinômio resto é sempre menor que o grau do divisor?

Resolva a questão e, depois, acompanhe a resolução.

VESTIBULAR EM CONTEXTO

(UERJ) O gráfico ao lado apresenta a função polinomial **P** do 3º grau que intersecta o eixo das abscissas no ponto $(-1, 0)$. Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $x^2 - 1$.



Resolução

Aplicando o algoritmo da divisão aos polinômios $P(x)$ e $(x^2 - 1)$, obtém-se:

dividendo = divisor \times quociente + resto

$$P(x) = (x^2 - 1) \times Q(x) + (ax + b)$$

De acordo com o gráfico de **P**: $P(-1) = 0$ e $P(1) = 2$

Então:

$$P(-1) = [(-1)^2 - 1] \times Q(-1) + (a \times (-1) + b) = 0,$$

o que implica: $-a + b = 0$

$$P(1) = (1^2 - 1) \times Q(1) + (a \times 1 + b) = 2 \text{ resulta}$$

que $a + b = 2$

$$\text{Resolvendo o sistema resultante: } \begin{cases} -a + b = 0 \\ a + b = 2 \end{cases}$$

Temos $a = b = 1$. Assim, o resto da divisão é $x + 1$.

ATIVIDADES

REGISTRE
NO CADERNO



Agora, resolva quatro questões de vestibulares e do Enem. Lembre-se de, antes de resolvê-las, questionar-se sobre o que é preciso retomar do que estudou nesta unidade.

- (UFF-RJ) Considere as seguintes afirmações sobre polinômios de coeficientes reais:
(I) Todo polinômio de grau ímpar admite pelo menos um zero real.
(II) Um polinômio de grau par pode ter todos os zeros complexos.
(III) $2 + i$ e $3 - i$ podem ser zeros de um mesmo polinômio do 3º grau.
São verdadeiras:
a) I e II c) II e III e) Nenhuma.
b) I e III d) Todas.
- (Fuvest-SP) A equação $x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$, em que **m** e **n** são números reais, admite $1 + i$ (sendo **i** a unidade imaginária) como raiz. Então **m** e **n** valem, respectivamente:
a) 2 e 2. c) 0 e 2. e) -2 e 0.
b) 2 e 0. d) 2 e -2.

- (UFRGS-RS) A equação $x^3 + 5x^2 - 2 = 0$ tem:
a) somente uma raiz positiva.
b) exatamente duas raízes positivas.
c) três raízes positivas.
d) nenhuma raiz positiva.
e) nenhuma raiz real.

- (Enem-MEC) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:
• A nota zero permanece zero.
• A nota 10 permanece 10.
• A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:

- $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$
- $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$
- $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$
- $y = \frac{4}{5}x + 2$
- $y = x$

Funções trigonométricas e taxa de variação de funções

Você se lembra dos tipos de funções que já estudou até aqui?

Funções: um importante conceito algébrico

Você tem estudado as funções desde o primeiro ano do Ensino Médio e se deparou com elas nas mais diversas situações. Vamos recordar!

Uma função afim pode expressar o valor a ser pago mensalmente pela assinatura de uma conta de celular pós-pago e os minutos gastos em ligações.

A função exponencial esteve presente para descrever o crescimento de populações de bactérias e dos juros de um empréstimo ou dívida.

Micrografia eletrônica de divisão de bactérias com cores artificiais. Ampliação: 13,058 vezes.



Você acabou de estudar as funções polinomiais e conhecer uma de suas aplicações para modelar uma situação de controle de uma população com risco de extinção.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

A arara-azul-grande (*Anodorhynchus hyacinthinus*) é uma espécie ameaçada de extinção. Um indivíduo adulto desta espécie pode atingir 1 metro de comprimento, da ponta do bico até a ponta da cauda, e pesar 1,3 kg.

Há algum tempo as funções trigonométricas também foram estudadas por você, porque elas podem descrever fenômenos periódicos da natureza e das ondas eletromagnéticas que impulsionam a tecnologia atual nos mais diversos campos do conhecimento.

$$\text{sen } x$$
$$\text{cos } x$$
$$\text{tg } x$$

Nesta unidade, você vai...

- conhecer um pouco mais da história da Trigonometria e resolver problemas mais elaborados envolvendo funções trigonométricas;
- entender o significado de taxa de variação de uma função ou sua derivada e conhecer alguns problemas interessantes que envolvem a busca dos valores máximo ou mínimo de uma função.

Assim como nas outras unidades, na seção **Aprender a aprender** de cada capítulo apresentamos listas de atividades diversas com conteúdos de capítulos e anos anteriores para que você continue estudando Matemática e se mantenha em constante reflexão sobre ela.

11

Funções trigonométricas

Este capítulo completa o estudo de Trigonometria na Educação Básica, iniciado nos volumes anteriores desta coleção.

Vamos relembrar as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente?

Já sabemos que razões trigonométricas são razões entre os lados de um triângulo retângulo que estão relacionadas aos seus ângulos agudos. Assim, considerando o triângulo retângulo ao lado, temos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{b}{c}$$

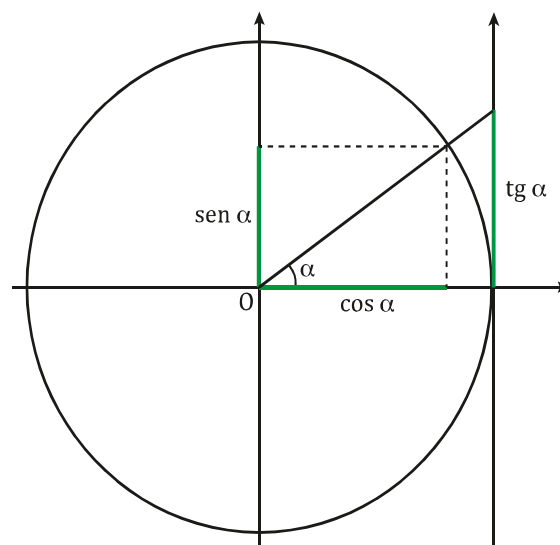
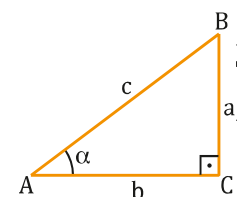
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

Sabemos também que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1$$

Vimos, ainda, que podemos estudar seno, cosseno e tangente de um ângulo α a partir de um ciclo trigonométrico.



Situe-se

Este capítulo dá prosseguimento ao estudo das funções trigonométricas, iniciado nos anos anteriores. Além disso, tem como objetivo recordar, por meio de uma abordagem histórica, as propriedades das funções seno, cosseno e tangente.

1 A história das funções trigonométricas

As tabelas a seguir são exemplos de legítimos antepassados das funções trigonométricas.

Tabela egípcia
(séc. 13 a.C.)

Fim de hora	Sombra
—	—
2	30
3	18
4	9
5	3
Meio-dia	0

Tabela grega
(séc. 5 a.C.)

Fim de hora	Sombra durante mês equinocial
1	25
2	15
3	11
4	8
5	6
Meio-dia	5

Tabela indiana
(séc. 1 ou 2 d.C.)

Fim de muhurta	$S_t - S_n$
1	96
2	60
3	12
4	6
5	5
6	3
7	2
Meio-dia $\left(7\frac{1}{2}\right)$	0

Tabela iraniana
(séc. 10 d.C.)

Fim de hora	$S_t - S_n$
1	72
2	36
3	24
4	$14\frac{2}{5} (?)$
5	12
6 (Meio-dia)	0

Cada tabela associa o término de uma hora específica do dia ao comprimento da sombra do que era chamado de **gnômon**: uma vara vertical ou uma pessoa em pé ao sol.

As tabelas revelam uma aplicação prática da constatação de que a sombra de uma vara é alongada ao amanhecer, reduzindo-se a um mínimo ao meio-dia, para novamente alongar-se à medida que a tarde avança. Essa constatação deu origem aos primeiros relógios de sol.

Há pelo menos três milênios, o ser humano usou uma função para fazer corresponder a um dado tempo um único valor do comprimento da sombra.

Usando a linguagem atual, a função trigonométrica envolvida nas chamadas tábuas de “sombra estendida” é a função $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$. Vejamos: conhecido o comprimento da vara, que representamos por **R**, vamos chamar de **s** a medida da sombra por ela projetada pela incidência dos raios solares. Temos então:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{s} \text{ e, daí, } s = \frac{R}{\operatorname{tg} \alpha} = R \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Assim, o que os antigos registravam em suas tabelas de sombra era o inverso da tangente do ângulo de incidência dos raios solares, dependendo também do tamanho **R** do gnômon utilizado.

A função $\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ seria denominada **cotangente** de α e representada por $\cotg \alpha$ pelo astrônomo inglês Edmund Gunter em 1620.

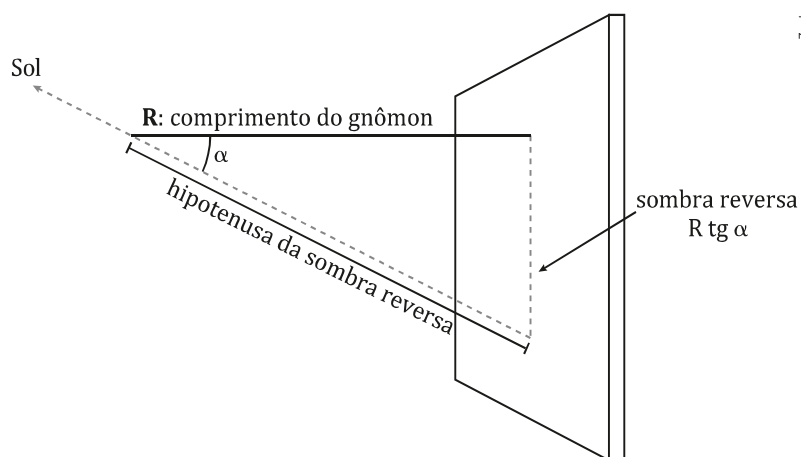
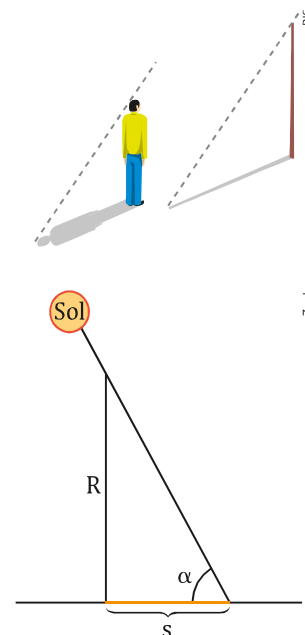
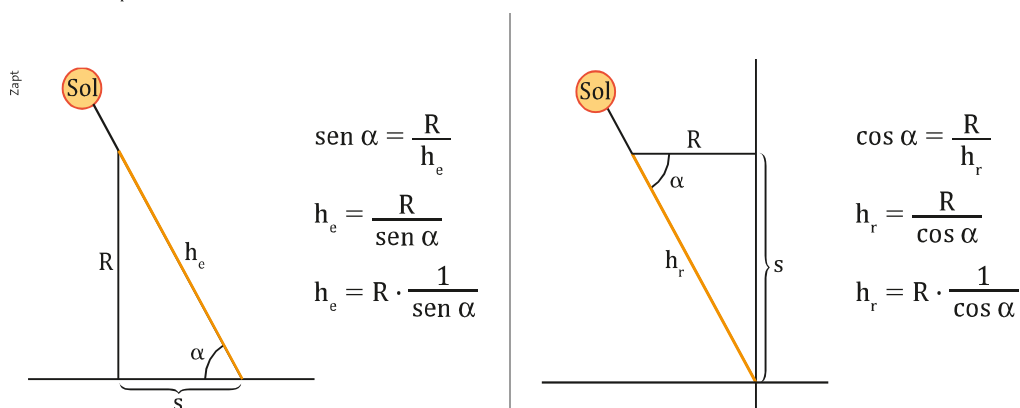
Por volta do século IX, eram comuns as tábuas de “sombra estendida”, bem mais elaboradas que as tabelas primitivas. Elas registravam a medida da sombra projetada em uma superfície horizontal como uma função da altura do Sol. Eram tábuas de $R \cotg \alpha$, geralmente calculadas para $\alpha = 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots, 90^\circ$.

Apesar de menos usuais, na Idade Média surgiram as tabelas de “sombra reversa”, como aquela projetada por um gnômon horizontal sobre um plano vertical, conforme se vê na figura ao lado.

Eram tábuas de $R \operatorname{tg} \alpha$; mais uma vez, o ângulo dependia da posição do Sol.

As medidas chamadas de “hipotenusa da sombra” raramente foram tabuladas, mas estão explicitamente definidas e aplicadas em cálculos encontrados em sânscrito e em árabe.

Vamos calcular os valores das hipotenusas da “sombra estendida” (h_e) e da “sombra reversa” (h_r):



Na linguagem atual, essas duas novas funções, $\frac{1}{\cos \alpha}$ e $\frac{1}{\sin \alpha}$, são denominadas, respectivamente, **secante de α** e **cossecante de α** e representadas por **sec α** e **cossec α** .

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \text{ e } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

No século 9, quando todas as modernas funções trigonométricas já eram conhecidas, surgem as tábuas em que **R** é considerado unitário. Dessa forma, os valores nas tábuas passam a corresponder aos que usamos hoje em dia.

Embora as funções seno e cosseno não tenham sido as primeiras a aparecer na resolução dos problemas de medição na Antiguidade, elas são hoje mais usuais na representação e modelagem de fenômenos das ciências e nas medições de distâncias inacessíveis.

Vamos relembrar essas funções trigonométricas e avançar.

FIQUE CONECTADO

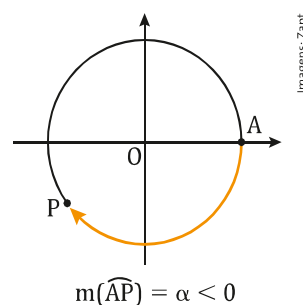
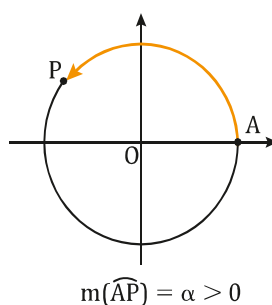
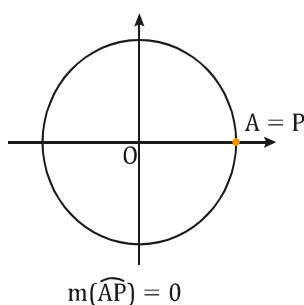
Em 1917, um biólogo e matemático escocês usou fórmulas e procedimentos matemáticos para estudar organismos vivos e flores. Saiba detalhes lendo a fórmula fundamental da natureza no livro *A vida secreta dos números*, de George G. Szpiro (Difel).

2 O ciclo trigonométrico

As razões trigonométricas definem funções quando estendemos seus valores para todo número real associado aos ângulos e arcos de uma circunferência, chamada **ciclo trigonométrico**.

No plano cartesiano, consideramos uma circunferência de raio unitário e a cada ponto **P** dessa circunferência associamos um número real **α** que corresponde à medida do arco orientado \widehat{AP} , em que **A** é o ponto de origem dos arcos.

- Se $\alpha = \text{zero}$, **P** neste caso coincide com **A**.
- Se $\alpha > 0$, percorremos a circunferência no sentido anti-horário.
- Se $\alpha < 0$, percorremos a circunferência no sentido horário.
- O comprimento de \widehat{AP} é o módulo de **α** .

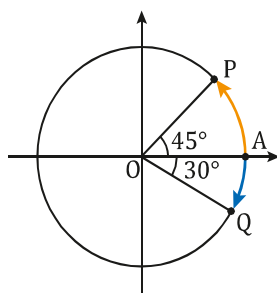


Imagens: Zapt

O ponto **P** é a **imagem** de **α** no ciclo trigonométrico.

Os arcos sobre o ciclo trigonométrico são medidos em duas unidades mais usuais.

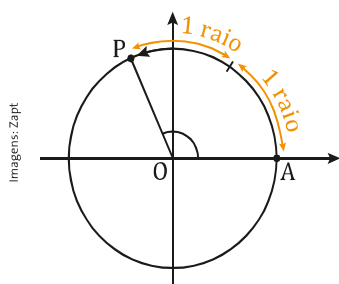
- **Grau:** a medida angular do arco coincide com a medida do ângulo central correspondente, medido em graus.



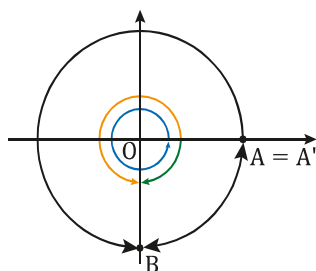
A medida do arco AP é igual à medida do ângulo \widehat{AOP} em graus.

P corresponde a 45° e **Q** a -30° .

- **Radiano:** a medida angular, em radianos, do arco coincide com a medida do ângulo central correspondente. É importante lembrar que um radiano é a medida do ângulo cujo arco tem o mesmo comprimento que o raio da circunferência.



P corresponde a 2 rad, porque o comprimento de \widehat{AP} é igual a 2 raios.



O ponto **A'** do arco obtido por uma volta completa no sentido anti-horário corresponde a 2π radianos (2π é o comprimento da circunferência de raio 1).

O ponto **B** corresponde a $\frac{3\pi}{2}$ ou a $-\frac{\pi}{2}$, dependendo se consideramos o arco AB percorrido no sentido anti-horário ou horário.

Podemos relacionar as medidas de arcos em graus e radianos usando uma regra de três.

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & \text{---} & 2\pi \text{ radianos} \\ a^\circ & \text{---} & \alpha \text{ radianos} \end{array} \quad \frac{a^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

Dessa relação, podemos escrever nessas duas unidades as medidas de alguns arcos importantes.

Em graus	0	360	180	90	45	30	60	270
Em rad	0	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$

As funções seno, cosseno e tangente e suas propriedades

Podemos ampliar os conceitos de seno, cosseno e tangente para qualquer número real α , usando as coordenadas de **P**, imagem de α no ciclo trigonométrico.

Função seno

Função seno (sen) é a função, de \mathbb{R} em \mathbb{R} , que a todo número α associa a ordenada do ponto **P**, imagem de α no ciclo trigonométrico.

$$\text{sen}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

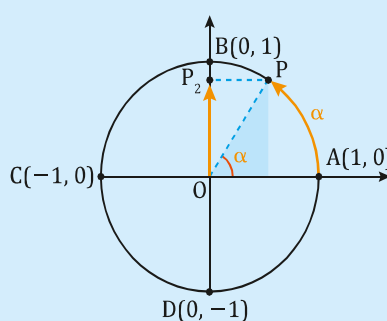
$$\alpha \mapsto \text{sen } \alpha = OP_2$$

OP_2 é a medida algébrica do segmento OP_2 quando o raio é tomado como unidade.

Dizemos também que OP_2 é o seno de \widehat{AOP} ou de \widehat{AP} e indicamos:

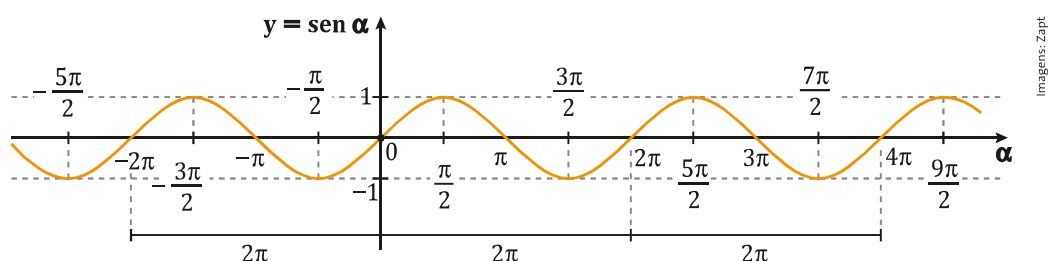
$$\text{sen } \widehat{AOP} = \text{sen } \widehat{AP} = OP_2$$

O eixo Oy passa a ser denominado **eixo dos senos**.



Observe os valores dos senos de alguns arcos e a representação gráfica da função $y = \sin \alpha$.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\sin) = [-1, 1]$$

Função cosseno

Função cosseno (cos) é a função, de \mathbb{R} em \mathbb{R} , que a todo número α associa a abscissa do ponto P , imagem de α no ciclo trigonométrico.

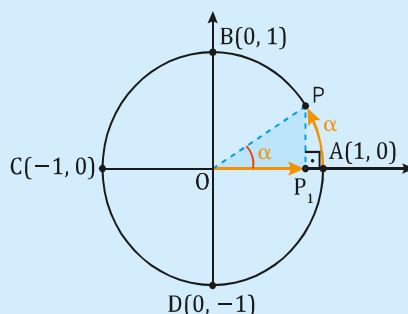
$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\alpha \mapsto \cos \alpha = OP_1$$

Dizemos também que OP_1 é o cosseno de \widehat{AOP} ou de \widehat{AP} e indicamos:

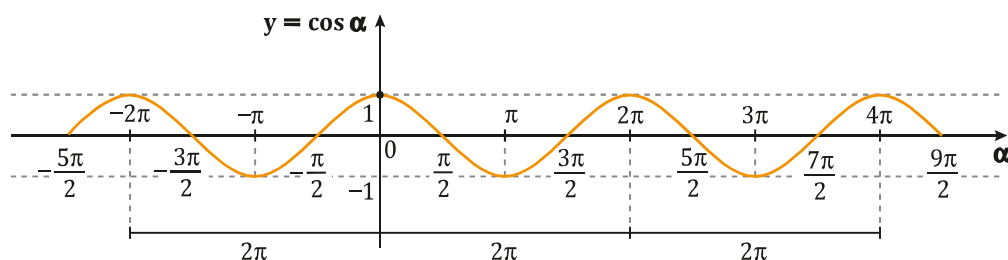
$$\cos \widehat{AOP} = \cos \widehat{AP} = OP_1$$

O eixo Ox passa a ser denominado **eixo dos cossenos**.



Observe os valores dos cossenos de alguns arcos e a representação gráfica da função $y = \cos \alpha$.

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{Im}(\cos) = [-1, 1]$$

Função tangente

Função tangente (tg) é a função, de

$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ em \mathbb{R} , que a todo número α associa a ordenada do ponto **T**, interseção de \overrightarrow{AU} com \overrightarrow{OP} , em que **P** é a imagem de α no ciclo trigonométrico.

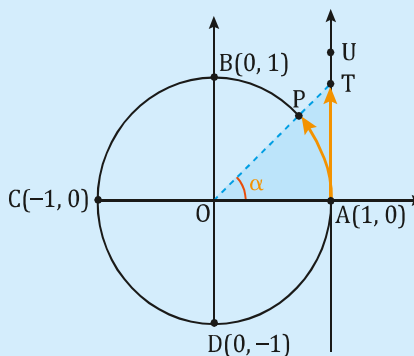
$$\text{tg}: \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \mapsto \mathbb{R}$$

$$\alpha \longmapsto \text{tg } \alpha = AT$$

Dizemos também que AT é a tangente de \widehat{AOP} ou de \widehat{AP} e indicamos:

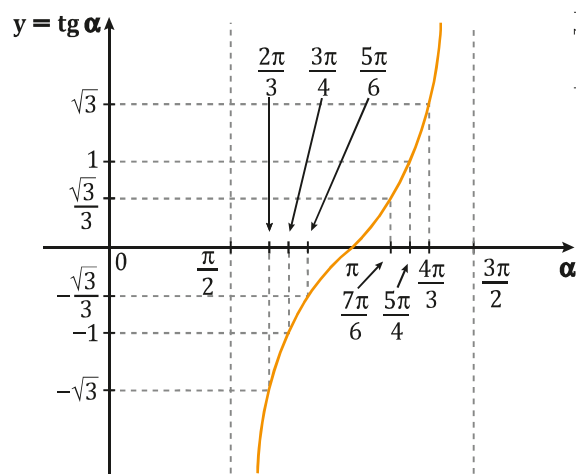
$$\text{tg } \widehat{AOP} = \text{tg } \widehat{AP} = AT$$

O eixo \overrightarrow{AU} passa a ser denominado **eixo das tangentes**.

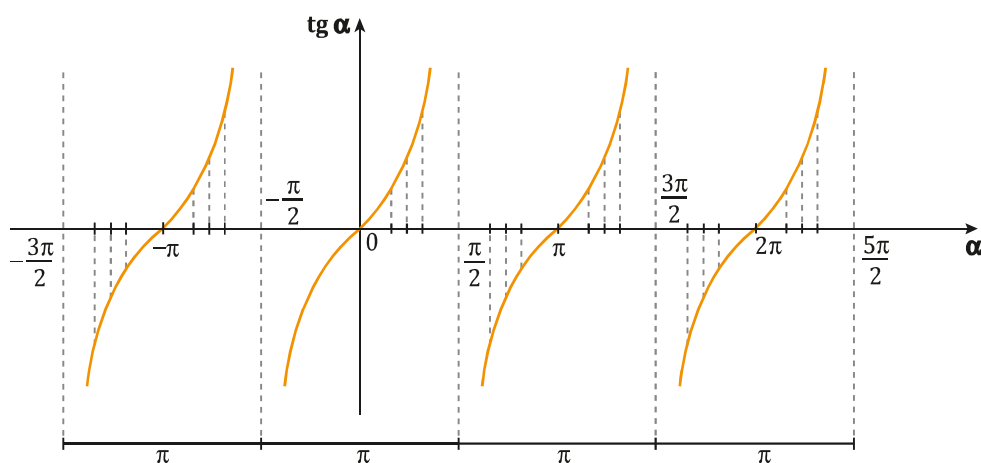


Observe os valores das tangentes de alguns arcos e a representação gráfica da função $y = \text{tg } \alpha$.

α	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$
$\text{tg } \alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$



Imagens: Zapt



$$\text{Im}(\text{tg}) = \mathbb{R}$$

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

Estude as atividades resolvidas e aproveite para revisar noções e identificar termos ou escritas matemáticas em que ainda tenha dúvida.

R1. Determine todos os valores de x que satisfazem a equação $\sin x = \frac{1}{2}$.

Resolução

No ciclo trigonométrico existem dois pontos, P e P' , cujos arcos têm seno igual a $\frac{1}{2}$.

Esses pontos correspondem aos arcos \widehat{AP} e $\widehat{AP'}$ de medidas $\frac{\pi}{6}$ (30°) e $\frac{5\pi}{6}$ (150°), respectivamente.

Além desses, todos os outros arcos obtidos com adição ou subtração de voltas inteiras de \widehat{AP} e $\widehat{AP'}$ (e que são chamados arcos **côngruos** a \widehat{AP} e $\widehat{AP'}$) também satisfazem a equação $\sin x = \frac{1}{2}$.

A solução da equação é

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

R2. Para a função $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, responda às questões.

- Para quais valores de $x \in [-2\pi, 2\pi[$ tem-se $\cos x = 1$?
- Para quais valores de $x \in [0, 2\pi]$, $f(x) \geq 0$?
- f é decrescente em quais intervalos de \mathbb{R} ?
- Quais são os pontos de mínimo de f no intervalo $[-\pi, 3\pi]$?

Resolução

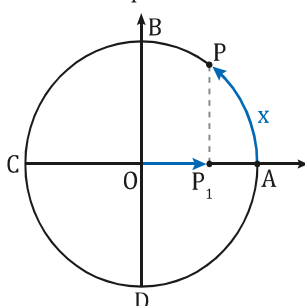
a) Observando-se o gráfico de $f(x) = \cos x$, percebemos que $\cos x = 1$ se $x = 0 + k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

No intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, $\cos x = 1$ apenas quando $x = -2\pi$ ou $x = 0$.

b) A função cosseno é positiva ou nula quando x corresponde a arcos do 1º ou do 4º quadrantes.

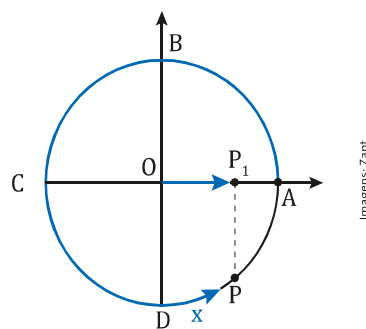
$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ou } x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

P no 1º quadrante



P_1 à direita de $O \Rightarrow \cos x > 0$

P no 4º quadrante

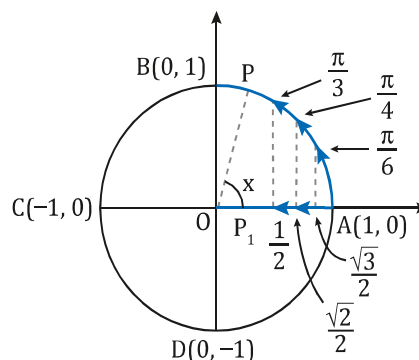


P_1 à direita de $O \Rightarrow \cos x > 0$

c) 1ª resolução: Com apoio do ciclo trigonométrico.

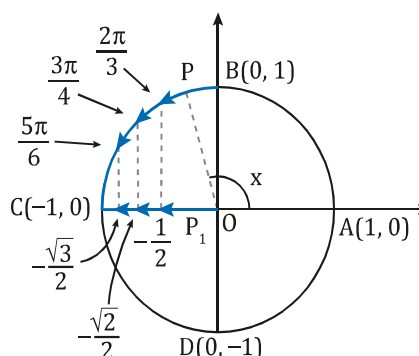
No intervalo $[0, 2\pi]$, a função cosseno é decrescente no intervalo $[0, \pi]$, ou seja, nos pontos do 1º e do 2º quadrantes.

P no 1º quadrante



Aumentando x de zero a $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ diminui de 1 a zero. Portanto, a função cosseno é *decrescente* no 1º quadrante.

P no 2º quadrante

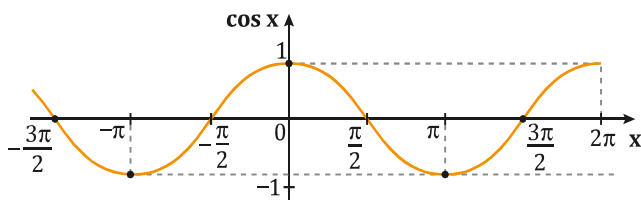


Aumentando x de $\frac{\pi}{2}$ a π , $\cos x$ diminui de zero a -1 . Portanto, a função cosseno é *decrescente* no 2º quadrante.

Adicionando-se ou subtraindo-se voltas inteiras, f é decrescente em todo intervalo da forma

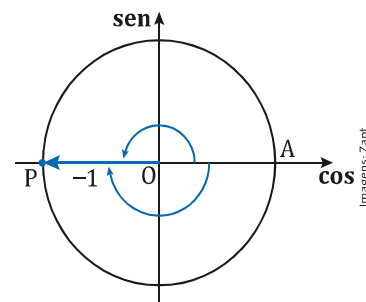
$$[k \cdot 2\pi, (2k + 1) \cdot \pi], k \in \mathbb{Z}.$$

2ª resolução: Com apoio do gráfico de $f(x) = \cos x$ para $x \in \mathbb{R}$.



f é decrescente em todo o intervalo $[k \cdot 2\pi, (2k + 1)\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) No intervalo $[-\pi, 3\pi]$, f assume seu valor mínimo, que é -1 , nos arcos que coincidem com o ponto **P**, ou seja, quando $x = -\pi$ ou $x = \pi$ ou $x = 3\pi$.



Antes de propor as atividades, peça aos estudantes que organizem os valores de seno, cosseno e tangente dos arcos notáveis. Aproveite para relembrar com eles a lei dos cossenos.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO

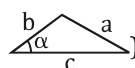
Antes de resolver as atividades, leia-as e liste suas dúvidas. Pesquise, questione o professor e então as resolva.

1. Sendo $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ e α no 4º quadrante, calcule $\cos \alpha$ e $\tan \alpha$.
2. Sendo $\tan \alpha = \frac{3}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$.
3. Em um triângulo equilátero ABC de lados iguais a 1, trace a altura \overline{AH} e, no triângulo retângulo ABH formado, calcule $\sin 60^\circ$, $\cos 60^\circ$, $\sin 30^\circ$ e $\cos 30^\circ$.
4. No quadrado ABCD de lado 1, considere a diagonal \overline{AC} e, no triângulo retângulo ABC, calcule $\sin 45^\circ$ e $\cos 45^\circ$.
5. Encontre um ângulo α no 2º quadrante com:
 - a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - b) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 - c) $\tan \alpha = -\sqrt{3}$
 - d) $\sin \alpha = \cos \alpha$
6. Identifique os quadrantes em que:
 - a) o seno e a tangente são negativos.
 - b) o cosseno cresce e o seno é negativo.
 - c) a tangente é negativa e o cosseno é positivo.
 - d) o seno cresce e o cosseno decresce.
 - e) o produto do seno pelo cosseno é negativo.
 - f) o seno e o cosseno são decrescentes.
 - g) a tangente e o seno são positivos.
 - h) a tangente é positiva e o cosseno é negativo.
 - i) a tangente cresce e o seno decresce.
7. Descreva a variação do sinal e do crescimento das funções seno, cosseno e tangente quando o ângulo varia entre $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{2}$.

8. (UFRJ) Os ponteiros de um relógio circular medem, do centro às extremidades, 2 metros, o dos minutos, e 1 metro, o das horas.

Determine a distância entre as extremidades dos ponteiros quando o relógio marca 4 horas.

(Lembre-se da lei dos cossenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$)



9. (UFPR) Suponha que, durante certo período do ano, a temperatura **T**, em graus Celsius, na superfície de um lago possa ser descrita pela função $f(t) = 21 - 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ sendo **t** o tempo em horas medido a partir das 6 horas da manhã.
 - a) Qual a variação de temperatura num período de 24 horas?
 - b) A que horas do dia a temperatura atingirá 23°C ?
10. (Enem-MEC) Um satélite de telecomunicações, **t** minutos após ter atingido sua órbita, está a **r** quilômetros de distância do centro da Terra. Quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o *apogeu* e o *perigeu*, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de **r** em função de **t** seja dado por $r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot \cos(0,06t)}$.
Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de **r**, no apogeu e no perigeu, representada por **S**.
O cientista deveria concluir que, periodicamente, **S** atinge o valor de
 - a) 12 765 km.
 - b) 12 000 km.
 - c) 11 730 km.
 - d) 10 965 km.
 - e) 5 865 km.

Matrizes, simetrias e Trigonometria

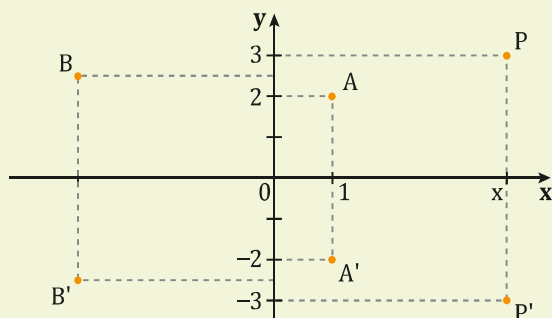
As matrizes 2×2 podem representar movimentos de pontos no plano cartesiano. Vamos ver um exemplo.

Se representarmos o ponto $A(1, 2)$ pela matriz $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e considerarmos a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, poderemos calcular o produto $M \cdot A$ e obter o ponto $A' = M \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

O que acontecerá se transformarmos um ponto qualquer $P(x, y)$ pela matriz M ?

$$\text{Obteremos } P' = M \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

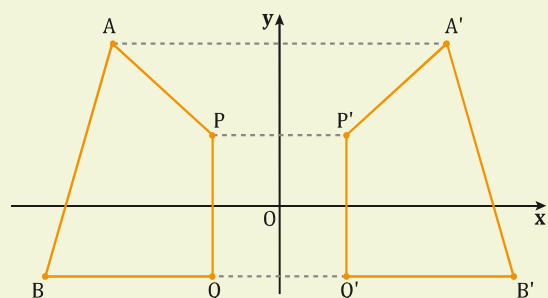
Graficamente, temos:



A matriz M transforma um ponto P qualquer em seu ponto simétrico em relação ao eixo Ox .

Que matriz associa a cada ponto P seu simétrico em relação ao eixo Oy ?

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ é a matriz que faz essa transformação.}$$



Se aplicarmos N a cada ponto do polígono à esquerda do eixo Oy , vamos encontrar os pontos do polígono à direita de Oy .

Existem matrizes que correspondem a outros movimentos no plano.

Seja $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Que ação essa matriz exerce sobre os pontos do plano?

$$R \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

A matriz R corresponde a um giro de 90° do ponto P em torno do ponto $O(0, 0)$.

De fato, observe que os triângulos OPA e $P'OB$ são congruentes e retângulos, daí os ângulos $B\hat{O}P'$ e $P\hat{O}A$ serem complementares, o que implica que o ângulo $P\hat{O}P'$ é reto.

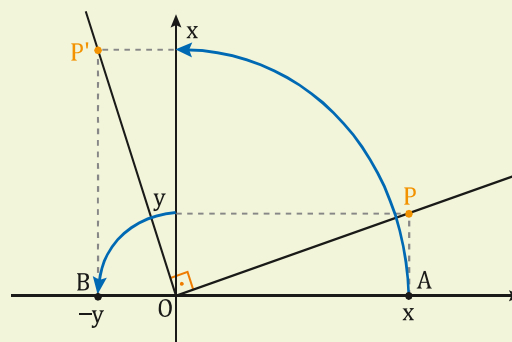
A matriz R corresponde a uma **rotação** de 90° no sentido anti-horário.

Observe a forma como a matriz R pode ser escrita:

$$R = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$$

Se quisermos uma rotação de um ângulo α em torno de O , bastará considerar a matriz:

$$S = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$



Imagens: Zapt

Mas, para justificarmos essa última afirmação, precisamos aplicar o que sabemos de Trigonometria.

Vamos considerar um ponto $P(x, y)$ qualquer do plano cartesiano e um ponto $P'(x', y')$ obtido girando-se o ponto P em um ângulo α em torno de O . Chamaremos de β o ângulo entre \overline{OP} e o eixo Ox .

Pela rotação, $OP = OP' = d$.

No triângulo retângulo $OP'Q$:

$$OQ = x' = d \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

$$QP' = y' = d \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$x' = d \cdot \cos(\alpha + \beta) = d(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) =$$

$$= d \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha - d \cdot \sin \beta \cdot \sin \alpha$$

$$y' = d \cdot \sin(\alpha + \beta) = d(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) =$$

$$= d \cdot \cos \beta \cdot \sin \alpha + d \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

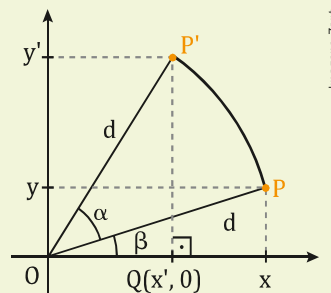
Mas $x = d \cdot \cos \beta$ e $y = d \cdot \sin \beta$ são as coordenadas de P ; então:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \end{cases} \text{ ou seja } P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S \cdot P$$

Todo esse raciocínio pode ser feito na sequência contrária. Partindo de $P' = S \cdot P$ e fazendo os mesmos cálculos na ordem inversa, chegaremos a:

$$x' = d \cdot \cos(\alpha + \beta) \text{ e } y' = d \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

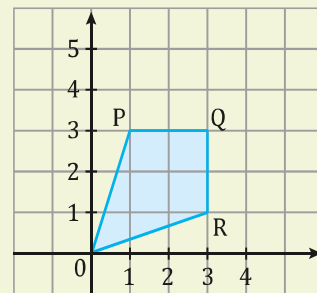
Isso demonstra que P' é a rotação de ângulo α de P em torno de O .



Imagens: Zapit

ATIVIDADE

1. Copie no caderno o desenho ao lado e, com base no que foi feito nesta seção, gire o polígono em 60° em torno de O no sentido anti-horário.



FOCO NA LEITURA

REGISTRE
NO CADERNO



Você já resolveu diversos problemas de cálculo de distâncias inacessíveis com o uso das razões trigonométricas. Algumas vezes, mais do que usar a Trigonometria, é preciso resolver o problema literalmente, ou seja, sem valores numéricos, mas com letras que representam os dados do problema. Além do conhecimento das relações trigonométricas, é exigida sua habilidade de cálculo algébrico.

Análise o seguinte problema e resolva-o. Observe que a leitura das alternativas também é parte da resolução.

(UFG-GO) Dois observadores, situados nos pontos A e B , a uma distância d um do outro, como mostra a figura a seguir, avistam um mesmo ponto no topo de um prédio de altura H , sob um mesmo ângulo θ com a horizontal. Sabendo que o ângulo ABC também mede θ e desconsiderando a altura dos observadores, a altura H do prédio é dada pela expressão:

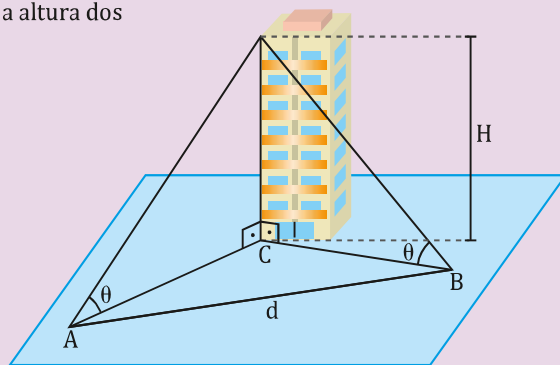
a) $H = \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \theta$

b) $H = d \cos \theta \sin \theta$

c) $H = \frac{d}{2} \operatorname{tg} \theta \sin \theta$

d) $H = \frac{d}{2} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\cos \theta}$

e) $H = d \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{tg} \theta$

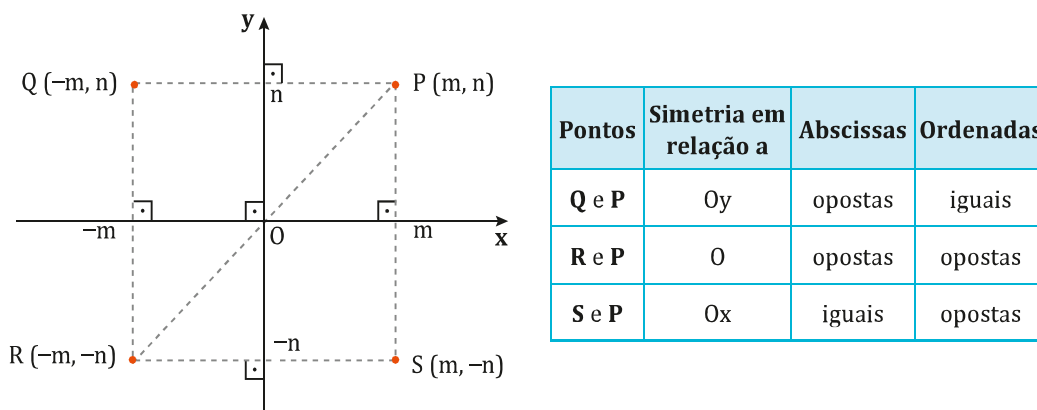


3 Redução ao 1º quadrante

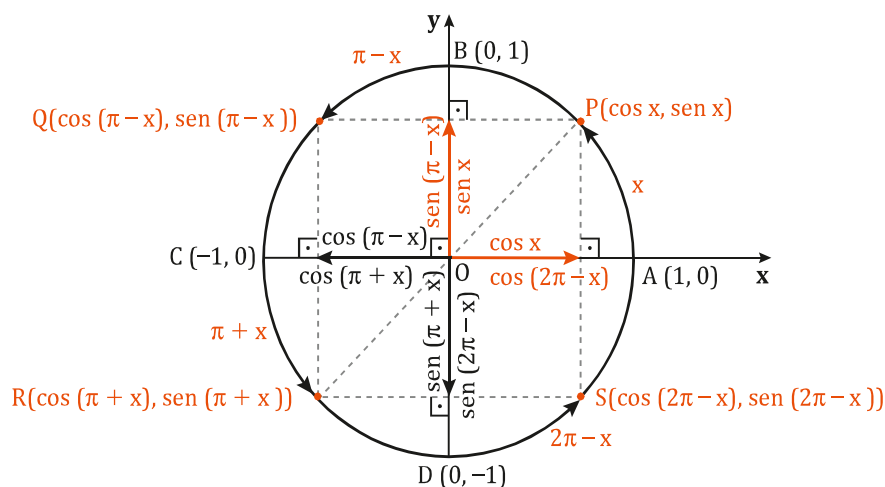
Observando o estudo feito até aqui sobre Trigonometria, é possível verificar que os ângulos e os arcos do 1º quadrante se relacionam com os dos demais.

Os valores de uma função trigonométrica **f** para arcos com extremidades não pertencentes ao 1º quadrante podem ser calculados por meio dos valores de **f** para arcos com extremidade no 1º quadrante. Esse processo é denominado **redução ao 1º quadrante**. Em virtude desse fato, a tabela dos valores das funções trigonométricas é constituída apenas por ângulos de 0° a 90°.

Considerando os pontos **P**, **Q**, **R** e **S** da figura, é fácil perceber que as simetrias de **P** com os demais pontos nos levam às relações entre as suas coordenadas anotadas no quadro.



De modo geral, consideremos agora os pontos **P**, **Q**, **R** e **S** no ciclo trigonométrico.



Se **P** determina o arco de medida x , $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então **Q**, **R** e **S** determinam, respectivamente, arcos de medidas $\pi - x$, $\pi + x$ e $2\pi - x$.

Pelas definições de seno e de cosseno, temos:

$P(\cos x, \sin x)$, $Q(\cos(\pi - x), \sin(\pi - x))$,

$R(\cos(\pi + x), \sin(\pi + x))$ e $S(\cos(2\pi - x), \sin(2\pi - x))$

Aplicando as simetrias das coordenadas, obtemos:

Pontos	Abcissas	Ordenadas
Q e P	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
R e P	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$
S e P	$\cos(2\pi - x) = \cos x$	$\sin(2\pi - x) = -\sin x$

Exemplos:

- a) Para reduzir o arco $\frac{4\pi}{5}$ ao 1º quadrante, procuramos o ponto P' simétrico a P em relação ao eixo dos senos no 1º quadrante.

Como $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, então

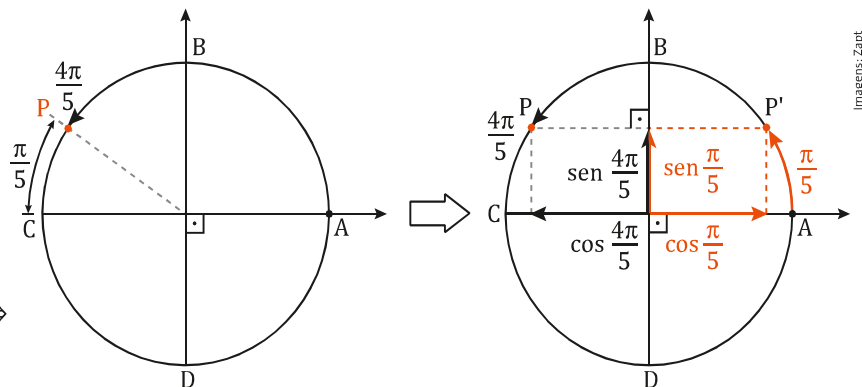
$$\pi - \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{5}; \text{ logo:}$$

$$\sin \frac{4\pi}{5} = \sin \frac{\pi}{5};$$

$$\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5};$$

$$\operatorname{tg} \frac{4\pi}{5} = \frac{\sin \frac{4\pi}{5}}{\cos \frac{4\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{-\cos \frac{\pi}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{4\pi}{5} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$$



- b) Para reduzir 220° ao 1º quadrante, também buscamos o ponto P' do 1º quadrante simétrico a P em relação a O .

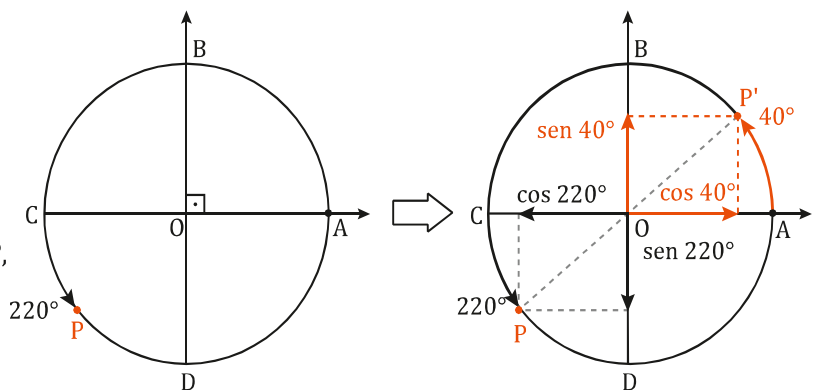
Como $180^\circ < 220^\circ < 270^\circ$, então

$$220^\circ - 180^\circ = 40^\circ; \text{ logo:}$$

$$\sin 220^\circ = -\sin 40^\circ;$$

$$\cos 220^\circ = -\cos 40^\circ; \operatorname{tg} 220^\circ = \operatorname{tg} 40^\circ,$$

porque 220° pertence ao 3º quadrante.



- c) Para reduzir 310° ao 1º quadrante, determinamos o ponto P' do 1º quadrante simétrico a P em relação ao eixo dos cossenos.

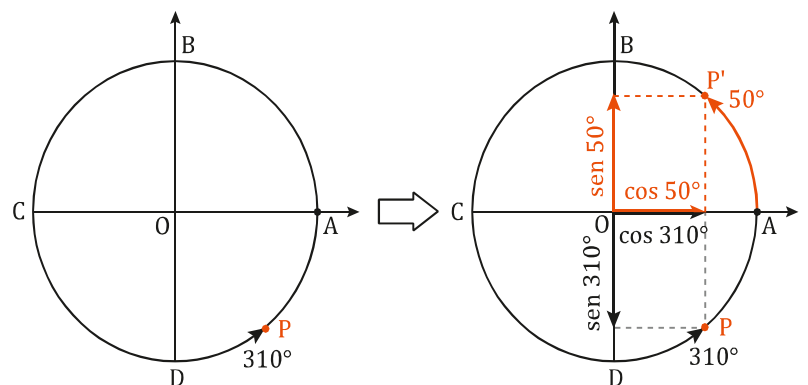
Como $270^\circ < 310^\circ < 360^\circ$, então

$$360^\circ - 310^\circ = 50^\circ; \text{ logo:}$$

$$\sin 310^\circ = -\sin 50^\circ;$$

$$\cos 310^\circ = \cos 50^\circ;$$

$$\operatorname{tg} 310^\circ = -\operatorname{tg} 50^\circ.$$



As relações entre seno e cosseno de ângulos complementares:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{e} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

e as relações obtidas na redução para o 1º quadrante:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - x) &= \sin x \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi + x) &= -\sin x \\ \cos(\pi + x) &= -\cos x \end{aligned}$$

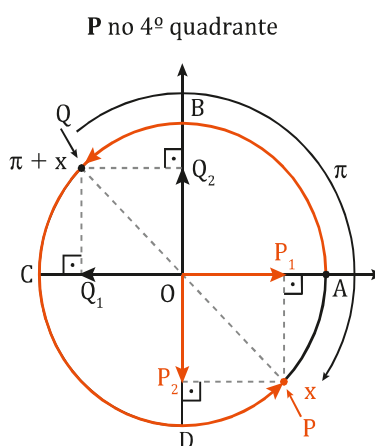
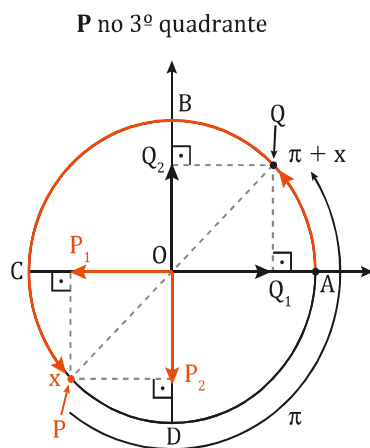
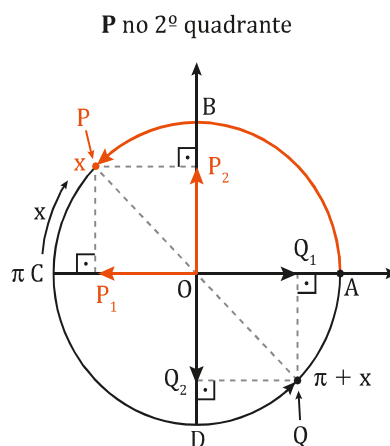
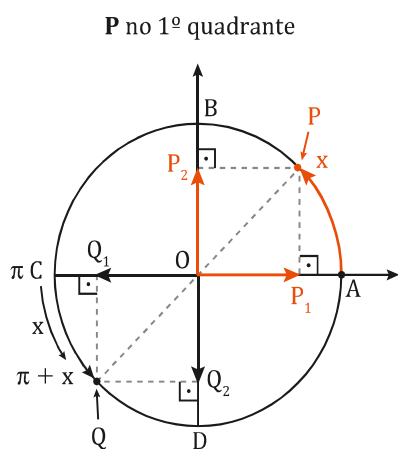
$$\begin{aligned} \sin(2\pi - x) &= -\sin x \\ \cos(2\pi - x) &= \cos x \end{aligned}$$

são válidas para todo número real x .

Vamos, por exemplo, mostrar que:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \text{ e } \cos(\pi + x) = -\cos x$$

são verdadeiras independentemente do quadrante ao qual pertença a extremidade **P** do arco de medida **x**.



Em cada caso:

$$OQ_2 = -OP_2 \Rightarrow \sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$OQ_1 = -OP_1 \Rightarrow \cos(\pi + x) = -\cos x$$

As relações entre $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\operatorname{tg}(\pi - x)$ e $\operatorname{tg} x$ podem ser obtidas a partir das relações entre seno e cosseno desses arcos.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R3. Simplifique:

a) $y = \frac{\sin(\pi + x) \cdot \cos(\pi + x)}{\sin(\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}$

b) $y = \frac{\sin(2\pi - x) - \cos(2\pi - x)}{\sin(\pi + x) + \cos(\pi + x)}$

Resolução

a) Substituindo $\sin(\pi + x)$ por $-\sin x$, $\cos(\pi + x)$ por $-\cos x$, $\sin(\pi - x)$ por $\sin x$ e $\cos(\pi - x)$ por $-\cos x$, obtemos:

$$y = \frac{-\sin x \cdot (-\cos x)}{\sin x \cdot (-\cos x)} \Rightarrow y = -1$$

b) Substituindo $\sin(2\pi - x)$ por $-\sin x$, $\cos(2\pi - x)$ por $\cos x$, $\sin(\pi + x)$ por $-\sin x$ e $\cos(\pi + x)$ por $-\cos x$, obtemos:

$$y = \frac{-\sin x - \cos x}{-\sin x - \cos x} \Rightarrow y = 1$$

R4. Expresse, em função do arco com extremidade no 1º quadrante, os valores do seno, do cosseno e da tangente de:

- a) 4900°
b) $\frac{97\pi}{7}$

Resolução

- a) A determinação principal do arco de medida 4900° tem medida 220° .

Então:

$$\sin 4900^\circ = \sin 220^\circ =$$

$$= \sin (180^\circ + 40^\circ) =$$

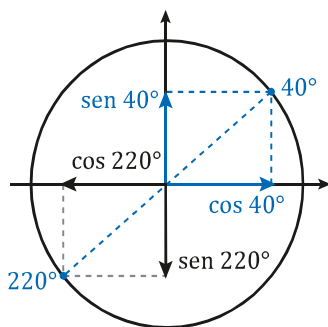
$$= -\sin 40^\circ$$

$$\cos 4900^\circ = \cos 220^\circ =$$

$$= \cos (180^\circ + 40^\circ) = -\cos 40^\circ$$

$$\operatorname{tg} 4900^\circ = \frac{\sin 4900^\circ}{\cos 4900^\circ} = \frac{-\sin 40^\circ}{-\cos 40^\circ} = \operatorname{tg} 40^\circ$$

- b) A determinação principal do arco de medida $\frac{97\pi}{7}$ tem medida $\frac{13\pi}{7}$ e extremidade no 4º quadrante.



Então:

$$\sin \frac{97\pi}{7} =$$

$$= \sin \left(\frac{84\pi}{7} + \frac{13\pi}{7} \right) =$$

$$= \sin \left(12\pi + \frac{13\pi}{7} \right) =$$

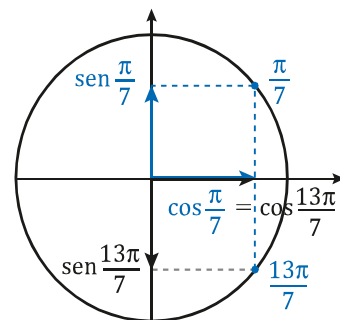
$$= \sin \frac{13\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}$$

$$\cos \frac{97\pi}{7} =$$

$$= \cos \left(\frac{84\pi}{7} + \frac{13\pi}{7} \right) = \cos \left(12\pi + \frac{13\pi}{7} \right) =$$

$$= \cos \frac{13\pi}{7} = \cos \frac{\pi}{7}$$

$$\operatorname{tg} \frac{97\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$$



Imagens: Zapt

R5. Expresse, em função do arco de medida pertencente a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, o seno, o cosseno e a tangente de $\frac{3\pi}{8}$.

Resolução

Medida do complemento de $\frac{3\pi}{8}$: $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$; então:

$$\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8}, \cos \frac{3\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}, \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}.$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Socialize as discussões dos estudantes referentes à atividade 18. Organize com eles uma lista de sugestões para que não cometam erros em exercícios como o 13.

- 11.** Expresse, em função do arco com extremidade no 1º quadrante, os valores do seno, do cosseno e da tangente de:

- a) 100° c) 340° e) 3100°
b) 200° d) 1610° f) 2470°

- 12.** Expresse, em função do arco com extremidade no 1º quadrante, os valores do seno, do cosseno e da tangente de:

- a) $\frac{6\pi}{7}$ c) $\frac{15\pi}{8}$ e) $\frac{57\pi}{8}$
b) $\frac{7\pi}{5}$ d) $\frac{49\pi}{10}$ f) $\frac{39\pi}{5}$

- 13.** Expresse, em função do arco de medida pertencente a $[0^\circ, 45^\circ]$ ou a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, os valores do seno, do cosseno e da tangente de:

- a) 78° c) 162° e) 260°
b) $\frac{7\pi}{18}$ d) $\frac{3\pi}{5}$ f) $\frac{29\pi}{18}$

- 14.** Expresse, em função do arco de medida pertencente a $[0^\circ, 45^\circ]$ ou a $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, os valores do seno, do cosseno e da tangente de:

- a) -280° c) -162°
b) $-\frac{7\pi}{5}$ d) $-\frac{4\pi}{9}$

- 15.** Simplifique:

$$\text{a) } y = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\sin (\pi - x) \cdot \cos (\pi - x)}$$

$$\text{b) } y = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot \cos (\pi + x) \cdot \sin (\pi + x)$$

- 16.** Calcule o valor de y em cada caso.

$$\text{a) } y = \sin 10^\circ \cdot \cos 80^\circ + \cos 10^\circ \cdot \sin 80^\circ$$

$$\text{b) } y = \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 89^\circ + \sin 181^\circ + \sin 182^\circ + \dots + \sin 269^\circ$$

$$\text{c) } y = \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ + \cos 91^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 179^\circ$$

$$\text{d) } y = \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \operatorname{tg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$$

- 17.** Ana precisava calcular os valores de $\sin 210^\circ$ e $\cos 210^\circ$. Ao terminar de resolver o exercício, ela encontrou $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ como respostas. Que erro Ana pode ter cometido?

- 18.** Faça o que se pede a seguir.

- a) Escolha dois itens do exercício 13 e resolva-os de modo errado. Troque sua resolução com a de um colega para vocês descobrirem os erros um do outro.
b) Que sugestões você daria para que alguém que precise resolver exercícios como esse não erre a resolução?



1. Invente uma atividade como a de número 12 deste capítulo.

4 Arcos complementares e arcos suplementares

Vamos ampliar as noções de ângulos (arcos) complementares e de ângulos (arcos) suplementares.

Dois arcos, de medidas α e β , são **complementares** se:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dois arcos, de medidas α e β , são **suplementares** se:

$$\alpha + \beta = \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Exemplos:

- a) $\frac{5\pi}{4}$ e $\frac{13\pi}{4}$ são medidas de arcos complementares, pois:

$$\frac{5\pi}{4} + \frac{13\pi}{4} = \frac{18\pi}{4} = \frac{9\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{8\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 4\pi$$

- b) Os arcos de medidas 1650° e -30° são suplementares, pois:

$$1650^\circ + (-30^\circ) = 1620^\circ = 180^\circ + 4 \cdot 360^\circ$$

Vamos analisar o que ocorre com os valores das funções trigonométricas.

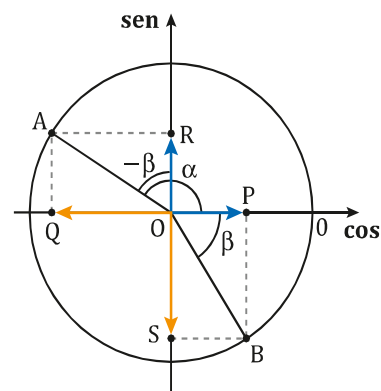
De $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, vem $\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + k \cdot 2\pi$, ou seja, os arcos de medidas α e $\frac{\pi}{2} - \beta$ são côngruos; então:

$$\sin \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow \cos \alpha = \sin \beta$$

Portanto, podemos registrar:

O seno de um arco é igual ao cosseno do seu complemento, e vice-versa.



Na figura: se $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$, temos $\triangle OAQ \cong \triangle OBS$ e $\triangle OAR \cong \triangle OBP$; então, $\sin \alpha = \cos \beta$ e $\cos \alpha = \sin \beta$.

De $\alpha + \beta = \pi + k \cdot 2\pi$, vem $\alpha = (\pi - \beta) + k \cdot 2\pi$, ou seja, os arcos de medidas α e $\pi - \beta$ são côngruos; então:

$$\sin \alpha = \sin (\pi - \beta) \Rightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

$$\cos \alpha = \cos (\pi - \beta) \Rightarrow \cos \alpha = -\cos \beta$$

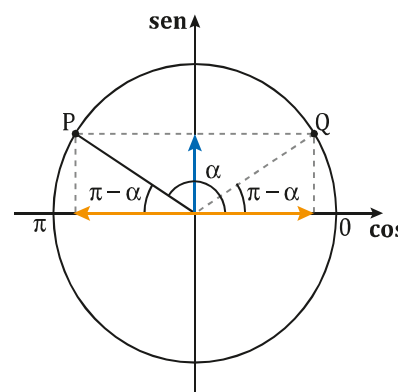
Portanto, podemos registrar:

Os senos de dois arcos suplementares são iguais, e os cossenos de dois arcos suplementares são opostos.

Exemplos:

- a) $\sin 4600^\circ = \cos 5210^\circ$; $\cos 4600^\circ = \sin 5210^\circ$

- b) $\sin \frac{3\pi}{5} = \sin \frac{12\pi}{5}$; $\cos \frac{3\pi}{5} = -\cos \frac{12\pi}{5}$





Para trabalhar as relações trigonométricas, consulte o jogo **Encontre o par**, nas **Orientações Didáticas**.

19. Em cada caso, verifique quais são medidas de arcos suplementares e quais são de arcos complementares.

a) $\frac{31\pi}{7}, \frac{18\pi}{7}$

c) $\frac{4\pi}{9}, \frac{109\pi}{8}$

b) $-\frac{2\pi}{5}, \frac{37\pi}{5}$

d) $\frac{61\pi}{10}, -\frac{8\pi}{5}$

20. Se α e β são as medidas de arcos suplementares, com α no 1º quadrante e $\sin \alpha = m$, calcule $\sin \beta$, $\cos \beta$ e $\operatorname{tg} \beta$.

21. Se α e β são as medidas de arcos complementares e $\sin \alpha = m$, calcule $\sin \beta$, $\cos \beta$ e $\operatorname{tg} \beta$.

22. Se $\alpha + \beta = 3060^\circ$, calcule $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ em função de β .

23. Se $\alpha + \beta = 4410^\circ$, calcule $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ em função de β .

24. Simplifique:

a) $y = \frac{\sin(61\pi + x) \cdot \cos(33\pi + x)}{\sin(101\pi - x) \cdot \cos(203\pi - x)}$

b) $y = \sin\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right)$

PARA COMPLEMENTAR

Um pouco de história das palavras: etimologia dos nomes das funções trigonométricas

A origem das palavras seno e cosseno está na Astronomia.

No início da era cristã, viveu um dos homens mais importantes para a Matemática, o geógrafo e astrônomo grego Cláudio Ptolomeu, que escreveu treze livros, conhecidos como *Almagesto* (do árabe *Al-magest*, que significa “o maior”). Usando cálculos no sistema sexagesimal babilônico, Ptolomeu construiu uma tabela de cordas, que corresponde aproximadamente a uma tábua de senos.

Por volta do ano 500 d.C., o matemático hindu Aryabhata elaborou tábuas de cordas muito semelhantes às tábuas de senos que utilizamos; o nome corda em hindu era *jya*. Tempos depois, os árabes traduziram essa palavra, letra por letra e sem se preocupar com a pronúncia, para *jyb*.

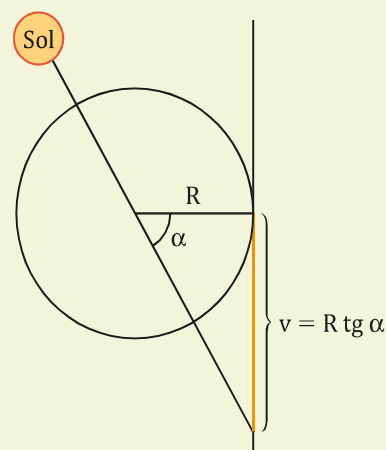
Esse termo árabe, ao ser traduzido para o latim por Gerardo de Cremona, em 1150, foi confundido com a palavra *jayb*, que em árabe significa “bolso, golfo ou seio”. Cremona empregou então a palavra equivalente em latim, *sinus*, que hoje usamos como **seno**.

O termo **cosseno** se deve a Edmund Gunter (1581-1626), associado à ideia de que o cosseno corresponde ao seno do ângulo complementar. Gunter sugeriu combinar as palavras “complementar” e “seno”, dando origem a *co-sinus*, que rapidamente se transformou em *cosinus* e que, em nossa língua, se escreve **cosseno**.

Como vimos, as funções tangente e cotangente tiveram sua origem na necessidade de medições de alturas e sombras. No entanto, as palavras que usamos hoje são relativamente recentes.

Em 1583, o dinamarquês Thomas Fincke (1561-1656) contribuiu com o nome tangente ao observar que a sombra reversa vertical estava situada na reta tangente ao círculo de raio igual ao comprimento do gnômon horizontal.

O mesmo Edmund Gunter, criador da palavra cosseno, estabeleceu também o termo **cotangente** para a sombra estendida, ao observar que seu valor era igual ao da tangente do ângulo complementar. Assim, cotangente tem o significado de ser “complementar à tangente”.



Neste capítulo temos como principais ideias:

- Gráficos das funções seno, cosseno e tangente
- Sinal e crescimento das funções trigonométricas
- Aplicações das funções trigonométricas
- Redução ao 1º quadrante

Escreva o que você aprendeu a respeito, ilustrando com exemplos.

FOCO NA TECNOLOGIA

Calculadora

Prioridades

Qualquer tecla trigonométrica de uma calculadora científica tem prioridade sobre outras operações, isto é, a calculadora efetua primeiro a operação determinada por uma tecla trigonométrica.

Exemplos:

a) A sequência $5 \times 38 \text{ SIN}$ significa $5 \cdot \sin 38^\circ$. Nessa expressão, a multiplicação só se efetua depois de calculado o seno.

O mesmo ocorre para a divisão ou qualquer outra operação.

b) $3 \div 0,5 \text{ SIN}^{-1} =$ é o mesmo que $3 \cdot 30^\circ$, porque 30° é o ângulo cujo seno é igual a $\frac{1}{2}$.

As calculadoras que contêm a tecla INV apresentam a mesma prioridade com relação às funções trigonométricas.

Faça as atividades a seguir usando uma calculadora científica.

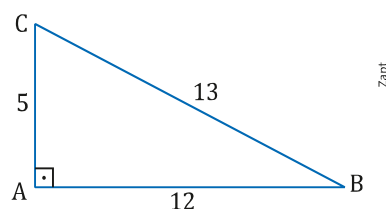
ATIVIDADES

- Calcule:

a) $10 \cdot \sin 25^\circ$	c) $20 \cdot \text{tg } 45^\circ$
b) $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ$	d) $\sin (2 \cdot 25^\circ)$
- Determine α em cada caso.

a) $\text{tg } \alpha = 0,542$	c) $\sin \alpha = 0,055$
b) $\cos \alpha = 0,785$	d) $\text{tg } \alpha = 22,453$
- Determine:

a) $\sin 10^\circ$	d) $\sin 40^\circ$	g) $\sin 70^\circ$
b) $\sin 20^\circ$	e) $\sin 50^\circ$	h) $\sin 80^\circ$
c) $\sin 30^\circ$	f) $\sin 60^\circ$	i) $\sin 90^\circ$
- Repita a atividade 3 para a função cosseno e descubra o que ocorre com essa função quando o ângulo aumenta.
- Calcule os ângulos do triângulo ABC.



FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO

- Observe a seguinte situação e descubra quem está falando a verdade.



BERTA MENTE.

Antônio



CARLOS MENTE.

Berta



ANTÔNIO E BERTA MENTEM.

Carlos

2. (EEWB-MG) Pitágoras tem doze irmãos que com ele se reuniram na ceia de Natal. Das afirmações a seguir, referentes aos membros da mesma família reunidos, a única necessariamente verdadeira é:
- pelo menos uma das pessoas reunidas nasceu em janeiro ou fevereiro;
 - pelo menos uma das pessoas reunidas nasceu num dia par;
 - pelo menos duas pessoas são do sexo feminino;
 - pelo menos duas pessoas reunidas fazem aniversário no mesmo mês.

APRENDER A APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Mais um conjunto variado de atividades para você estudar, retomando vários dos conteúdos anteriores, e avançar na capacidade de resolver problemas.

- Qual o valor numérico de $P = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ para $a = 0,1$ e $b = 0,2$?
- (PUC-PR) Um técnico de basquete conta com oito jogadores para formar um time de cinco. Se, porém, dois jogadores estão contundidos, qual a probabilidade de que, na escolha dos 5 jogadores, pelo menos um deles esteja contundido?
- (UERJ)

O MENINO MALUQUINHO



A definição apresentada pelo personagem não está correta, pois, de fato, duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao se multiplicar o valor de uma delas por um número positivo, o valor da outra é dividido por esse mesmo número.

Admita que a nota em Matemática e a altura do personagem da tirinha sejam duas grandezas, x e y , inversamente proporcionais.

A relação entre x e y pode ser representada por:

a) $y = \frac{3}{x^2}$

b) $y = \frac{5}{x}$

c) $y = \frac{2}{x+1}$

d) $y = \frac{2x+4}{3}$

4. (Insper-SP) A figura mostra parte de um campo de futebol, em que estão representados um dos gols e a marca do pênalti (ponto P). Considere que a marca do pênalti equidista das duas traves do gol, que são perpendiculares ao plano do campo, além das medidas a seguir, que foram aproximadas para facilitar as contas.

- Distância da marca do pênalti até a linha do gol: 11 metros.
- Largura do gol: 8 metros.
- Altura do gol: 2,5 metros.

Um atacante chuta a bola da marca do pênalti e ela, seguindo uma trajetória reta, choca-se contra a junção da trave esquerda com o travessão (ponto T). Nessa situação, a bola terá percorrido, do momento do chute até o choque, uma distância, em metros, aproximadamente igual a:

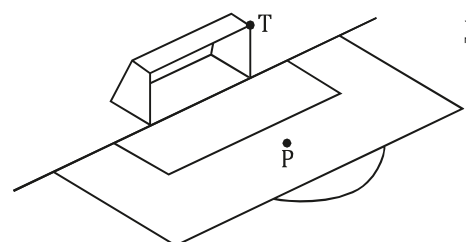
a) 12

b) 14

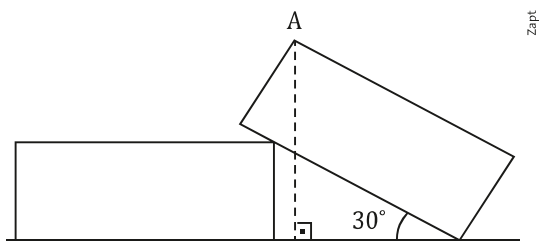
c) 16

d) 18

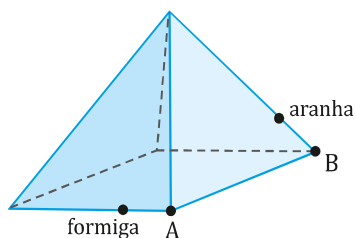
e) 20



5. (UFPE) Na ilustração abaixo, temos dois retângulos congruentes com base medindo 12 cm e altura 5 cm. Qual o inteiro mais próximo da distância, em cm, do ponto **A** até a horizontal? Dado: use a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,73$.



6. (OBMEP) A figura a seguir representa uma pirâmide de base quadrada cujas arestas medem 1 m. Uma formiga e uma aranha estão nas posições indicadas, a 25 cm dos vértices **A** e **B**, respectivamente. Qual é a menor distância que a aranha deve percorrer para chegar até a formiga, andando somente sobre as faces triangulares da pirâmide?



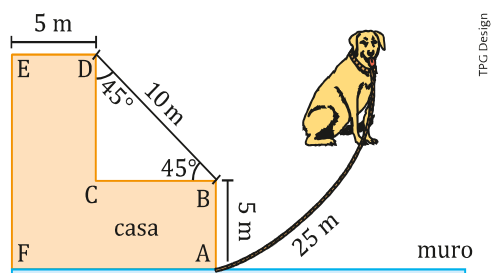
- a) 1 m
b) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ m
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ m
e) $\frac{4}{5}$ m

7. (FGV-SP) No plano cartesiano, a reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 8$, no ponto **P** de coordenadas (2, 2), intersecta a reta de equação $y = 2x$ no ponto:

- a) $(\frac{7}{16}, \frac{14}{6})$
b) $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$
c) $(\frac{5}{4}, \frac{10}{4})$
d) $(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$
e) $(\frac{3}{2}, 3)$

8. (OBMEP) Turmalinas são pedras preciosas cujo valor varia de acordo com o peso; se uma turmalina pesa o dobro de outra, então seu valor é cinco vezes o dessa outra. Zita, sem saber disso, mandou cortar uma turmalina que valia R\$ 1000,00 em quatro pedras iguais. Quanto ela irá receber se vender os quatro pedaços?

9. Um cão de guarda está amarrado no ponto **A** a uma corda que mede 25 metros. Ele vigia uma casa em formato de **L**, com as dimensões indicadas na figura.



- a) No caderno, faça um desenho da casa e da área externa da casa vigiada pelo cão.
b) Calcule a área vigiada pelo cão.

CÁLCULO RÁPIDO

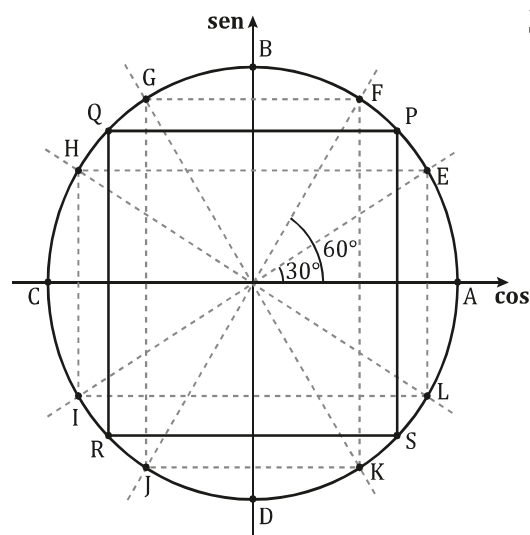
REGISTRE
NO CADerno



1. Conhecer os arcos notáveis na primeira volta do ciclo trigonométrico e as razões trigonométricas para eles auxilia muito na resolução de problemas. Por isso, escreva no caderno a letra de cada ponto indicado no ciclo trigonométrico ao lado e os arcos que correspondem a cada ponto da seguinte forma:

- a) em graus, no intervalo $[0, 360^\circ]$;
b) em radianos, no intervalo $[0, 2\pi]$.

2. Depois, reescreva no caderno o nome de cada ponto e os valores do seno e do cosseno de cada arco.



A declividade das vias públicas

Leia o texto a seguir, do Departamento Nacional de Trânsito (Denatran), indicado para formação de todo cidadão brasileiro que requer a Carteira Nacional de Habilitação.

Você percebe que à frente tem um declive acentuado: antes que a descida comece, teste os freios e mantenha o câmbio engatado numa marcha reduzida durante a descida.

Nunca desça com o veículo desengrenado. Porque, em caso de necessidade, você não vai ter a força do motor para ajudar a parar ou a reduzir a velocidade e os freios podem não ser suficientes.

Não desligue o motor nas descidas. Com ele desligado, os freios não funcionam adequadamente, e o veículo pode atingir velocidades descontroladas. Além disso, a direção poderá travar, se você desligar o motor.

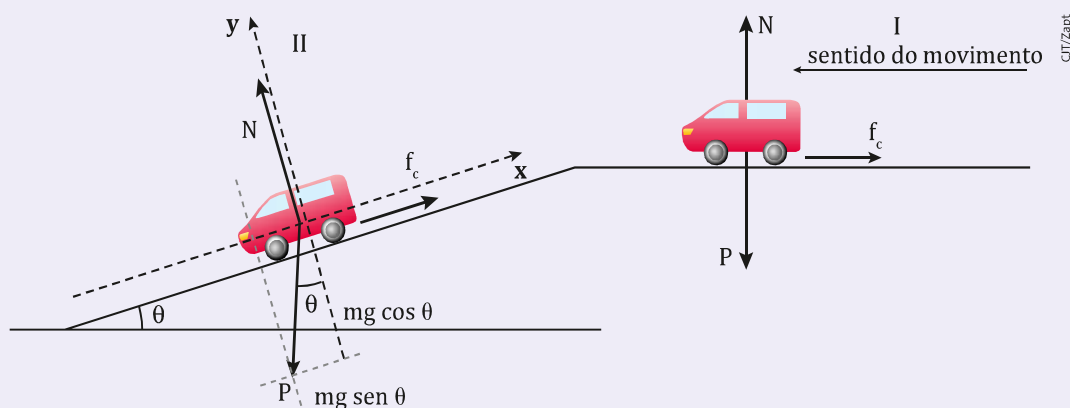
Fonte: *Direção defensiva: trânsito seguro é um direito de todos.* Brasília, Denatran/Ministério das Cidades/Governo Federal, 2005, p. 32.

O texto evidencia o uso de marcha reduzida, popularmente chamada de freio motor, nas vias públicas com declividade acentuada. Por quê?

A explicação tem como base um dos conceitos mais importantes do estudo dos movimentos: quantidade de movimento, grandeza que relaciona massa e velocidade de um móvel.

Analisando a quantidade de movimento (p) de um veículo, calculada pela relação $p = m v$, podemos obter importantes conclusões sobre as velocidades limitadas na cidade e nas estradas. Segundo os testes feitos nas simulações por computador, um automóvel de passeio cuja massa é da ordem de 900 kg, viajando a 80 km/h em uma estrada sem declividade, tem uma quantidade de movimento $p = 20\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 2 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ levando cerca de 7 s para parar. Nesse tempo, o carro percorrerá 28 m. A essa velocidade, um caminhão de 45 t tem uma quantidade de movimento igual a $1\,000\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, levando cerca de 14 s para parar completamente, após percorrer uma distância de 50 m.

Em uma via pública com declividade, todos os valores dessa análise serão aumentados, pois mais uma força passa a agir, na direção do movimento, conforme a figura a seguir.



Esquema representando as forças que agem sobre um veículo (N) resultantes das forças de contato com o solo. No caso representado, o condutor não imprime nenhuma variação à velocidade, a qual é alterada apenas em II, devido à componente horizontal da força peso ($m g \sin \theta$). Nesse esquema não foram consideradas outras forças de resistência, tal como o contato do veículo com o ar.

Normalmente, um caminhão de 45 t não desenvolve velocidades excessivas, mas em descidas... Para o caminhão de 45 t, a 80 km/h (aproximadamente 22,2 m/s), em um aclive com inclinação de 3° , resulta em uma potência motora calculada em função da força motora, e a velocidade ($P = Fv$) será de aproximadamente 512 400 watts ($P = 45\,000 \cdot 9,8 \cdot \sin 3^\circ \cdot 22,2 \approx 512\,400$), que corresponde a cerca de 692 cv (cavalo-vapor). Boa parte dessa potência deverá ser dissipada pelos freios do veículo, caso contrário o condutor não terá condições de controlá-lo. Por outro lado, o sistema de freios comum sofre forte desgaste nas pistas com descidas íngremes e isso pode ser reduzido com o uso do freio motor.

Um carro de passeio, apesar da massa bem inferior à de um caminhão, fica vulnerável aos mesmos problemas. Qualquer que seja a sua velocidade, é sempre muito alta para condições inóspitas, tais como pista molhada e cerração, bem como para situações de imprudência (uso de celular e embriaguez, por exemplo). O número de acidentes registrados nas estradas e cidades é o alerta para que as regras de segurança sejam bem entendidas e aplicadas.



João Prudente/Pulsar Imagens

Casario colonial em ladeira localizada em Diamantina (MG). Fotografia de 2016.

De modo geral, o limite teórico para a inclinação da rampa que um veículo com tração em duas rodas pode trafegar com segurança situa-se abaixo de 30° , com pista seca, e de 20° , com pista molhada. O Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes (DNIT) faz a recomendação das inclinações máximas a serem consideradas na construção de rodovias, de acordo com uma classificação da intensidade de trânsito.

A forma de expressar a declividade, no entanto, não é pelo ângulo de inclinação da pista em relação a um eixo horizontal, mas pela inclinação percentual, que expressa a tangente do ângulo reescrita em forma de porcentagem. Por exemplo, para vias expressas com tráfego intenso, a inclinação máxima recomendada pelo DNIT é de 5%. Isso significa que a tangente do ângulo de inclinação é de 0,05 ($\text{tg } \theta = 0,05$).

Usando uma tabela trigonométrica ou uma calculadora, concluímos que o ângulo do declive máximo deve ser de aproximadamente 3° . Nas rodovias com pouco movimento, a inclinação máxima recomendada é de 9%. Seguindo o mesmo raciocínio anterior, $\text{tg } \theta = 0,09$, logo $\theta \approx 5^\circ$. É interessante observar que as montadoras de veículos também utilizam nas especificações dos manuais técnicos a expressão *inclinação percentual*, ao indicar a capacidade máxima de caminhões em subidas.

ATIVIDADES



Uma curiosidade sobre o tema é a rua Baldwin, na Nova Zelândia, considerada a mais íngreme do mundo. É uma rua curta, de aproximadamente 350 metros, e traçada em linha reta com inclinação de 35%.



Gerhard Zwirger-Schoner/Alamy/Fotoarena

Rua Baldwin, localizada em Dunedin, na Nova Zelândia. Fotografia de 2011.

1. Calcule o ângulo de inclinação dessa rua.
2. Depois, se estiver interessado, pesquise outras informações sobre essa rua, como a dificuldade para ser calçada devido à sua inclinação excessiva.

12

Taxa de variação de funções

conteúdo opcional

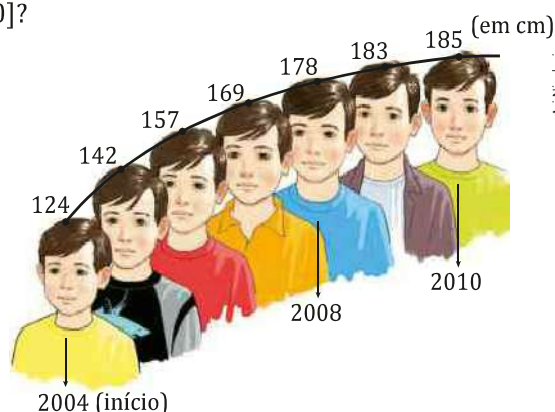
Veja na figura ao lado a curva de crescimento de Diogo, de 2004 a 2010.

Observe o gráfico da figura e responda: qual foi o crescimento anual médio nos períodos [2004, 2008], [2004, 2007], [2004, 2006] e [2004, 2010]?

Certamente essa não é uma questão difícil de responder. Para calcular, por exemplo, quanto Diogo cresceu, em média, no período [2004, 2008], fazemos $\frac{178 - 124}{4} = 13,5$; ou seja, 13,5 cm.

Dizemos então que a **taxa de variação média (tvm)** de crescimento de Diogo no período em questão foi de 13,5 cm por ano.

O conceito de taxa de variação média está na base do estudo de funções e exprime a “rapidez” com que a função cresce num dado intervalo.

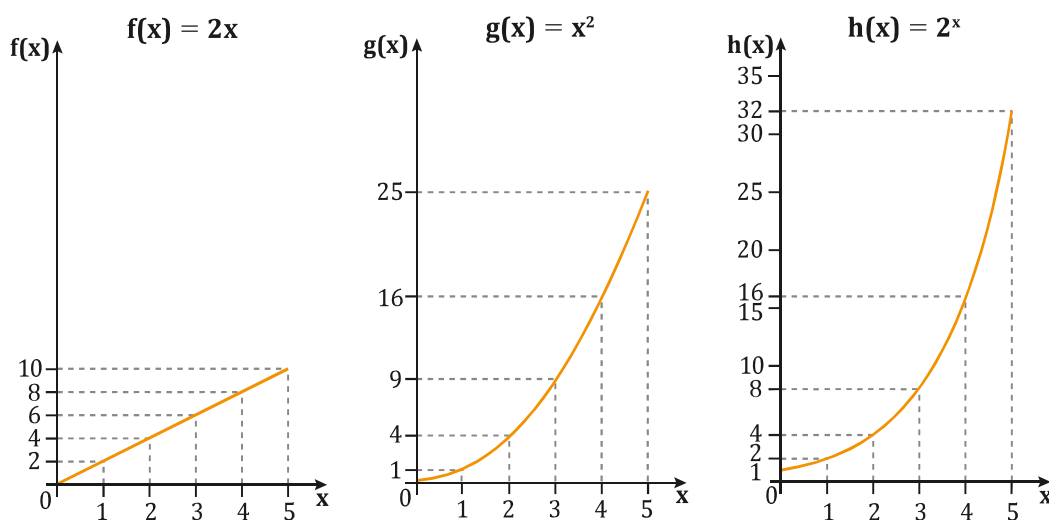


Situe-se

Neste capítulo, avançamos no estudo de funções, aperfeiçoando instrumentos algébricos para a construção de gráficos e análise do comportamento desses gráficos, em especial para identificar pontos onde as funções assumem seus valores máximos ou mínimos.

1 Taxa de variação média

Vamos começar nosso estudo analisando as três funções abaixo, no intervalo $[0, 5]$.



Apesar de opcional, é importante que os estudantes saibam que muitos dos problemas que envolvem situações de otimização de fenômenos – como obter lucro máximo, calcular prejuízo mínimo, encontrar a embalagem com maior volume ou com menor uso de material – podem ser resolvidos pela análise de funções e de seus gráficos. Caso opte por não desenvolver este capítulo com os estudantes, é oportuno desenvolver com eles as seções **Foco no raciocínio lógico**, **Aprender a aprender** e **Foco na tecnologia – Calculadora**, e o jogo **Para recordar funções** apresentado nas **Orientações Didáticas**.

A partir de seus gráficos e do conhecimento sobre funções, podemos afirmar que as três funções são crescentes nesse intervalo, mas há uma diferença na forma como elas crescem.

Os valores de $f(x)$ crescem 2 unidades cada vez que x varia uma unidade. Já os valores $g(x)$ e $h(x)$ crescem de modo diferente quando x varia uma unidade.

Observe:

	Taxa de variação de f ($f(x) = 2x$)	Taxa de variação de g ($g(x) = x^2$)	Taxa de variação de h ($h(x) = 2^x$)
x no intervalo $[0, 1]$	2	1	1
x no intervalo $[1, 2]$	2	3	2
x no intervalo $[2, 3]$	2	5	4
x no intervalo $[3, 4]$	2	7	8
x no intervalo $[4, 5]$	2	9	16
	A variação média de f é a mesma a cada intervalo.	A variação média de g aumenta 2 unidades a cada intervalo.	A variação média de h dobra a cada intervalo.

Podemos afirmar que, apesar de as três funções serem crescentes no intervalo $[0, 5]$, elas crescem com velocidades diferentes.

No mesmo intervalo de x , a função exponencial h cresce mais rapidamente que as outras duas funções.

Vejamos ainda mais um exemplo:

Um automóvel desloca-se de A para B.



A tabela a seguir relaciona o espaço percorrido com o tempo decorrido.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Espaço (metros)	0	2	5	9	14	20	27	35	...

Calculemos algumas taxas de variação média do espaço em função de t .

$$tvm_{[2,3]} = \frac{9 \text{ m} - 5 \text{ m}}{3 \text{ s} - 2 \text{ s}} = \frac{4 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 4 \text{ m/s}$$

$$tvm_{[6,7]} = \frac{35 \text{ m} - 27 \text{ m}}{7 \text{ s} - 6 \text{ s}} = \frac{8 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 8 \text{ m/s}$$

$$tvm_{[4,5]} = \frac{20 \text{ m} - 14 \text{ m}}{5 \text{ s} - 4 \text{ s}} = \frac{6 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 6 \text{ m/s}$$

Vemos que o movimento é cada vez mais rápido, portanto é acelerado.

Calculemos agora a taxa de variação média, por exemplo, entre 2 e 7 segundos.

$$tvm_{[2,7]} = \frac{35 \text{ m} - 5 \text{ m}}{7 \text{ s} - 2 \text{ s}} = \frac{30 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 6 \text{ m/s}$$

Podemos dizer que a velocidade média entre 2 segundos e 7 segundos foi de 6 m/s.

Generalizando para qualquer função, podemos dizer que:

A taxa de variação média de uma função f no intervalo $[x_A, x_B]$ é:

$$tvm_{(x_A, x_B)} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

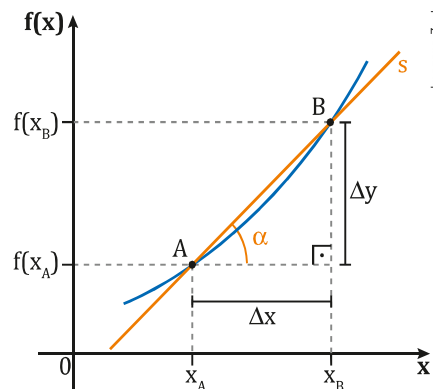
sendo $\Delta y = f(x_B) - f(x_A)$ e $\Delta x = x_B - x_A$.

A taxa de variação média de uma função f , em um intervalo $[x_A, x_B]$, pode ser interpretada geometricamente considerando-se a reta s que passa pelos pontos $A(x_A, f(x_A))$ e $B(x_B, f(x_B))$ do gráfico de f .

O coeficiente angular da reta s é:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tvm}_{[x_A, x_B]}$$

Ou seja, a inclinação da reta que passa por A e B é a taxa de variação média da função f em $[x_A, x_B]$.



DE OLHO NA RESOLUÇÃO

- R1.** Suponha que o movimento de um objeto seja dado pela função $S(t) = t^2 + 3t$, sendo S em metros e t em segundos. Calcule a velocidade média entre $t_0 = 2$ e $t_1 = 5$.

Resolução

$$\operatorname{tvm}_{[2, 5]} = \frac{S(5) - S(2)}{5 - 2} = \frac{(5^2 + 3 \cdot 5) - (2^2 + 3 \cdot 2)}{5 - 2} = \frac{30}{3} \Rightarrow$$

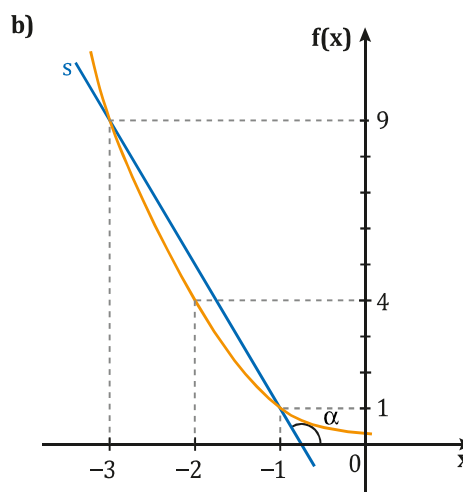
$$\Rightarrow \operatorname{tvm}_{[2, 5]} = 10 \text{ m/s}$$

- R2.** Considere a função $f(x) = x^2$ no intervalo $[-3, -1]$.

- Calcule a taxa de variação média de f nesse intervalo.
- Esboce o gráfico de f e interprete o sinal da taxa de variação obtida no item a .

Resolução

$$\text{a) } \operatorname{tvm}_{[-3, -1]} = \frac{f(-1) - f(-3)}{(-1) - (-3)} = \frac{1 - 9}{2} = -4$$

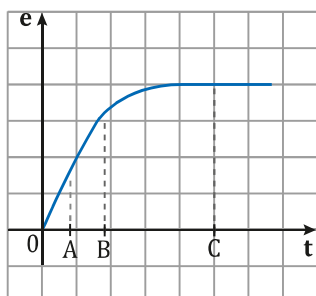


A taxa de variação média de f é negativa porque f é decrescente nesse intervalo e, então, $f(-3) > f(-1)$. Ou, dito de outro modo, a inclinação da reta s é negativa porque o ângulo α é maior que 90° e $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADerno

- Em dado movimento, o espaço percorrido por uma partícula durante o tempo t é dado pela expressão $e(t) = 0,6t^2 + 1$, t em segundos, e em metros. Calcule a velocidade média da partícula nos intervalos $[0, 2]$ e $[2, 4]$.
- Em qual dos instantes, A , B , C , o veículo se move com maior rapidez?



- Considere a função constante $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$.
 - Calcule a taxa de variação média de f em qualquer intervalo $[x_A, x_B]$ contido em \mathbb{R} .
 - Justifique a resposta obtida no item a por meio do gráfico de f .
- Dê exemplos de uma função:
 - cujas taxa de variação média em um intervalo seja positiva, sendo que a função não é crescente nesse intervalo;
 - cujas taxa de variação média em um intervalo seja negativa, sendo que a função não é decrescente nesse intervalo;
 - não constante cuja taxa de variação média é nula em um intervalo.

2 Variação instantânea de uma função: noção de derivada

No estudo de funções e seus gráficos, é interessante sabermos se a função é crescente ou decrescente em um intervalo, sem que tenhamos seu gráfico, até mesmo para podermos esboçar o gráfico de funções mais complexas.

Pelo que vimos no tópico anterior e nas atividades propostas:

- se $y = f(x)$ é crescente em $[x_A, x_B]$, então $tvm > 0$;
[x_A, x_B]
- se $y = f(x)$ é decrescente em $[x_A, x_B]$, então $tvm < 0$.
[x_A, x_B]

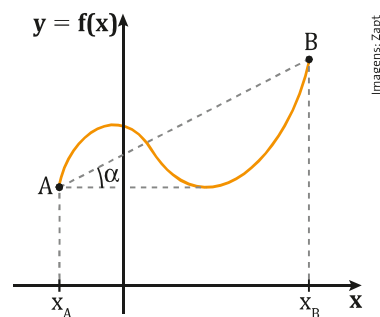
No entanto, as afirmações recíprocas são falsas:

- $tvm > 0$ não implica que f seja crescente em $[x_A, x_B]$;
[x_A, x_B]
- $tvm < 0$ não implica que f seja decrescente em $[x_A, x_B]$.
[x_A, x_B]

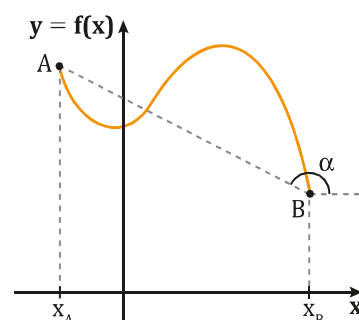
Como os pontos $A(x_A, f(x_A))$ e $B(x_B, f(x_B))$ estão distantes, mesmo sabendo que $tvm > 0$ ou $tvm < 0$, entre esses pontos o comportamento de f pode ser bem variado em termos de crescimento ou decréscimo.

Por isso, vamos aproximar x_A e x_B , introduzindo o conceito de reta tangente ao gráfico da função em um ponto de seu gráfico, para depois relacionar a inclinação dessa reta ao crescimento ou decréscimo da função.

Mas, antes disso, vamos introduzir o significado matemático de **aproximar**, ou seja, a noção de **limite**.



$$tvm > 0 \\ [x_A, x_B] \\ tg \alpha > 0$$



$$tvm < 0 \\ [x_A, x_B] \\ tg \alpha < 0$$

Noção intuitiva de limite de função

Ao estudar progressões geométricas, você teve o primeiro contato com a noção de limite. Por exemplo, qual o comportamento da sequência $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, quando n cresce indefinidamente, tendendo ao infinito?

Sabemos que, à medida que n cresce, o valor de $\frac{1}{2^n}$ se aproxima cada vez mais de um único valor, o zero.

Dizemos, por isso, que essa sequência é **convergente**, e que seu **limite**, quando n tende a infinito, é zero.

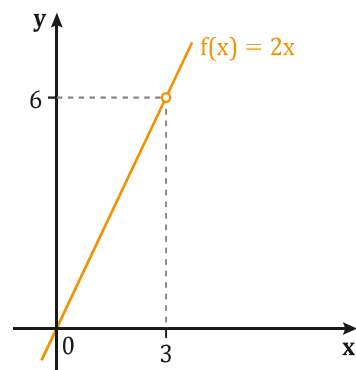
Indicamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0$ (lemos: "limite de $\frac{1}{2^n}$, quando n tende a infinito, é igual a zero").

Se a sequência fosse dada, por exemplo, por $a_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, ela seria **divergente**, porque cresceria indefinidamente quando n tendesse a infinito.

Podemos também usar funções para compreender o conceito de limite.

Por exemplo, vamos analisar o que ocorre com os valores de $f(x) = \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$, de domínio $\mathbb{R} - \{3\}$, quando x se aproxima de 3.

Como $x \neq 3$, dividindo o numerador e o denominador por $x - 3$, obtemos $f(x) = 2x$, cujo gráfico está representado ao lado.



Atribuindo a x valores próximos de 3, alguns menores que 3 e outros maiores que 3, temos:

$$\begin{array}{ll} f(2,99) = 5,98 & f(3,01) = 6,02 \\ f(2,999) = 5,998 & f(3,001) = 6,002 \\ f(2,9999) = 5,9998 & f(3,0001) = 6,0002 \\ f(2,99999) = 5,99998 & f(3,00001) = 6,00002 \end{array}$$

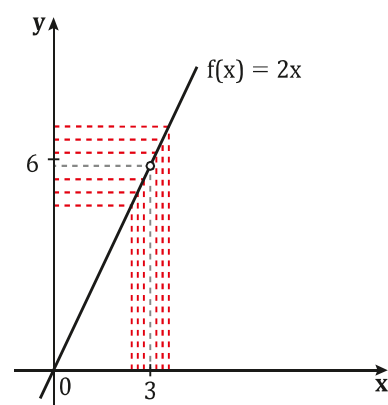
Os cálculos e a análise do gráfico nos mostram que, para x cada vez mais próximo de 3, $f(x)$ assume valores cada vez mais próximos de 6.

Dizemos que o limite de $f(x)$, para x tendendo a 3, é 6.

Em símbolos:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

De modo geral:

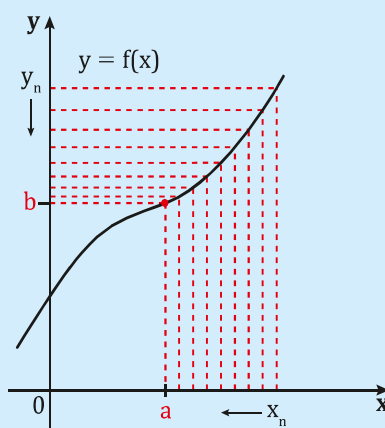


Sejam f uma função real de variável real e $a \in \mathbb{R}$.

Dizemos que o **limite de $f(x)$** , para x tendendo a a , é $b \in \mathbb{R}$, e escrevemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

se a toda possível sequência de valores de x , pertencentes ao domínio da função, tendendo para a (mas diferentes de a), corresponde uma sequência de valores de $f(x)$ tendendo para b .



É importante ter sempre em mente, no cálculo do $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, que estamos interessados no comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a e não no que ocorre com $f(x)$ para $x = a$.

Pode acontecer que, **existindo** $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, não exista $f(a)$, como no exemplo analisado. Ou, ainda, que f esteja definida para $x = a$ e que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Na função f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{para } x \neq 1 \\ 3 & \text{para } x = 1 \end{cases}$, como $x \neq 1$, dividimos o

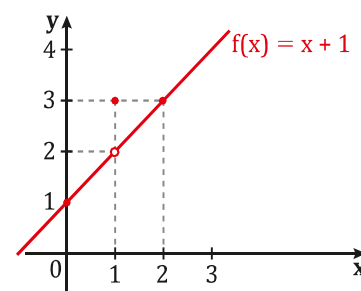
numerador e o denominador de $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ por $x - 1$, obtendo $f(x) = x + 1$, cujo gráfico está representado ao lado.

Atribuindo a x valores próximos a 1, alguns menores e outros maiores que 1, temos:

$$\begin{array}{ll} f(0,99) = 1,99 & f(1,01) = 2,01 \\ f(0,999) = 1,999 & f(1,001) = 2,001 \\ f(0,9999) = 1,9999 & f(1,0001) = 2,0001 \end{array}$$

Os cálculos e a análise do gráfico mostram que, para x cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ assume valores cada vez mais próximos de 2.

Desse modo, podemos dizer que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, que é diferente de $f(1)$.



Taxa de variação instantânea de uma função

Voltemos ao exemplo da página 250, do automóvel. Sua velocidade média, num percurso AB, não coincide, em geral, com sua velocidade média em cada momento. Para obter a velocidade instantânea, no instante t_0 , consideram-se intervalos de tempo entre t_0 e $t_0 + h$ cada vez menores, e calcula-se o limite da $tvm_{[t_0, t_0 + h]}$ quando h tende para zero.

A velocidade instantânea ou **taxa de variação instantânea (tvi)** de uma função f no instante t_0 será dada pelo valor para o qual se aproximam os quocientes $\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ quando h se aproxima de zero. A tvi da função no instante t_0 é chamada de **derivada** da função no ponto t_0 .

De modo geral:

A **taxa de variação instantânea**, ou **derivada** da função f em $x = x_0$, é dada por:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

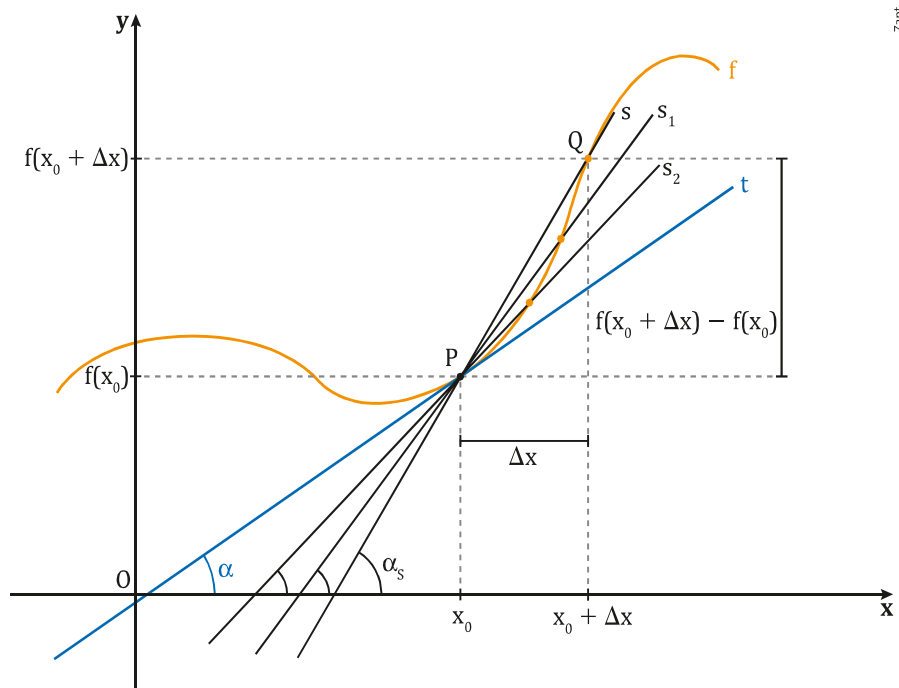
sendo $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. O valor desse limite é denotado por $f'(x_0)$ e dizemos que f é **derivável** em x_0 .

Graficamente, vamos considerar a reta secante s , passando por $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ e $P(x_0, f(x_0))$.

Para Δx tendendo a zero, a reta s muda de posição, como podemos ver no desenho por meio das retas s_1 e s_2 .

Quando Δx tende a zero:

- Q aproxima-se de P , sobre o gráfico de f ;
- \overline{PQ} tende à reta t , tangente ao gráfico em P ;
- α_s tende a α e m_s tende a m_t .

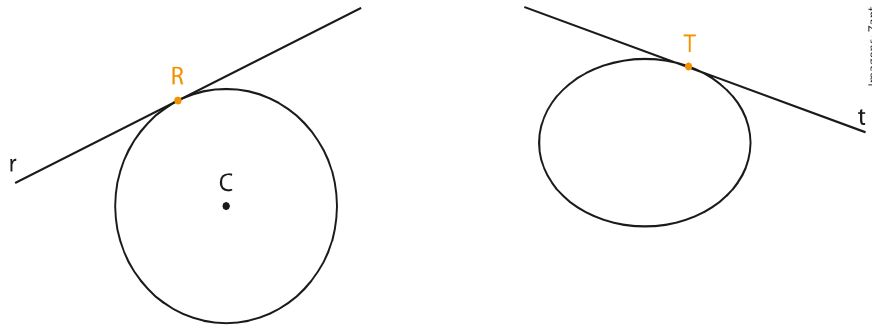


Em termos de limite, temos:

$$m_t = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

A derivada de uma função f em x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 .

Você já sabe que, para uma circunferência ou para uma elipse, a **reta tangente** é a que tem **um único ponto comum com a curva**.



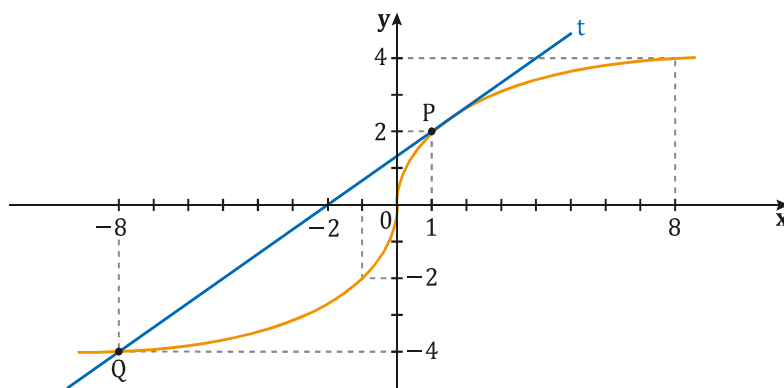
Imagens: Zapt

No entanto, observe no gráfico ao lado: a reta tangente (**t**) a esse gráfico no ponto **P** (cuja inclinação é a derivada da função no ponto de abscissa 1) corta o gráfico no ponto **Q**.

Uma tangente a uma curva num ponto pode intersectá-la em vários outros pontos. A equação da reta **t** é:

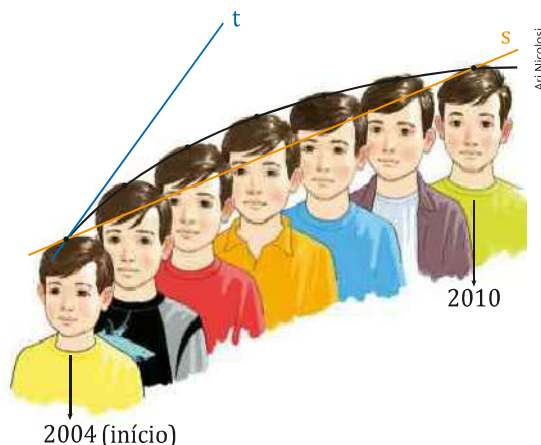
$$y - y_0 = m_t(x - x_0),$$

em que $y_0 = f(x_0)$ e $m_t = f'(x_0)$.



Observe ao lado o que seria a derivada na curva que expressa o crescimento de Diogo, mostrado no início do capítulo.

Vemos que a inclinação da tangente **t** ao gráfico, num ponto de abscissa t_0 (que é a derivada $f'(t_0)$), exprime a rapidez de variação da função nesse ponto, ou seja, o crescimento instantâneo no início de 2004, enquanto a inclinação da secante **s** exprime o crescimento médio entre 2004 e 2010.



Ari Nicolosi

Exemplos:

- a)** Vamos usar a ideia de limite para obter a equação da reta **t**, tangente ao gráfico de $f(x) = -x^2 - 1$ no ponto **P** de abscissa 1 (veja o gráfico a seguir).

A ordenada de **P** é dada por $f(1) = -1^2 - 1 = -2$; logo, $P(1, -2)$.

O coeficiente angular m_t é igual a $f'(1)$:

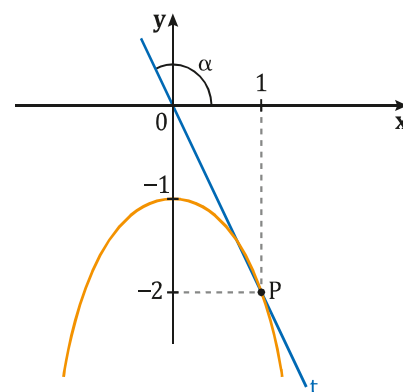
$$\begin{aligned} m_t = f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[-(1 + \Delta x)^2 - 1] - (-2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \cdot \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2 - \Delta x) = -2 \end{aligned}$$

A equação de **t** fica:

$$\begin{aligned} y - (-2) &= -2(x - 1) \\ y &= -2x \end{aligned}$$

Observe que **f** é decrescente nas proximidades de $x = 1$, o ângulo α é obtuso e sua tangente é negativa:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(1) = -2 < 0$$

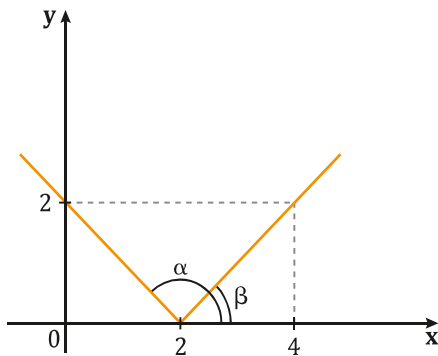


b) Vamos analisar se $f(x) = |x - 2|$ é derivável em $x = 2$.

Calculamos a taxa de variação média de f em $x = 2$:

$$\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{|2 + \Delta x - 2| - |2 - 2|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1 & \text{se } \Delta x > 0 \\ -1 & \text{se } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Graficamente, temos:



$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (-45^\circ) = -1$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Calculando:

- para $\Delta x \rightarrow 0$ por valores inferiores, $|\Delta x| = -\Delta x$ e:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \left(-\frac{\Delta x}{\Delta x} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} (-1) = -1$$

- para $\Delta x \rightarrow 0$ por valores superiores, $|\Delta x| = \Delta x$ e:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} 1 = 1$$

Não existe $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$.

Portanto, $f(x) = |x - 2|$ não é derivável em $x = 2$, e f não possui reta tangente ao seu gráfico em $x = 2$.

c) Vamos analisar se $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ é derivável em $x = 1$, cuja taxa de variação média para $x = 1$ é:

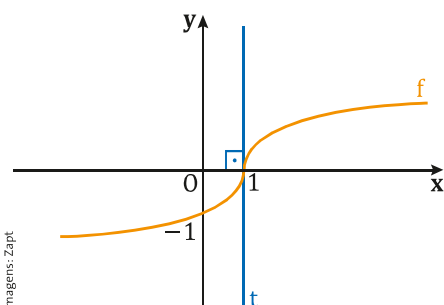
$$\frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{1 + \Delta x - 1} - \sqrt[3]{1 - 1}}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$$

Nesse caso, quando Δx tende a zero, $\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$ assume valores positivos e cada vez

maiores; ou, quando Δx tende a zero, $\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$ tende ao infinito. Representamos isso assim:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty$$

Graficamente, temos:



A reta t tangente ao gráfico de f em $x = 1$ é vertical, perpendicular ao eixo Ox . Como se sabe, não definimos coeficiente angular de retas verticais e não existe $\operatorname{tg} 90^\circ$.

Concluindo: apesar de f possuir reta tangente a seu gráfico em $x = 1$, f não é derivável nesse ponto.



5. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2$, derivável. Calcule o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x) = ax^2$ no ponto de abscissa $x = a$.
6. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto de abscissa -2 .
7. (Fuvest-SP) Ache a equação da reta que é tangente à curva de equação $y = x \cdot |x|$ no ponto $(-1, -1)$.
8. Determine o ponto do gráfico de $f(x) = x^2 + x$ no qual a reta tangente é paralela ao eixo das abscissas.

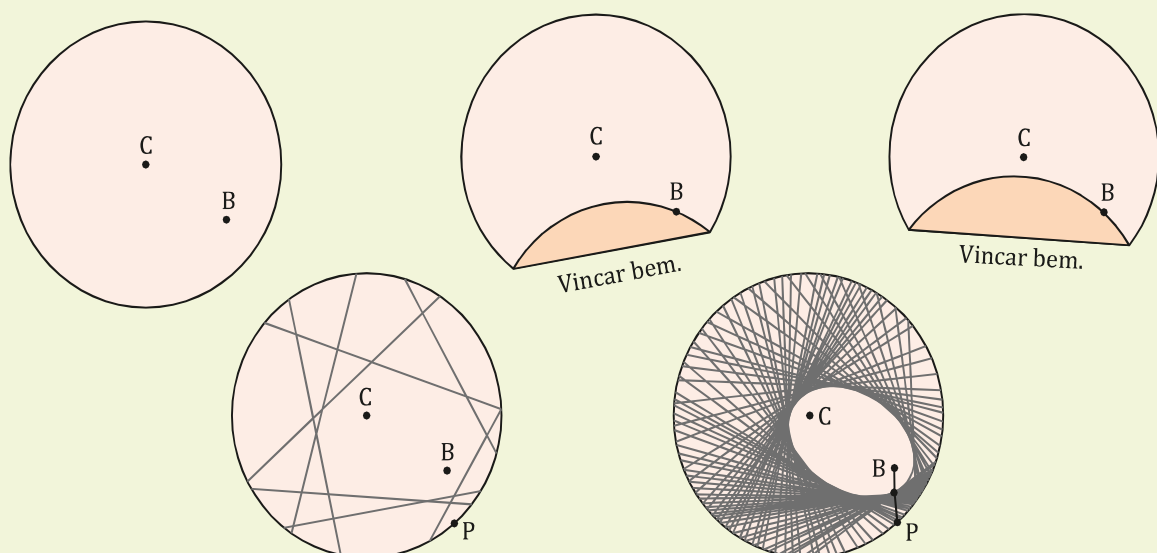
PARA COMPLEMENTAR

As retas tangentes e as cônicas

Elipses, hipérboles e parábolas podem ser representadas a partir das retas tangentes a seus gráficos.

Isso pode ser feito por dobradura. No caso da elipse, partimos de um círculo de centro C recortado em papel e um ponto B em seu interior distinto de C .

Dobra-se o papel de modo que a borda fique sobre o ponto B e faz-se um vinco. Repete-se essa operação o máximo de vezes possível. Ao fim de algum tempo, vemos que os vincos no papel “envolvem” uma elipse, cujos focos são C e B .



Imagens: Zapt

A justificativa dessa construção está nos seguintes fatos:

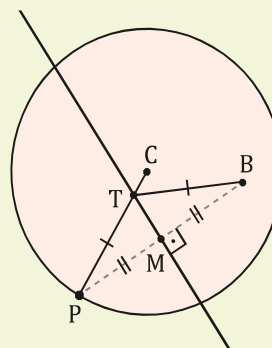
- Pela dobradura, se P é um ponto qualquer da circunferência, a reta da dobra é a mediatriz do segmento PB .
- Se T é o ponto onde \overline{CP} intersecta a reta da dobra, temos que $\triangle TPM \cong \triangle TBM$, pelo caso de congruência de triângulo LAL:
 $\overline{TM} \cong \overline{TM}$ — lado comum aos dois triângulos;
 $\widehat{TMP} \cong \widehat{TMB}$ — ângulos retos;
 $\overline{PM} \cong \overline{MB}$ — M é ponto médio de \overline{PB} .

Daí, $TP = TB$, então:

$CT + TB = CT + TP =$ raio da circunferência

- Logo, cada dobra contém um ponto T da elipse de foco C e B e eixo maior igual ao raio da circunferência.

Deixamos para você as construções análogas para a hipérbole (ponto B fora do círculo) e para a parábola (a circunferência é substituída por uma reta).

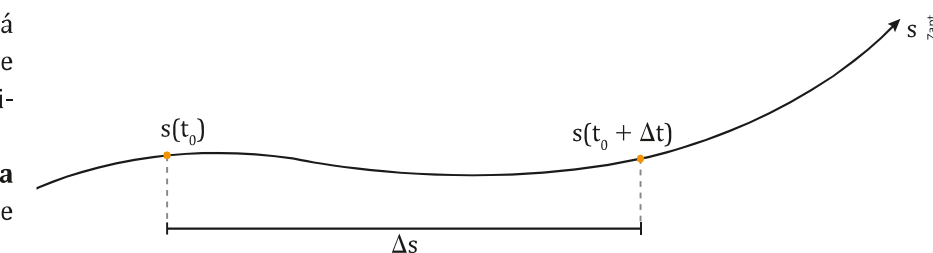


3 Interpretação cinemática da derivada

Em Física, no estudo da Cinemática, sabemos que a posição s de um móvel é uma função do tempo t : $s = s(t)$.

No instante t_0 o móvel está na posição $s(t_0)$ e no instante $t_0 + \Delta t$, com $\Delta t \neq 0$, está na posição $s(t_0 + \Delta t)$.

A **velocidade escalar média** (v_m) do móvel nesse intervalo de tempo Δt é o quociente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$:



$$v_m = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

A **velocidade escalar** (v) do móvel no instante t_0 é o limite da velocidade escalar média para Δt tendendo a zero:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \Rightarrow v(t_0) = s'(t_0)$$

A derivada da função $s = s(t)$ em t_0 é numericamente igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0 (para o mesmo sistema de unidades).

A velocidade escalar de um móvel pode variar de instante em instante, ou seja, v é função do tempo t : $v = v(t)$.

No instante t_0 um móvel tem velocidade $v(t_0)$ e no instante $t_0 + \Delta t$, com $\Delta t \neq 0$, tem velocidade $v(t_0 + \Delta t)$.

A **aceleração escalar média** (a_m) do móvel, nesse intervalo de tempo Δt , é o quociente $\frac{\Delta v}{\Delta t}$:

$$a_m = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$$

A **aceleração escalar** (a) do móvel no instante t_0 é o limite da aceleração escalar média para Δt tendendo a zero:

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \Rightarrow a(t_0) = v'(t_0)$$

A derivada da função $v = v(t)$ em t_0 é numericamente igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0 (num mesmo sistema de unidades).

Exemplos:

a) Vamos calcular a velocidade de um móvel que obedece à equação $s = 6t^2$ no instante 5 s (unidades SI).

Temos:

$$\begin{aligned} v(5) &= s'(5) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(5 + \Delta t) - s(5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{6(5 + \Delta t)^2 - 6 \cdot 5^2}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{60 \cdot \Delta t + 6(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (60 + 6 \cdot \Delta t) = 60 \end{aligned}$$

Portanto, $v(5) = 60$ m/s.

- b) Vamos calcular a aceleração, no instante 3 s, de um móvel cuja velocidade é dada por $v = t^2 + t$ (unidades SI).

Temos:

$$a(3) = v'(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(3 + \Delta t) - v(3)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[(3 + \Delta t)^2 + (3 + \Delta t)] - (3^2 + 3)}{\Delta t} =$$
$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{7 \cdot \Delta t + (\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (7 + \Delta t) = 7$$

Portanto, $a(3) = 7 \text{ m/s}^2$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



Para estas atividades, relembre o significado de unidades SI (Sistema Internacional).

9. Um ponto material obedece à função horária $s = \sqrt{t}$ (unidades SI). Calcule a velocidade escalar no instante 4 s.

10. A velocidade escalar de um ponto material varia de acordo com a lei $v = t^2 + 1$ (unidades SI).

Calcule a aceleração escalar no instante 5 s.

11. Um móvel obedece à função horária $s = t^2 - t$ (unidades SI). Determine o instante em que a velocidade vale 25 m/s.

FOCO NA LEITURA

REGISTRE
NO CADERNO



A Física e a Matemática tiveram origem próxima na história da humanidade e muitas vezes se confundem no uso da linguagem e dos procedimentos para resolver problemas, especialmente aqueles que recorrem às funções para sua resolução.

Transpor a linguagem da Física para a Matemática e vice-versa é uma das habilidades necessárias para que os recursos matemáticos se coloquem a serviço da resolução e interpretação de situações físicas aplicadas.

Essa habilidade está presente nesta questão.

(Fuvest-SP) Numa filmagem, no exato instante em que um caminhão passa por uma marca no chão, um dublê se larga de um viaduto para cair dentro de sua caçamba. A velocidade v do caminhão é constante e o dublê inicia sua queda a partir do repouso, de uma altura de 5 m da caçamba, que tem 6 m de comprimento. A velocidade ideal do caminhão é aquela em que o dublê cai bem no centro da caçamba, mas a velocidade real v do caminhão poderá ser diferente e ele cairá mais à frente ou mais atrás do centro da caçamba. Para que o dublê caia dentro da caçamba, v pode diferir da velocidade ideal, em módulo, no máximo:

- a) 1 m/s b) 3 m/s c) 5 m/s d) 7 m/s e) 9 m/s

Para a resolução dessa questão, propomos os seguintes passos, que mostram quanto da linguagem matemática é necessária para se obter a resolução de problema de Física.

1. Faça um desenho da caçamba do caminhão e posicione o dublê no momento do salto.
2. Escreva em linguagem matemática a equação do movimento de queda do dublê e calcule o tempo T dessa queda. (Observe que, apesar de a Física usar outras letras, o raciocínio matemático é o mesmo que fazemos com as funções.)

A equação que determina a velocidade constante e ideal do caminhão é: $v = \frac{D}{T}$, em que D é a distância da marca no chão até a posição de queda do dublê e T é o tempo que você calculou no item anterior.

Como a velocidade do caminhão pode não ser a ideal, mas deve garantir que o dublê caia sobre a caçamba, ela deve ser igual a $v = \frac{D + x}{T}$, em que x é a metade da extensão da caçamba; logo, $x = 3 \text{ m}$.

A diferença entre a velocidade ideal e a velocidade real do caminhão é:

$$\frac{D + x}{T} - \frac{D}{T} = \frac{x}{T} = \frac{3}{T} \text{ m/s}$$

Substituindo o valor de T que foi encontrado no item 2, temos a resposta do problema.

Esse exercício mostra que, apesar de ser necessário conhecer os conceitos da Física e as leis que os regem, todo o tratamento para a resolução envolveu equações e relações entre grandezas, ou seja, funções.

4 Função derivada

Vamos continuar investigando as retas tangentes aos gráficos de duas funções do início deste capítulo: $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$, para $x \in [0, 5]$.

Se x_0 é um ponto qualquer do intervalo $]0, 5[$, temos:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{\Delta x} = \frac{2x_0 + 2\Delta x - 2x_0}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

$$\begin{aligned} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \\ &= \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \end{aligned}$$

Calcular as derivadas de f e g em x_0 é simples.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2 = 2$$

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

Daí, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x$ é igual a 2 em qualquer ponto $x_0 \in [0, 5]$. E o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $g(x) = x^2$ varia com o valor de x_0 ; quanto maior for o valor de x_0 , maior será o coeficiente angular da reta tangente.

As retas tangentes coincidem com o gráfico de f e todas têm coeficiente angular igual a 2.

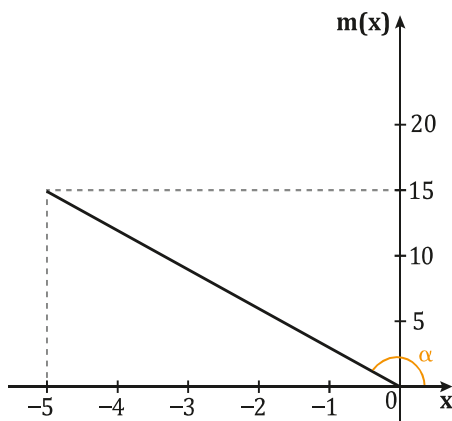
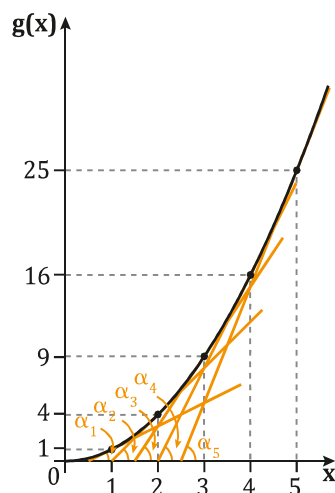
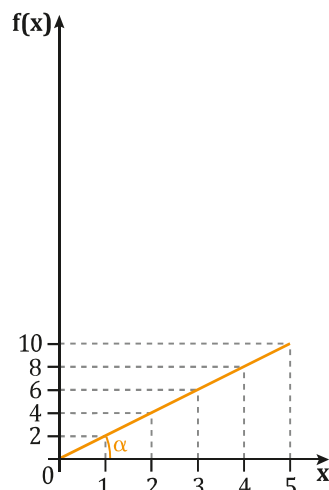
As retas tangentes têm coeficientes angulares variáveis com valores crescentes:

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < \alpha_5$$

$$0 < \operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2 < \operatorname{tg} \alpha_3 < \operatorname{tg} \alpha_4 < \operatorname{tg} \alpha_5$$

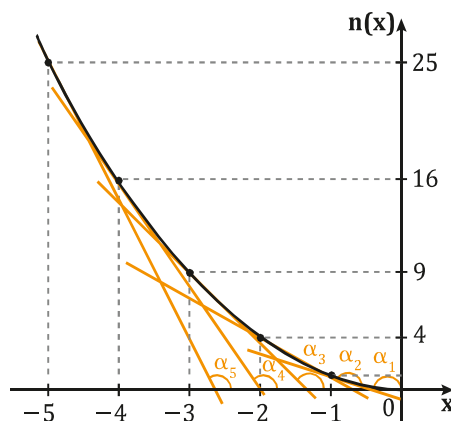
Esses exemplos mostram que as inclinações das retas tangentes ao gráfico de uma função f estão relacionadas ao crescimento da função e à velocidade desse crescimento.

Vejamos o que acontece com funções decrescentes, por exemplo, $m(x) = -3x$ e $n(x) = x^2$, para $x \in [-5, 0]$.



As retas tangentes ao gráfico de m coincidem com seu gráfico e têm coeficiente angular negativo:

$$\operatorname{tg} \alpha < 0$$



As retas tangentes ao gráfico de n têm coeficientes angulares negativos com valores crescentes:

$$\operatorname{tg} \alpha_5 < \operatorname{tg} \alpha_4 < \operatorname{tg} \alpha_3 < \operatorname{tg} \alpha_2 < \operatorname{tg} \alpha_1 < 0$$

Imagens: Zapit

Em cada exemplo ficou definida uma nova função, que é chamada de **função derivada**.
Mais formalmente:

Seja **A** um intervalo aberto tal que uma função **f** seja derivável em cada $x \in A$. Então, podemos considerar a função que a cada $x \in A$ associa a sua derivada $f'(x)$. Essa função é denominada **função derivada** de **f** em **A**, sendo indicada por **f'** ou $\frac{df}{dx}$ ou Df . Para obter a função **f'**, usamos a definição:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nos exemplos anteriores mostramos que:

- para $f(x) = 2x$, $x \in [0, 5]$, $f'(x) = 2$;
- para $g(x) = x^2$, $x \in [0, 5]$, $g'(x) = 2x$

Daí, a equação da reta tangente ao gráfico de **f** em qualquer **x** é $y = 2x$.

Já a equação da reta tangente ao gráfico de **g** varia. Por exemplo, no ponto $x = 3$, $g'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, e a equação da reta é:

$$\begin{aligned} y - g(3) &= g'(3)(x - 3) \\ y - 9 &= 6(x - 3) \\ y &= 6x - 9 \end{aligned}$$

Derivadas de algumas funções

1. Função constante $f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

A função derivada de $f(x) = c$ é dada por $f'(x) = 0$.

2. Função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1} \right]}{\cancel{\Delta x}} \end{aligned}$$

A função derivada de $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por $f'(x) = nx^{n-1}$.

3. Função derivada de $f(x) = \sqrt[n]{x}$, para $x > 0$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x + \Delta x} - \sqrt[n]{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[n]{x + \Delta x} - \sqrt[n]{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt[n]{x + \Delta x} + \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x + \Delta x} + \sqrt[n]{x}} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \sqrt[n]{x + \Delta x} + \sqrt[n]{x}} = \frac{1}{2\sqrt[n]{x}} \end{aligned}$$

A função derivada de $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $x > 0$, é dada por $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[n]{x}}$.

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R3. Calcule a derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$.

Resolução

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} - \cancel{x} - \Delta x}{\Delta x \cdot x \cdot (x + \Delta x)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{-\Delta x}}{\cancel{\Delta x} \cdot x(x + \Delta x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Observe que, para todo valor de $x \neq 0$, $f'(x) < 0$.

R4. Prove que, se f e g têm derivada no ponto x , então $f + g$ e $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$, têm derivada em x , e calcule cada uma delas em função de $f'(x)$ e $g'(x)$.

Resolução

$$(f + g)'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + \Delta x) - (f + g)(x)}{\Delta x}$$

Lembrando que o valor da soma de duas funções em um ponto é a soma dos valores de cada uma, temos:

$$(f + g)(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)$$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ então:}$$

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\underbrace{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}_{\text{tende para } f'(x)} + \underbrace{\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}_{\text{tende para } g'(x)} \right] = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Concluindo:

$$f + g \text{ tem derivada em } x \text{ e } (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Para $c \cdot f$, com $c \in \mathbb{R}$, vamos usar $(cf)(x + \Delta x) = c \cdot f(x + \Delta x)$ e $(cf)(x) = c \cdot f(x)$, como foi definido para qualquer função f e qualquer $c \in \mathbb{R}$.

Daí:

$$\begin{aligned} (cf)'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(cf)(x + \Delta x) - (cf)(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c \cdot f(x + \Delta x) - c \cdot f(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = c \cdot f'(x) \end{aligned}$$

Então, cf tem derivada em x e $(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$.

R5. Faça o que se pede a seguir.

a) Aplique o exercício anterior e calcule a derivada de

$$h(x) = 3\sqrt{x} + x^5 - \frac{8}{x}, \text{ para } x > 0.$$

b) Determine a reta tangente ao gráfico de h no ponto $x = 1$.

Resolução

a) Pela atividade R4, a derivada da soma de funções é a soma das derivadas das parcelas, e a derivada de uma constante vezes uma função é o produto dessa constante pela derivada da função.

Relembrando que:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (x^5)' = 5x^4 \text{ e } \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \text{ temos:}$$

$$h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 5x^4 - 8 \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{x}} + 5x^4 + \frac{8}{x^2}$$

b) Para a reta tangente ao gráfico de h no ponto $x = 1$, temos:

$$h(1) = -4 \text{ e } h'(1) = \frac{3}{2} + 5 + 8 = \frac{29}{2}$$

A equação da reta que passa por $(1, h(1))$ e tem inclinação $h'(1)$ é:

$$y - (-4) = \frac{29}{2}(x - 1)$$

$$2y - 29x + 37 = 0$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



12. Determine a função derivada de:

a) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4$

b) $f(x) = x^{-1} + x^2$

c) $f(x) = x + \sqrt{x}$

d) $f(x) = (6x + 1)(x^3 + 2)$

e) $f(x) = 15x^4$

f) $f(x) = -4x^3 + 7x^2 - 3x$

13. A partir da definição de derivada, determine $f'(x)$ para $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$.

14. Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2$.

a) Calcule $f'(x)$, para $x \in \mathbb{R}$.

b) Para que valores de x $f'(x) = 0$?

c) Interprete o que significa $f'(x_0) = 0$ para a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

15. Determine a reta tangente ao gráfico de

$$g(x) = -\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$$

que é paralela à reta $y = -3x + 5$.

16. (UFPI) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Analise as afirmações e descubra quais delas são verdadeiras e quais são falsas.

a) Se $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, então f é uma função constante.

b) Se $f'(a) = 0$, então $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de máximo global de f .

c) $f'(a)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função f no ponto $(a, f(a))$.

d) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$ e $f(a) = f(b)$, então existe sempre $c \in \mathbb{R}$, com $a < c < b$, tal que $f(c) > 0$.

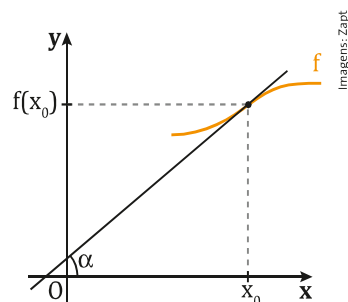
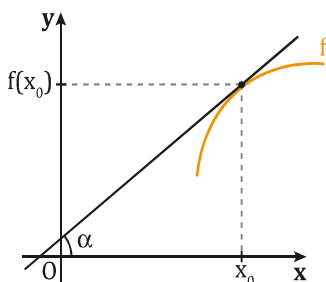
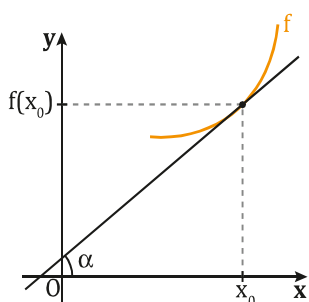
5 Sinal da derivada

Conforme citado anteriormente, nosso objetivo é estudar o comportamento de uma função, seu crescimento ou decrescimento, pela análise de sua derivada.

Seja f uma função com derivada em um intervalo aberto I e $x_0 \in I$. Podemos ter três possibilidades para $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) > 0, f'(x_0) < 0 \text{ ou } f'(x_0) = 0$$

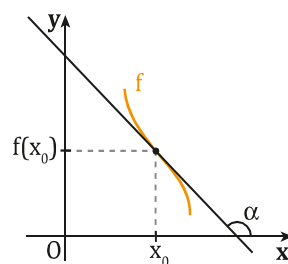
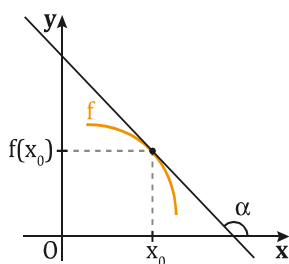
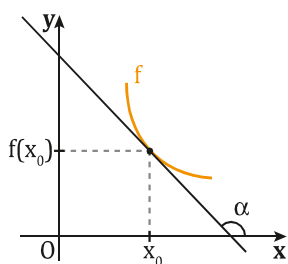
No caso de $f'(x_0) > 0$, temos que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ possui coeficiente angular positivo, isto é, forma um ângulo α agudo com a direção positiva do eixo Ox . Então, nas proximidades do ponto x_0 , f só pode ser crescente. Observe os gráficos:



Imagens: Zapt

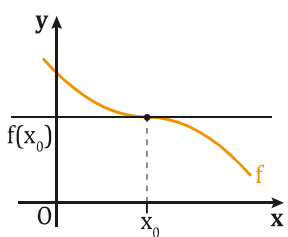
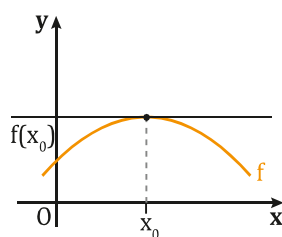
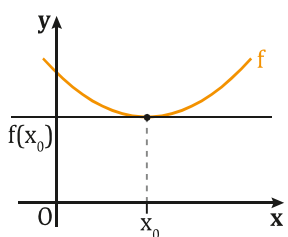
Em todos os casos, f só pode ser crescente nas imediações de x_0 .

Da mesma forma, se $f'(x_0) < 0$, graficamente a inclinação da reta tangente é negativa; isso implica que a reta forma um ângulo α obtuso com o semieixo positivo de Ox :



Daí, em qualquer caso, f é decrescente nas proximidades de x_0 .

Finalmente, se $f'(x_0) = 0$, significa que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é horizontal. Isso implica:



Nos dois primeiros casos, f assume valor mínimo ou máximo em $(x_0, f(x_0))$; isso porque f decresce de um lado de x_0 e cresce do outro. No terceiro caso, como f mantém seu comportamento à direita e à esquerda de x_0 , este não é ponto de máximo nem de mínimo de f .

O que foi discutido até aqui tinha por objetivo justificar, ainda que informalmente, o teorema a seguir.

Se f é uma função com derivada em todo ponto de um intervalo aberto I e:

- $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I ;
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, então f é decrescente em I .

DE OLHO NA RESOLUÇÃO

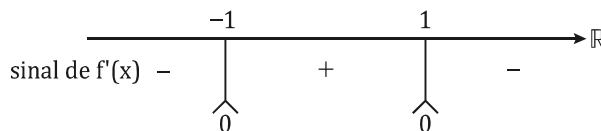
R6. Seja a função $f(x) = -x^3 + 3x$, de domínio \mathbb{R} . Determine o(s) intervalo(s) em que f é crescente e aquele(s) em que f é decrescente.

Resolução

$$f'(x) = -3x^2 + 3$$

Para estudarmos o sinal de $f'(x)$, determinamos suas raízes:

$$-3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1$$



Então:

f é crescente para $-1 \leq x \leq 1$ ou f é crescente em $]-1, 1[$;

f é decrescente para $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ ou f é decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$.

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



17. Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de:

a) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 4$

c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

b) $f(x) = x^3 - 3x$

d) $f(x) = -x^4 + 4x^3$

18. Mostre que:

a) a função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é crescente se $a > 0$ ou é decrescente se $a < 0$.

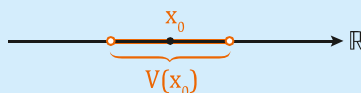
b) a função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$, é crescente para $x \geq -\frac{b}{2a}$ e decrescente para $x \leq -\frac{b}{2a}$.

c) a função do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$, é crescente para $x \leq -\frac{b}{2a}$ e decrescente para $x \geq -\frac{b}{2a}$.

6 Pontos de máximo e de mínimo de uma função

Vamos definir com mais cuidado o que significam pontos de máximo e de mínimo de uma função e estudar de que forma a derivada pode nos auxiliar a encontrar esses pontos.

Vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}$ é todo intervalo aberto ao qual x_0 pertence.
Notação: $V(x_0)$.



Consideremos a função f real de variável real, representada na figura abaixo.

Observando P_1 , percebemos que dos pontos do gráfico de f , de abscissa $x \in V(x_1)$, o de maior ordenada é P_1 .

Dizemos que:

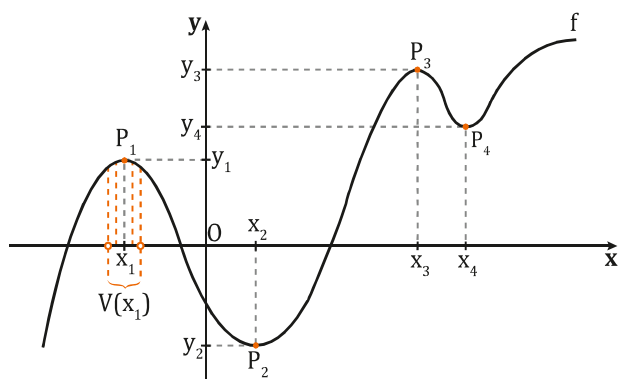
- P_1 é um ponto de **máximo local** (ou relativo) de f ;
- f admite um **máximo local** em x_1 ;
- $y_1 = f(x_1)$ é um **máximo local** de f .

Para P_2 , P_3 e P_4 temos:

- P_2 é um ponto de **mínimo local**, P_3 é de **máximo local** e P_4 é de **mínimo local**;
- f admite **mínimo local** em x_2 , **máximo local** em x_3 e **mínimo local** em x_4 ;
- y_2 é **mínimo local**, y_3 é **máximo local** e y_4 é **mínimo local**.

Os pontos P_1 , P_2 , P_3 e P_4 são denominados **extremos** da função f .

Notamos que um mínimo local pode ser **maior** do que um máximo local ($y_4 > y_1$).



Imagens: Zapit

Máximo local e mínimo local

Seja f uma função real de variável real.

1) f admite um **máximo local** (ou relativo) em $x_0 \in D(f)$ se existe vizinhança $V(x_0)$ tal que:

$$f(x) < f(x_0), \text{ para todo } x \in V(x_0), x \neq x_0$$

2) f admite um **mínimo local** (ou relativo) em $x_0 \in D(f)$ se existe vizinhança $V(x_0)$ tal que:

$$f(x) > f(x_0), \text{ para todo } x \in V(x_0), x \neq x_0$$

Notemos inicialmente que, se uma função f admite um máximo ou mínimo local no ponto $P(x_0, f(x_0))$ e é derivável em x_0 , então a tangente ao gráfico de f em P é paralela ao eixo x .

Sabemos que toda reta paralela ao eixo x tem coeficiente angular zero.

Então:

Se uma função f admite um ponto de máximo ou de mínimo local em $P(x_0, f(x_0))$ e é **derivável** em x_0 , $f'(x_0) = 0$.

A recíproca dessa proposição não é válida: existem funções para as quais $f'(x_0) = 0$ e $f(x_0)$ não é máximo nem mínimo local.

É o caso de $f(x) = (x-1)^3$: $f'(1) = 0$ e $f(1)$ não é máximo nem mínimo local.

Em outras palavras:

As raízes reais de $f'(x) = 0$ são candidatas a pontos de máximo ou mínimo local de f .

Para descobrirmos se uma raiz real x_0 de $f'(x) = 0$ é a abscissa de um ponto de máximo ou de mínimo local, analisemos o sinal de $f'(x)$ em uma vizinhança de x_0 .

• $f(x_0)$ é máximo local

Para qualquer $x_1 \in V(x_0)$, $x_1 < x_0$, o coeficiente angular da tangente t_1 é positivo, isto é, $f'(x_1) > 0$.

Para qualquer $x_2 \in V(x_0)$, $x_2 > x_0$, o coeficiente angular da tangente t_2 é negativo, isto é, $f'(x_2) < 0$.

• $f(x_0)$ é mínimo local

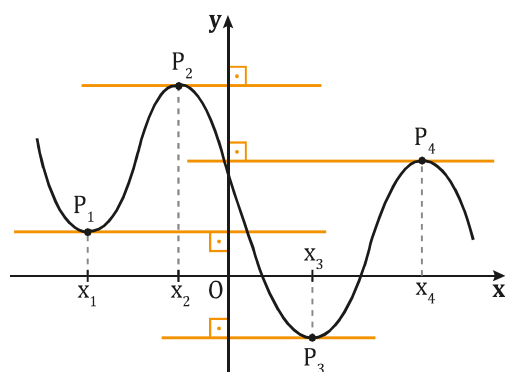
Para qualquer $x_1 \in V(x_0)$, $x_1 < x_0$, o coeficiente angular da tangente t_1 é negativo, isto é, $f'(x_1) < 0$.

Para qualquer $x_2 \in V(x_0)$, $x_2 > x_0$, o coeficiente angular da tangente t_2 é positivo, isto é, $f'(x_2) > 0$.

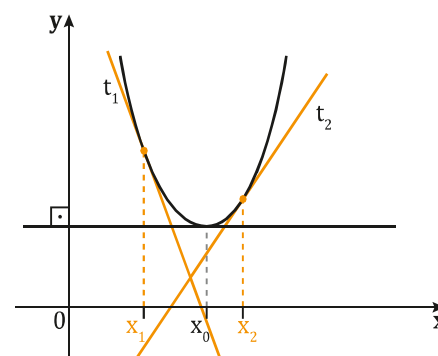
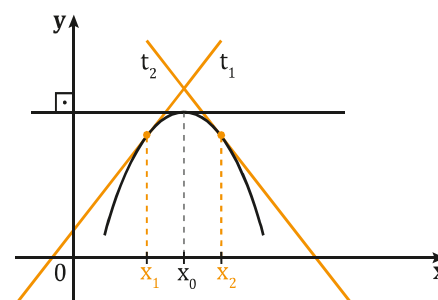
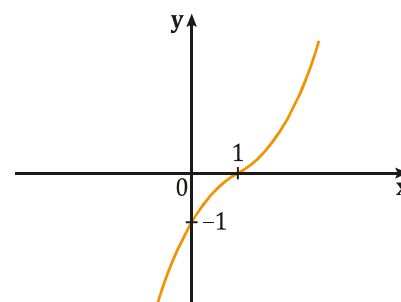
Demonstra-se que:

Se uma função f admite um máximo ou mínimo local em $P(x_0, f(x_0))$, é **derivável** em $V(x_0)$ e:

- 1) $f'(x) > 0$, para todo $x \in V(x_0)$, $x < x_0$ e $f'(x) < 0$, para todo $x \in V(x_0)$, $x > x_0$, então $f(x_0)$ é um **máximo local** de f ;
- 2) $f'(x) < 0$, para todo $x \in V(x_0)$, $x < x_0$ e $f'(x) > 0$, para todo $x \in V(x_0)$, $x > x_0$, então $f(x_0)$ é um **mínimo local** de f .



Imagens: Zapt



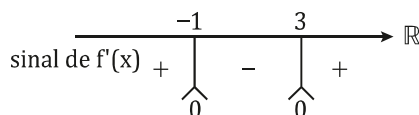
DE OLHO NA RESOLUÇÃO

R7. Seja a função $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

- Determine os pontos de máximo ou de mínimo local de f .
- Determine o(s) intervalo(s) em que f é crescente e aquele(s) em que f é decrescente.
- Esboce o gráfico de f .

Resolução

a) Devemos estudar o sinal de $f'(x) = x^2 - 2x - 3$ nas vizinhanças de suas raízes, que são -1 e 3 . Veja abaixo.



$$x \in V(-1) \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > -1 \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ tem máximo local em } x = -1$$

$$x \in V(3) \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \Rightarrow f'(x) < 0 \\ x > 3 \Rightarrow f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow f \text{ tem mínimo local em } x = 3$$

A ordenada do ponto de máximo local é:

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3(-1) = \frac{5}{3}$$

A ordenada do ponto de mínimo local é:

$$f(3) = \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 = -9$$

Portanto, $(-1, \frac{5}{3})$ é o ponto de máximo local e $(3, -9)$ é o ponto de mínimo local.

b) Do esquema de sinais de $f'(x)$, temos:

f é crescente para $x \leq -1$ ou $x \geq 3$;

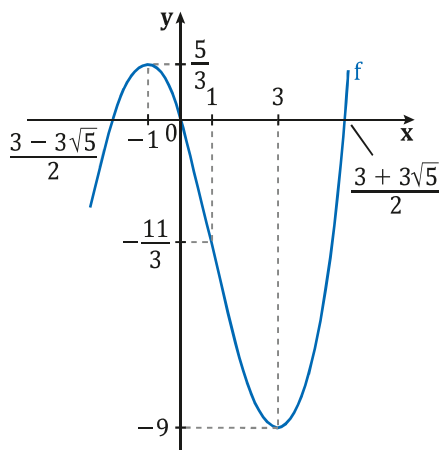
f é decrescente para $-1 \leq x \leq 3$.

c) As abscissas dos pontos de interseção do gráfico de f com o eixo x são as raízes reais de f :

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$$

Obtemos então o gráfico da figura.



R8. Seja a função $f(x) = -x^4 + x^3$, $x \in [-1, 2]$. Determine:

- os intervalos de crescimento e de decrescimento;
- os valores máximos e mínimos, locais e absolutos, de f .

Resolução

a) Temos $f'(x) = -4x^3 + 3x^2$, cujas raízes são 0 e $\frac{3}{4}$.

Vamos analisar o sinal de $f'(x) = x^2(-4x + 3)$ em $[-1, 2]$:

	-1	0	$\frac{3}{4}$	2	
sinal de x^2		+	+	+	\mathbb{R}
sinal de $-4x + 3$	+	+	-	-	
sinal de $f'(x)$	+	+	-	-	

Então, f é crescente em $[-1, \frac{3}{4}]$ e decrescente em $[\frac{3}{4}, 2]$.

$$\text{b) } x \in V\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{4} \Rightarrow f'(x) > 0 \\ x > \frac{3}{4} \Rightarrow f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{256} \text{ é máximo local.}$$

Avaliando f nos extremos do intervalo, temos:

$$f(-1) = -(-1)^4 + (-1)^3 \Rightarrow f(-1) = -2$$

$$f(2) = -2^4 + 2^3 \Rightarrow f(2) = -8$$

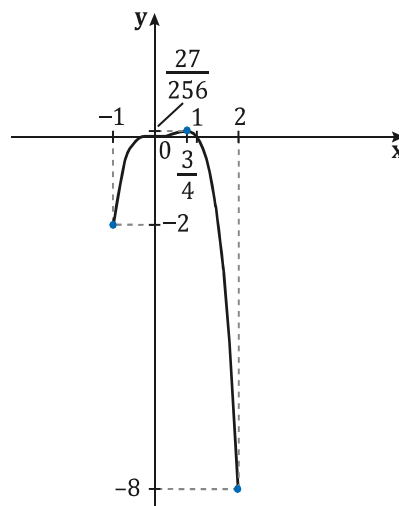
Portanto:

$$f(-1) = -2 \text{ é mínimo local;}$$

$$f(2) = -8 \text{ é mínimo absoluto.}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{256} \text{ é máximo absoluto.}$$

A figura ilustra a variação de f (note que $f(0)$ não é mínimo nem máximo local).



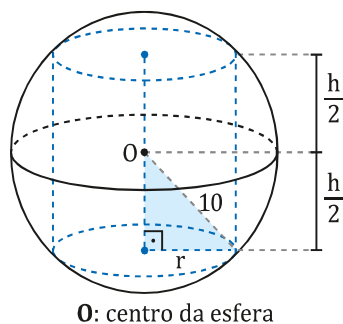
Imagens: Zapit

- R9.** Calcule o volume máximo de um cilindro circular reto inscrito numa esfera que tem raio de 10 cm.

Resolução

Sejam r e h as medidas, em centímetros, respectivamente, do raio e da altura do cilindro.

No triângulo assinalado, pelo Teorema de Pitágoras, vem:



O: centro da esfera

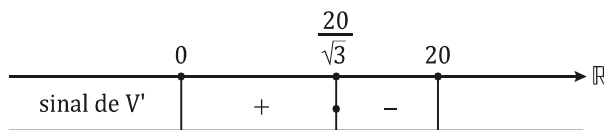
$$r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow r^2 = 100 - \frac{h^2}{4}, \text{ com } 0 < h < 20 \quad (1)$$

$$\text{O volume } V \text{ do cilindro é dado por: } V = \pi r^2 h \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$V(h) = \pi \left(100 - \frac{h^2}{4}\right) h \Rightarrow V(h) = 100\pi h - \frac{\pi h^3}{4}$$

Vamos estudar o sinal de $V'(h) = 100\pi - \frac{3\pi h^2}{4}$, que tem raízes $h = \pm \frac{20}{\sqrt{3}}$, para $0 < h < 20$:



Logo, V assume valor máximo para $h = \frac{20}{\sqrt{3}}$.

Substituindo $h = \frac{20}{\sqrt{3}}$ em (1), obtemos $r^2 = \frac{200}{3}$.

Portanto:

$$V_{\text{máximo}} = \pi \cdot \frac{200}{3} \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{\text{máximo}} = \frac{4000\pi}{3\sqrt{3}} \text{ cm}^3$$

FAZER E APRENDER

REGISTRE
NO CADERNO



- 19.** Esboce os gráficos de f e de f' ; analise se $f(x_0)$, em que x_0 é a raiz de f' , é máximo ou mínimo de f e desenhe a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0 :

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = -x^2 + 4x$

- 20.** Determine o máximo e o mínimo locais de:

a) $f(x) = -x^3 + 3x - 1$ b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - 2$

- 21.** Seja a função $f(x) = x^4 - 2x^3$.

- a) Determine os intervalos de crescimento e decréscimo de f .
b) Determine máximos e mínimos de f .
c) Obtenha a equação da tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa zero. Descreva o comportamento de f em torno desse ponto.

- 22.** Considere a função $f(x) = -x^3 + 3x^2$, $x \in [-3, 3]$.

Determine:

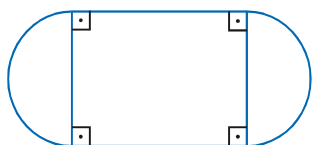
- a) os mínimos e os máximos locais;
b) o mínimo absoluto e o máximo absoluto.

- 23.** Esboce o gráfico de $f(x) = x^3 - 3x$.

- 24.** Determine o extremo da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

- 25.** Pretende-se construir um campo de futebol com a forma de um retângulo mais uma região semicircular em duas das extremidades, conforme a figura.



O perímetro da região deve ser uma pista de 440 m. Determine as dimensões da região para que a parte retangular tenha área máxima.

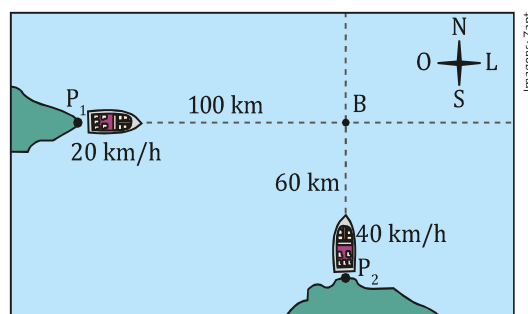
- 26.** (Unicamp-SP) Uma piscina, com capacidade para 120 m³, leva 20 horas para ser esvaziada. O volume de água na piscina, t horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = a(b - t)^2$ para $0 \leq t \leq 20$ e $V(t) = 0$ para $t \geq 20$.

- a) Calcule as constantes a e b .
b) Faça o gráfico da função $V(t)$ para $t \in [0, 30]$.

- 27.** Silos para conter cimento têm a forma de um cilindro de altura h e raio r sobreposto a um cone de altura e raio iguais a r .

Para silos com volume total de 100 m³, determine r de modo que a área lateral seja a menor possível, a fim de minimizar o custo de cada silo.

- 28.** Todas as manhãs, à mesma hora, sai um barco do porto P_1 para o leste, a 20 km/h, e outro do porto P_2 para o norte, a 40 km/h. A boia B , no cruzamento das rotas, dista 100 km de P_1 e 60 km de P_2 . Ao final de quanto tempo a distância entre os barcos é mínima?



Elementos sem proporção entre si.

Veja nas **Orientações Didáticas** o jogo **Para recordar funções**.

Investigação de máximos e mínimos de funções

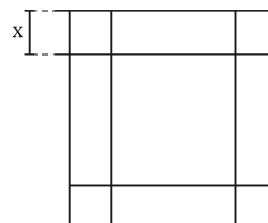
A planilha eletrônica nos permite analisar, por meio da tabela de dados, bem como visualizar graficamente, a relação entre grandezas.

A seguir propomos dois problemas que podem ser investigados a partir, por exemplo, da planilha do LibreOffice ou de qualquer outro programa de planilha eletrônica.

1ª proposta: (Adaptado de atividade proposta por Lulu Healy, da Universidade de Londres)

Caixa de volume máximo

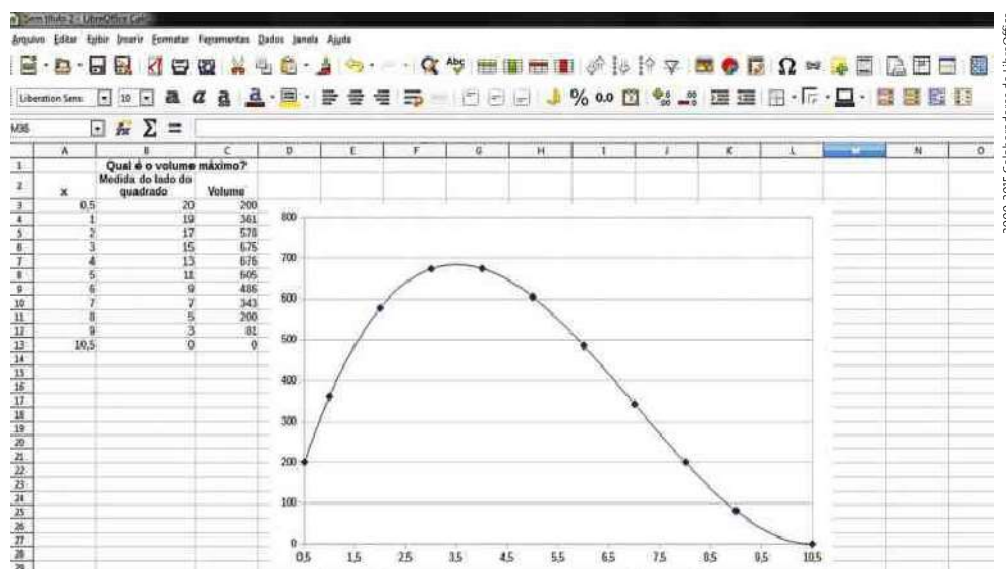
Uma caixa sem tampa pode ser construída a partir de um quadrado de cartolina, cortando-se pequenos quadrados nos seus cantos e depois dobrando-se as laterais para formar as faces da caixa.



- a) Qual é a medida do lado do quadrado que deve ser removido para que o volume da caixa seja o maior possível?

Vamos iniciar com um quadrado de 21 cm de lado para depois alterar o valor inicial.

Algumas perguntas podem ser feitas a partir do gráfico a seguir.



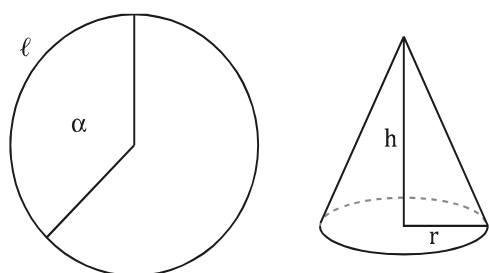
- b) Observe os resultados obtidos nas colunas A e C até o ponto em que $x = 4$ cm. Que relação existe entre os resultados dessas duas colunas? *Espera-se que os estudantes concluam que à medida que os valores de x aumentam, até $x = 4$ cm, o volume da caixa aumenta, e que a partir de $x = 5$ cm o volume passa a decrescer. Assim, o valor de x*
- c) Compare os resultados obtidos nas colunas A e C a partir de $x = 5$ cm. Qual a sua conclusão?
- d) É possível estimar o valor de x para o qual o volume da caixa é máximo? *que corresponde ao volume máximo da caixa deve estar entre 3 cm e 5 cm.*

2ª proposta:

Cone de volume máximo

Cortando-se um setor circular de ângulo α , podemos construir, a partir dele, um cone.

Para qual valor de α o volume do cone é máximo?





- (IFSP) Um prédio comercial instalou, em cada um dos seus 4 andares, 8 vasos sanitários com sistema de esgoto a vácuo. Esse sistema, além de produzir menos esgoto, consome cerca de 1,2 litro de água a cada acionamento da descarga, gerando uma economia de 40% no volume de água gasto. Se a descarga de cada vaso for acionada 10 vezes em um horário de um certo dia, o volume economizado naquele horário será, em litros, igual a:
a) 153,6 b) 230,4 c) 256,0 d) 367,2 e) 576,0
- (Enem-MEC) A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista *Veja*. Ano 41, n. 26, 25 jun. 2008 (adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

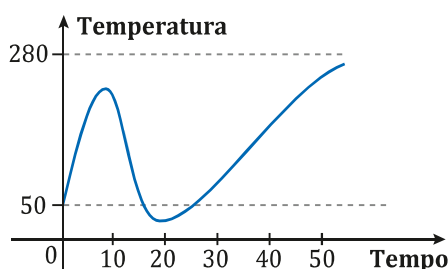
- a) 406 b) 1334 c) 4 002 d) 9 338 e) 28 014

APRENDER A APRENDER



Mais uma bateria de problemas. Ao final, avalie como você se saiu. Identifique seus avanços e o que precisa estudar mais.

- Durante o tratamento térmico de uma peça metálica, sua temperatura varia de acordo com o gráfico abaixo.



Observando-o, cite duas informações que podemos extrair dele.

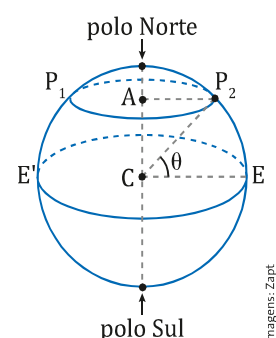
- Em uma indústria, $\frac{1}{3}$ dos trabalhadores tem idade inferior a 30 anos, $\frac{1}{4}$ tem entre 30 e 40 anos, e 40 funcionários têm 40 anos ou mais.
a) Quantas pessoas trabalham nessa indústria?
b) Quantas delas têm pelo menos 30 anos?
- Sejam **A**, **B**, **C**, **D** vértices consecutivos de um quadrado tal que **A** = (1, 3) e **B** e **D** pertencem à reta de equação $x - y - 4 = 0$. Qual é a área desse quadrado, em unidades de área?
- Quais são os valores de **a** e **b** que tornam a reta de equação $y = ax + b$ tangente à circunferência de raio 2 e centro no ponto (0, 0), no ponto (1, 3)?
- Um fabricante gastava R\$ 40,00 na produção de cada unidade de uma mercadoria, que ele vendia por R\$ 100,00. Sobre o preço de venda, o fabricante paga-

va 40% de imposto. Devido a problemas com o preço das matérias-primas, o custo de fabricação teve um aumento de 60%. Então, para evitar uma queda acentuada na produção, o governo resolveu diminuir a alíquota do imposto para 30% do preço de venda, e o fabricante concordou em diminuir o seu percentual de lucro, de 50% para 40%. Qual o novo preço de venda dessa mercadoria?

- Ao estudar Geometria, Juliana escreveu algumas frases sobre conclusões e propriedades que julgava importantes:
a) Duas retas paralelas não coincidentes determinam um plano.
b) Um ponto e uma reta que não o contenha determinam um plano.
c) Duas retas distintas ou são paralelas ou são concorrentes.
d) Se uma reta é perpendicular a um plano, é perpendicular a qualquer reta do plano.
e) Por quatro pontos distintos passa sempre um único plano.

Analise as frases e indique quais são falsas e quais são verdadeiras. Se encontrar erros, corrija-os e comente suas correções.

- Considere a Terra como uma esfera com cerca de 6 400 km de raio. Qual é o comprimento do paralelo que passa por **P**₁ e **P**₂, se $\theta = 45^\circ$? ($\sqrt{2} \approx 1,4$)



Imagens: Zapt

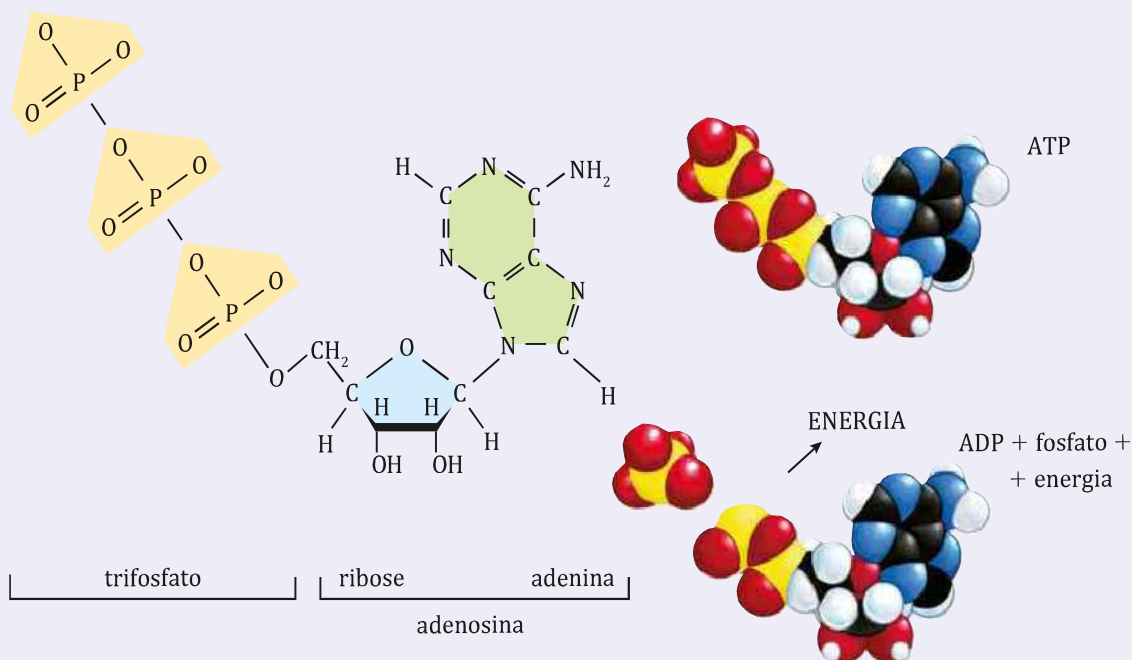
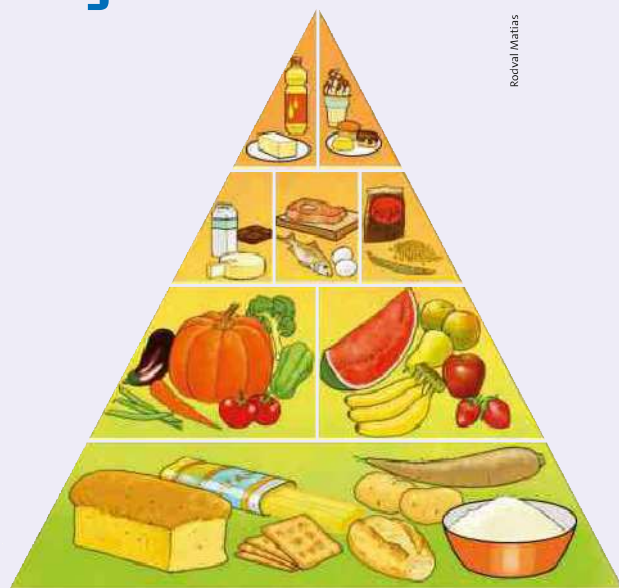
Alimento: nossa fonte de energia

Energia mecânica, térmica, química, elétrica, nuclear... São diversas as formas de energia que se manifestam na natureza e todas são vitais ao ser humano e à manutenção da estrutura tecnológica moderna. Mas são as de origem química que geram as transformações energéticas vitais à manutenção da vida humana, e o insumo é o alimento. Ao ingerirmos as moléculas contidas nos alimentos, elas são decompostas e absorvidas pelos vários órgãos do corpo, mantendo o seu funcionamento.

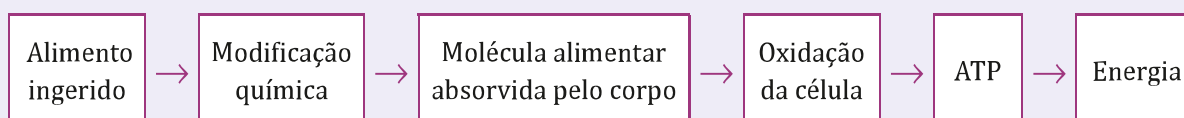
O principal combustível celular é a molécula de adenosina trifosfato (ATP). O funcionamento adequado do corpo humano exige $2,0 \cdot 10^{26}$ dessas moléculas, originadas após a absorção dos alimentos.

A eficiência da “máquina molecular” depende da transformação do ATP, em que uma molécula de adenosina trifosfato (ATP) gera uma molécula de adenosina difosfato (ADP) mais fosfato (P), liberando certa quantidade de energia (ΔE): $\text{ATP} \rightarrow \text{ADP} + \text{P} + \Delta E$.

É nas células eucarióticas, de todos os organismos vivos, que ocorre a síntese do ATP, gerando a energia necessária para a manutenção do organismo – ao suprir a necessidade energética de cada um dos órgãos – e também para o desenvolvimento das atividades diárias.



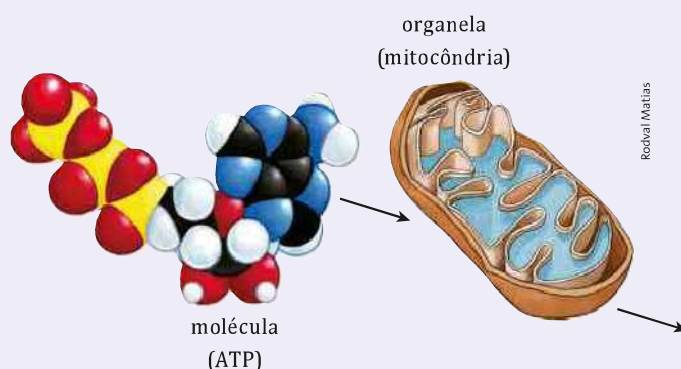
Esquema representando a síntese de ATP em ADP, fosfato e energia.



Esquema representando as fases do processo de transformação do alimento ingerido em energia.

A mitocôndria é a responsável por esse processo, pois no seu interior se localizam as moléculas de ATP. Por essa razão, a mitocôndria é tida como uma “usina de energia”. Assim como em toda usina, é válida a relação entre trabalho e energia.

Sendo o ATP a molécula vital do nosso organismo, a questão é: qual a relação entre o alimento e a energia necessária ao organismo humano?



Quando o ATP libera energia, é necessário recarregar a energia da “máquina molecular”. Isso é feito nas membranas das mitocôndrias, nossa “usina de energia”.

Essa questão pode ser respondida ao se reconhecer a importância que o princípio da conservação da energia tem na fisiologia dos sistemas vivos. Mais especificamente, o primeiro princípio da Termodinâmica, matematicamente expresso por:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Na digestão – que começa na boca, com a mastigação – ao triturar o alimento, misturando-o à saliva, rica em enzimas como a lipase, dá-se o início da degradação das gorduras e dos açúcares em moléculas menores, como a glicose, que é transportada para o interior da célula, gerando ATP. O valor da energia consumida por um indivíduo depende de sua massa, bem como da atividade física diária por ele desenvolvida. Nesse processo, a energia interna (ΔU) está permanentemente sofrendo redução, razão pela qual é necessário o fornecimento de alimento para as atividades de manutenção do corpo.

Uma parte da energia interna (ΔU) se transforma em trabalho (ΔW), que se transforma em energia consumida, por exemplo, ao andar de bicicleta, ler um livro, puxar uma cadeira, dormir etc.

A outra parte da energia interna se transforma em calor cedido (ΔQ), por exemplo, por meio da transpiração. Essa medida pode ser observada isolando-se o indivíduo em uma sala a temperatura constante e medindo-se a variação de temperatura que a sala sofre com a presença do indivíduo.

A título de curiosidade, quando uma pessoa realiza um trabalho doméstico, por exemplo, sua energia interna dá origem a uma produção de energia calorífica (circulante em uma sala) da ordem de até 200 W por pessoa. Esse valor corresponde à energia liberada por uma lâmpada incandescente.

■ ATIVIDADE

1. Que tal verificar experimentalmente a energia gerada pelos alimentos?

Em um *site* de busca, digite “experimentos energia alimentos”. Você vai encontrar textos e vídeos muito interessantes, com atividades que podem ser feitas por você e pelos colegas.

REGISTRE
NO CADERNO



POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES

Nesta unidade você deve ter percebido a importância de procedimentos algébricos para a análise e compreensão tanto da construção como do comportamento do gráfico de uma função, em especial identificando pontos de máximos e mínimos por meio do conceito de derivada de um ponto. A questão abaixo pede a análise de uma função por meio de sua derivada, fazendo-nos lembrar de conceitos como função do 2º grau, suas raízes e estudo do sinal dessa função para encontrar seus pontos de máximo e de mínimo. Veja:

VESTIBULAR EM CONTEXTO

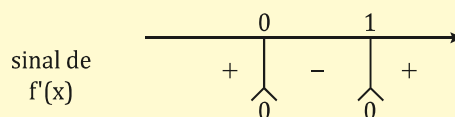
(AMAN-RJ) O gráfico da função $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$ admite em dois pontos distintos tangentes geométricas paralelas ao eixo dos x . As ordenadas de tais pontos são:

- a) 0 e 1
b) 0 e -1
c) 1 e $-\frac{5}{6}$
d) 1 e $\frac{5}{6}$

Resolução

1ª) Devemos estudar o sinal de $y' = x^2 - x$, pois a tangente é paralela ao eixo dos x nos pontos de máximos e mínimos relativos e nesses pontos a primeira derivada é igual a zero:

$$x^2 - x = 0 \Rightarrow x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ e } x = 1$$



em torno do ponto $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \\ x > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ tem máximo local em $x = 0$

em torno do ponto $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \rightarrow f'(x) < 0 \\ x > 1 \rightarrow f'(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f$ tem mínimo local em $x = 1$

2ª) As ordenadas dessas abscissas são:

$$f(0) = 1 \text{ e}$$

$$f(1) = \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

Alternativa d.

ATIVIDADES

REGISTRE
NO CADERNO



Observe agora estas outras questões que exigem a leitura cuidadosa para a escolha da alternativa correta.

Essas questões envolvem funções e seus pontos de máximo e de mínimo.

1. (Vunesp) Em certo dia do ano, em uma cidade, a maré alta ocorreu à meia-noite. A altura da água no porto dessa cidade é uma função periódica, pois oscila regularmente entre maré alta e maré baixa, ou seja, a altura da maré aumenta até atingir um valor máximo (maré alta) e vai diminuindo até atingir um valor mínimo (maré baixa), para depois aumentar de novo até a maré alta, e assim por diante. A altura y , em metros, da maré, nesse dia, no porto da cidade, pode ser obtida, aproximadamente, pela fórmula: $y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$, sendo t o tempo decorrido, em horas, após a meia-noite.

Análise as afirmações a respeito dessa situação:

- I. no instante $t = 3$ h a altura da maré é de 2 m.
II. no instante $t = 6$ h ocorreu a maré baixa, cuja altura é de 0,1 m.
III. no instante $t = 12$ h ocorre maré alta, cuja altura é de 3,9 m.

É correto o que se afirma em:

- a) I, II e III.
b) II e III, apenas.
c) I e III, apenas.
d) I e II, apenas.
e) I, apenas.

2. (Enem-MEC) Um técnico precisa consertar o termostato do aparelho de ar-condicionado de um escritório, que está desregulado. A temperatura T , em graus Celsius, no escritório, varia de acordo com a função $T(h) = A + B \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (h - 12)\right)$, sendo h o tempo, medido em horas, a partir da meia-noite ($0 < h < 24$) e A e B os parâmetros que o técnico precisa regular. Os funcionários do escritório pediram que a temperatura máxima fosse 26 °C, a mínima 18 °C, e que durante a tarde a temperatura fosse menor do que durante a manhã. Quais devem ser os valores de A e de B para que o pedido dos funcionários seja atendido?

- a) $A = 18$ e $B = 8$
b) $A = 22$ e $B = -4$
c) $A = 22$ e $B = 4$
d) $A = 26$ e $B = -8$
e) $A = 26$ e $B = 8$

Tabela trigonométrica

Ângulo (em graus)	Sen	Cos	Tg
1	0,01745	0,99985	0,01746
2	0,03490	0,99939	0,03492
3	0,05234	0,99863	0,05241
4	0,06976	0,99756	0,06993
5	0,08716	0,99619	0,08749
6	0,10453	0,99452	0,10510
7	0,12187	0,99255	0,12278
8	0,13917	0,99027	0,14054
9	0,15643	0,98769	0,15838
10	0,17365	0,98481	0,17633
11	0,19087	0,98163	0,19438
12	0,20791	0,97815	0,21256
13	0,22495	0,97437	0,23087
14	0,24192	0,97030	0,24933
15	0,25882	0,96593	0,26795
16	0,27564	0,96126	0,28675
17	0,29237	0,95630	0,30573
18	0,30902	0,95106	0,32492
19	0,32557	0,94552	0,34433
20	0,34202	0,93969	0,36397
21	0,35837	0,93358	0,38386
22	0,37461	0,92718	0,40403
23	0,39073	0,92050	0,42447
24	0,40674	0,91355	0,44523
25	0,42262	0,90631	0,46631
26	0,43837	0,89879	0,48773
27	0,45399	0,89101	0,50953
28	0,46947	0,88295	0,53171
29	0,48481	0,87462	0,55431
30	0,50000	0,86603	0,57735
31	0,51504	0,85717	0,60086
32	0,52992	0,84805	0,62487
33	0,54464	0,83867	0,64941
34	0,55919	0,82904	0,67451
35	0,57358	0,81915	0,70021
36	0,58779	0,80903	0,72654
37	0,60182	0,79864	0,75355
38	0,61566	0,78801	0,78129
39	0,62932	0,77715	0,80978
40	0,64279	0,76604	0,83910
41	0,65606	0,75471	0,86929
42	0,66913	0,74314	0,90040
43	0,68200	0,73135	0,93252
44	0,69466	0,71934	0,96569
45	0,70711	0,70711	1,00000

Ângulo (em graus)	Sen	Cos	Tg
46	0,71934	0,69466	1,03553
47	0,73135	0,68200	1,07237
48	0,74314	0,66913	1,11061
49	0,75471	0,65606	1,15037
50	0,76604	0,64279	1,19175
51	0,77715	0,62932	1,23499
52	0,78801	0,61566	1,27994
53	0,79864	0,60182	1,32704
54	0,80903	0,58779	1,37638
55	0,81915	0,57358	1,42815
56	0,82904	0,55919	1,48256
57	0,83867	0,54464	1,53986
58	0,84805	0,52992	1,60033
59	0,85717	0,51504	1,66428
60	0,86603	0,50000	1,73205
61	0,87462	0,48481	1,80405
62	0,88295	0,46947	1,88073
63	0,89101	0,45399	1,96261
64	0,89879	0,43837	2,05030
65	0,90631	0,42262	2,14451
66	0,91355	0,40674	2,24604
67	0,92050	0,39073	2,35585
68	0,92718	0,37461	2,47509
69	0,93358	0,35837	2,60509
70	0,93969	0,34202	2,74748
71	0,94552	0,32557	2,90421
72	0,95106	0,30902	3,07768
73	0,95630	0,29237	3,27085
74	0,96126	0,27564	3,48741
75	0,96593	0,25882	3,73205
76	0,97030	0,24192	4,01078
77	0,97437	0,22495	4,33148
78	0,97815	0,20791	4,70463
79	0,98163	0,19087	5,14455
80	0,98481	0,17365	5,67128
81	0,98769	0,15643	6,31375
82	0,99027	0,13917	7,11537
83	0,99255	0,12187	8,14435
84	0,99452	0,10453	9,51436
85	0,99619	0,08716	11,43010
86	0,99756	0,06976	14,30070
87	0,99863	0,05234	19,08110
88	0,99939	0,03490	28,63630
89	0,99985	0,01745	57,29000

INDICAÇÕES DE LEITURA PARA OS ESTUDANTES

- DOXIADIS, Apostolos. *Tio Petros e a conjectura de Goldbach*: Um romance sobre os desafios da Matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora 34, 2010.
- GUELLI, Oscar. *Dando corda na Trigonometria*. São Paulo: Ática, 2000.
- IMENES, Luiz M.; JAKUBO, José; LELLIS, Marcelo. *Geometria*. 16. ed. São Paulo: Atual, 1992. (Col. Pra que Serve a Matemática?)
- PERELMANN, I. *Aprenda Álgebra brincando*. Curitiba: Hemus, 2001.
- SZPIRO, George G. *A vida secreta dos números*: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. São Paulo: Difel, 2008.
- TAHAN, Malba. *Matemática divertida e curiosa*. Rio de Janeiro: Record, 2016.
- VALLADARES, Renato J. Costa. *O jeito matemático de pensar*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAIRRAL, Marcelo; POWELL, Arthur. *A escrita e o pensamento matemático*. Campinas: Papirus, 2015.
- BARBIER, Jean-Marie. *Elaboração de projectos de acção e planificação*. Porto: Porto, 1993.
- BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A matemática através dos tempos*. São Paulo: Blucher, 2010.
- BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos lógicos*. Lisboa: Gradiva, 1991.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian de Godói. *Informática e educação*. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. (Col. Tendências em educação matemática.)
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. São Paulo: Blucher, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. Volume 2.
- _____. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares do Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.
- _____. *PCN+ Ensino Médio*: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- _____/Diretoria de concepção e orientações curriculares para a Educação Básica/Coordenação geral de Ensino Médio. *Ensino Médio Inovador*, 2009. Disponível em: <portal.mec.gov.br/dmdocuments/ensino_medioinovador.pdf>. Acesso em: 17 maio 2016.
- BUSHAW, Donald et al. *Aplicações da Matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.
- COSTA, Sérgio Francisco. *Introdução ilustrada à Estatística*. São Paulo: Harbra, 2013.
- COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (orgs.). *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.
- FONSECA, Maria da Conceição Ferreira (org.). *Letramento no Brasil*: habilidades matemáticas. São Paulo: Global, 2004.
- GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Porto Alegre: Artmed, 1995.
- KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (Orgs.). *A resolução de problemas na Matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.
- LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Orgs.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.
- NEVES, Iara C. B. et al. (Orgs.). *Ler e escrever, compromisso de todas as áreas*. Porto Alegre: Ed. da UFRGS, 2011.
- PERRENOUD, Philippe. *As 10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- PIRES, Célia M. C. *Currículos de Matemática*: da organização linear à ideia de rede. São Paulo: FTD, 2000.
- POZO, Juan Ignacio (Org.). *A solução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- SMOLE, Kátia C. S.; DINIZ, Maria Ignez (Orgs.). *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- STRASBURGER, Victor C. *Os adolescentes e a mídia*. Porto Alegre: Artmed, 1999.
- TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria Manuela. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Col. Tendências em Educação Matemática.)

SIGNIFICADO DAS SIGLAS

Cefet-MG — Centro Federal de Educação Tecnológica (Minas Gerais)	UFBA — Universidade Federal da Bahia
Cefet-PR — Centro Federal de Educação Tecnológica (Paraná)	UFC-CE — Universidade Federal do Ceará
Enem-MEC — Exame Nacional do Ensino Médio — Ministério da Educação e Cultura	UFF-RJ — Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro)
ESPM-SP — Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)	UFJF-MG — Universidade Federal de Juiz de Fora (Minas Gerais)
Fatec-SP — Faculdade de Tecnologia de São Paulo	UFMA — Universidade Federal do Maranhão
FEI-SP — Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)	UFMG — Universidade Federal de Minas Gerais
FOC-SP — Faculdades Oswaldo Cruz (São Paulo)	UFOP-MG — Universidade Federal de Ouro Preto (Minas Gerais)
Fuvest-SP — Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)	UFPE — Universidade Federal de Pernambuco
ITA-SP — Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)	UFPI — Universidade Federal do Piauí
Mack-SP — Universidade Presbiteriana Mackenzie (São Paulo)	UFRGS — Universidade Federal do Rio Grande do Sul
OBMEP — Olimpíadas Brasileiras de Matemática da Escola Pública	UFRJ — Universidade Federal do Rio de Janeiro
PUC-MG — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais	UFRN — Universidade Federal do Rio Grande do Norte
PUC-PR — Pontifícia Universidade Católica do Paraná	UFSCar-SP — Universidade Federal de São Carlos (São Paulo)
PUC-RJ — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro	UFSE — Universidade Federal de Sergipe
PUC-SP — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	UFSM-RS — Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
PUCC-SP — Pontifícia Universidade Católica de Campinas (São Paulo)	UFU-MG — Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
UA-AM — Universidade do Amazonas	UFV-MG — Universidade Federal de Viçosa (Minas Gerais)
UCDB-MS — Universidade Católica Dom Bosco (Mato Grosso do Sul)	UMC-SP — Universidade de Mogi das Cruzes (São Paulo)
UECE — Universidade Estadual do Ceará	Umesp-SP — Universidade Metodista de São Paulo
UEM-PR — Universidade Estadual de Maringá (Paraná)	Unesp-SP — Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (São Paulo)
UEPA — Universidade do Estado do Pará	Unicamp-SP — Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
UFAL — Universidade Federal de Alagoas	Unifor-CE — Universidade de Fortaleza (Ceará)
	Unopar-PR — Universidade Norte do Paraná
	Vunesp-SP — Fundação para o Vestibular da Unesp (São Paulo)

Respostas

UNIDADE 1 – CAPÍTULO 1

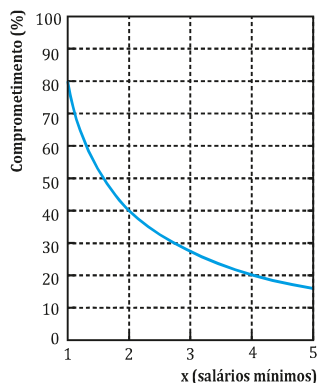
FAZER E APRENDER

- a) 30 c) 0,4 e) 43,05
b) 7,5 d) 34,8 f) 0,75
- b
- 46 667 habitantes.
- 2,85 salários mínimos ou resposta de acordo com o valor do salário mínimo vigente.
- Respostas pessoais.
- 1,63 na moeda local.
- b
- c
- a
- d
- d
- c
- d
- Resposta pessoal.
- R\$ 3 540,00
- R\$ 440,00
- 14 meses ou 1 ano e 2 meses.
- b

Lucro = Valor das vendas – Investimento inicial

Lucro na venda de x camisetas: $y = 8 \cdot x - 320$, que corresponde ao gráfico que passa pelos pontos $(0, -320)$ e $(40, 0)$, ou seja, o gráfico b .

- R\$ 25,00
- d
- e
- a
- a
- a) R\$ 21 883,12 b) R\$ 19 038,32
- R\$ 2 528,41
- 4 meses.
- Com uma taxa de 6,5%, João receberá mais do que pretende em 8 meses. Uma boa taxa seria de 5,24%.
- R\$ 19 544,88
- 25% a.m.
- 8,24%
- A resolução de Pedro está correta.
- e
- a) 61 anos ou mais. b) $C(x) = 0,8/x$



- Fibonacci: $2^{20} - 1$ denários.
Tartaglia: 11% ao ano de juros simples ou 8% ao ano de juros compostos.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 23)

- 24 garrafas.
- 7 exercícios.
- 4

APRENDER A APRENDER (P. 24)

- Respostas pessoais.
- $D(h) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2} \right\} = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$
- a) R\$ 8,00 b) R\$ 2 000,00
- Vela A: 8 cm
Vela B: 6 cm

CÁLCULO RÁPIDO (P. 25)

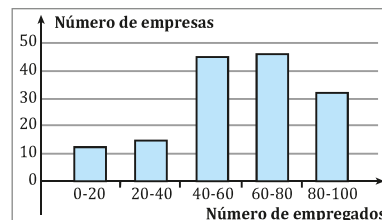
- a) 300 b) 45 c) 1275
- a) 90 c) 897 e) 30
b) 71,2 d) 75
- a) 18 bombons. c) 204,3 g
b) Paulo.
- a) 200 c) 16
b) 20 d) 150
- a) 0,4; 0,04; 0,004
b) 0,004; 0,0004; 0,00004
c) 6,4; 0,64; 0,064
d) 0,101; 0,0101; 0,00101
e) 13; 1,3; 0,13
f) 1,02; 0,102; 0,0102
g) 0,04; 0,004; 0,0004
h) 10,2; 1,02; 0,102
i) 0,64; 0,064; 0,0064
- a) 40; 400; 4000
b) 0,4; 4; 40
c) 640; 6400; 64000
d) 10,1; 101; 1010
e) 1300; 13000; 130000
f) 102; 1020; 10200
g) 4; 40; 400
h) 1020; 10200; 102000
i) 64; 640; 6400
- a) 1,5494 d) 15 494
b) 154,94 e) 15,494
c) 0,15494 f) 154,94
- a) 0,6 c) 0,04
b) 0,06 d) 0,04

UNIDADE 1 – CAPÍTULO 2

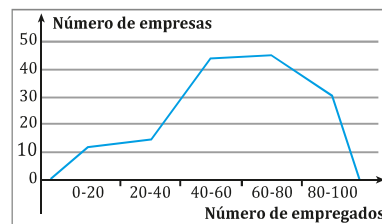
FAZER E APRENDER

- Respostas pessoais.
- a) Discreta.
b) Discreta.
c) Contínua.
d) Discreta.
e) Contínua.

- a) Meios de transporte de cargas no Brasil.
b) Matriz de transporte de cargas no Brasil.
c) 25%
d) 37 521,92 km
e) Resposta pessoal.
- a) $1622 + 604 + 330 + 313 + 344 + 123 + 27 = 3363$
(3 363 milhões de internautas)
b) 35% de 204 milhões de pessoas é o mesmo que 71,4 milhões de pessoas; 71,4 milhões de pessoas no total de 3 363 milhões corresponde a 2,12% ou seja, em novembro de 2015, os brasileiros internautas correspondiam a aproximadamente 2% dos internautas no mundo.
- a) Consiste em uma estimativa do número médio de filhos que uma mulher tem ao longo da vida.
b) Em 1960 e, provavelmente após 2010, segundo a projeção.
c) Aproximadamente 5 filhos.
d) Resposta pessoal.
- Alternativa c, pois é a única que envolve o grupo D, cujo número de filhos não está especificado. Logo, não podemos tirar conclusões sobre esse grupo.
- e
- b
- e
- Histograma



Polígono de frequência

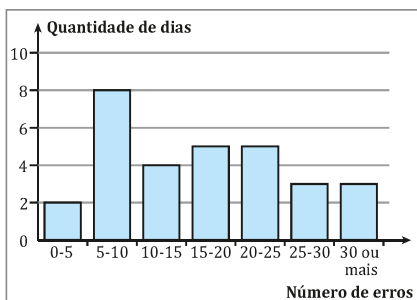


Imagens: BIS

- a) e b)

Quantidade de erros	Número de dias	Fr (%)
0 + 5	2	6,66
5 + 10	8	26,67
10 + 15	4	13,33
15 + 20	5	16,67
20 + 25	5	16,67
25 + 30	3	10
30 ou mais	3	10

c)



12. Média \approx 33 anos
Moda = 35 anos
Mediana = 35 anos
13. a) Até 3 salários. c) Até 3 salários.
b) Média \approx 4,4 salários
14. a) Média das idades = 16,6 anos b) 50%
15. V, V, F, V, F
16. e
17. Pode ser respondido o item c.
c) Média $\frac{\text{Notas das moças}}{5} = 7,2$
18. Média das notas: 6
19. Salário mediano: até 4 salários. Moda: até 4 salários.
20. I. d

II. As alternativas a e e são absurdas, porque se o maior número é 24 e os outros são menores, a média não pode ser 24. Se o maior dos números é 120 e os outros são números distintos, a soma deles é maior que 120 e a média será maior que 24.

21. b

22. a)

Salário (em reais)	Frequência (nº de empregados)
4 700 – 5 100	20
5 100 – 5 500	110
5 500 – 5 900	170
5 900 – 6 300	120
6 300 – 6 700	30
Total	450

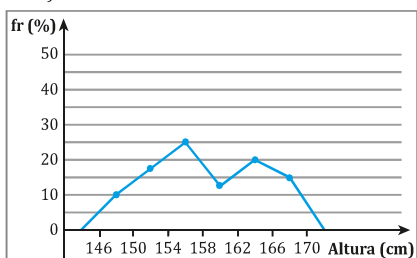
- b) 130 entrevistados.
c) Média \approx R\$ 5 727,00
Moda = R\$ 5 700,00
Mediana = R\$ 5 700,00

23. a) Média \approx 56
Moda = 45
Mediana = 48
b) Resposta pessoal.

24. a)

Altura (cm)	Ponto médio	f	fr (%)
146 – 150	148	4	10
150 – 154	152	7	17,5
154 – 158	156	10	25
158 – 162	160	5	12,5
162 – 166	164	8	20
166 – 170	168	6	15

b)



- c) 26 estudantes têm altura até 1,62 m e 40 estudantes têm altura até 1,70 m.

d) Média \approx 158 cm
Moda = 156 cm
Mediana = 156 cm

25. a) Aproximadamente 76,8.
b) Não; a maioria dos diretores, 4 entre 5, se responsabiliza por menos do que \bar{X} funcionários. Todos os diretores discordarão da afirmação feita.
c) Porque o valor de \bar{X} difere bastante da quantidade de funcionários sob responsabilidade de qualquer um dos 5 diretores. A mudança deveria ser: distribuir o número de funcionários dos diretores A, B, C e D de modo a diminuir o número de funcionários do diretor E até esse valor se aproximar de \bar{X} .
26. a) Atleta A: $\bar{X} = 470$; Me = 469
Atleta B: $\bar{X} = 470,25$; Me = 470,5
Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.
c) Não, pois o desempenho de um atleta depende de diferentes fatores.
27. a) 12
b) 6
c) Sim, porque, embora o atleta A tenha melhor desempenho, ele é menos “constante” em seus resultados.

28. a)

	Média
Estudante A	10
Estudante B	10
Estudante C	10
Estudante D	10

b)

	Amplitude	Variância	Desvio padrão
Estudante A	0	0	0
Estudante B	4	4	2
Estudante C	20	52	7,21
Estudante D	20	100	10

- c) O estudante A possui mais regularidade nas notas e o estudante D é o mais irregular, apesar de todos apresentarem a mesma média.

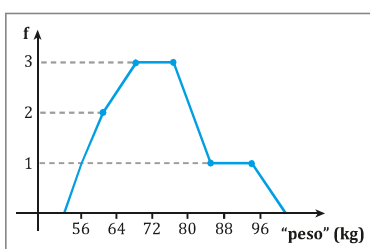
29. Resposta pessoal.
30. a) $\bar{X} = 5$; DP = 1 b) $\bar{X} = 5$; DP = 2
31. $\bar{X} = 5$; DP = 2,16
32. a) $\bar{X} = 12$; DP = 5,74
b) Que as notas dos 10 estudantes são mais próximas da média, são mais regulares.
c) Resposta pessoal.

33. As moças têm altura de $(1,63 \pm 0,05)$ m e os rapazes, $(1,77 \pm 0,05)$ m, em média.

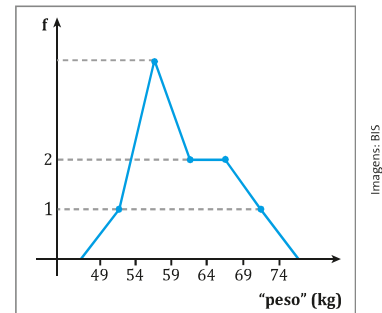
34. a) $\bar{X}_{\text{maridos}} \approx 72$; $S_{\text{maridos}} \approx 11$
 $\bar{X}_{\text{esposas}} \approx 60$; $S_{\text{esposas}} \approx 6$

A maior dispersão ocorre na distribuição dos maridos.

- b) Polígono de frequência correspondente ao “peso” dos maridos:



Polígono de frequência correspondente ao “peso” das esposas:



Imagens: BIS

- c) O das esposas, pois há menor dispersão em relação à média.

35. a)

Classes	f
32 – 36	1
36 – 40	4
40 – 44	10
44 – 48	7
48 – 52	2

- b) $\bar{X} \approx 42$; $V \approx 15$ c) DP ≈ 4

36. 01, 02, 08, 16

37. c

38. a) 2 032 b) 1,8%

39. d

CÁLCULO RÁPIDO (P. 48)

1. a) 0,23 c) 0,003
b) 0,35 d) 0,125
2. a) 350% c) 103%
b) 57% d) 3%
3. a) 10% d) 25%
b) 1% e) 20%
c) 1%
4. a
5. a) 270 c) 180 e) 36
b) 15 d) 30 f) 63

FOCO NA TECNOLOGIA –

CALCULADORA (P. 49)

1. $\bar{X} = 16$
2. a) 14 114

b)

Número de filhos	fr (%)	fa
0	38,4	38,4
1	25,1	63,6
2	22,1	85,6
3	9,4	95,0
4	3,0	98,0
5	1,1	99,1
6 ou mais	0,9	100

- c) $\bar{X} \approx 1$
d) DP = 1,26; V = 1,6.

APRENDER A APRENDER (P. 50)

1. Resposta pessoal.
2. a) $f(x) = 2x + 2$
b) $]-\infty, -1[: g(x) < 0$
 $]-1, 3[: g(x) > 0$
 $]3, +\infty[: g(x) < 0$
Para $x = -1$ ou $x = 3$: $g(x) = 0$
c) Para $x \geq -1$
3. 2,76 m
4. A = 48 u. a.
5. 50 m²
6. Soma: 01 + 04 + 16 = 21

UNIDADE 1 – CAPÍTULO 3

FAZER E APRENDER

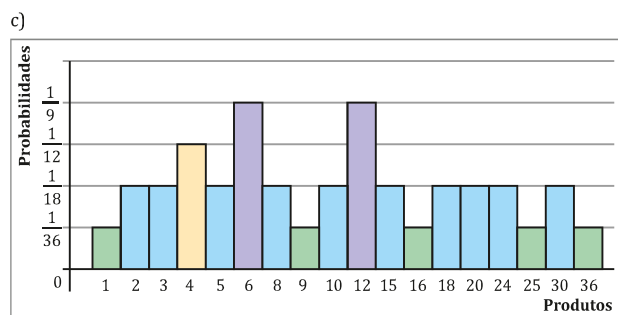
- Evento pouco provável.
 - Evento muito provável.
 - Evento certo.
 - Evento impossível.
- Respostas pessoais.
- $\frac{1}{12}$
 - $\frac{1}{2}$
 - 0
 - 1

Resposta pessoal.
- 25%
 - Aproximadamente 8%.
 - 50%
 - Aproximadamente 70%.
- Respostas pessoais.

6. a)

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

b) $\frac{1}{18} \approx 5,6\%$



Menor probabilidade: 1, 9, 16, 25 e 36.

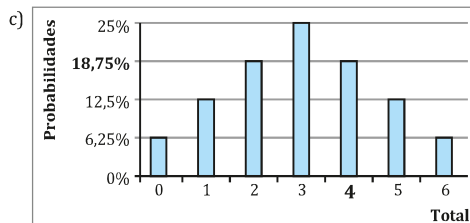
Mayor probabilidade: 6 e 12.

7. a)

1º jogador	2º jogador	Total
0	0	0
0	1	1
1	0	1
0	2	2
1	1	2
2	0	2
0	3	3
1	2	3
2	1	3
3	0	3
1	3	4
2	2	4
3	1	4
2	3	5
3	2	5
3	3	6

b)

Evento	Probabilidade
0	$\frac{1}{16} = 6,25\%$
1	$\frac{1}{8} = 12,5\%$
2	$\frac{3}{16} = 18,75\%$
3	$\frac{1}{4} = 25\%$
4	$\frac{3}{16} = 18,75\%$
5	$\frac{1}{8} = 12,5\%$
6	$\frac{1}{16} = 6,25\%$



8. a)

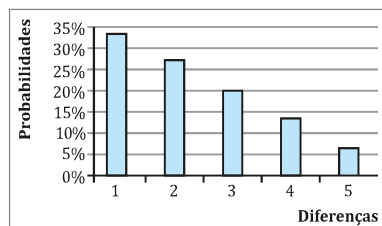
	-	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5	
2	1	0	1	2	3	4	
3	2	1	0	1	2	3	
4	3	2	1	0	1	2	
5	4	3	2	1	0	1	
6	5	4	3	2	1	0	

b) $\frac{4}{15} \approx 26,7\%$

c) 1

d)

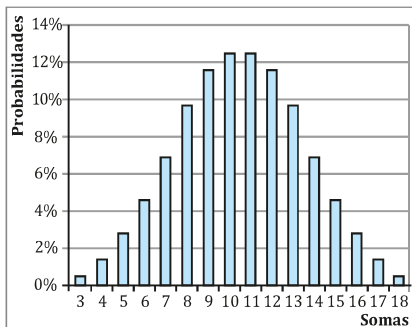
Diferença	Probabilidade
1	$\frac{1}{3} = 33,3\%$
2	$\frac{4}{15} = 26,7\%$
3	$\frac{1}{5} = 20\%$
4	$\frac{2}{15} = 13,3\%$
5	$\frac{1}{15} = 6,7\%$



9. a) 16

b)

Soma	Probabilidade
3	$\frac{1}{216} = 0,5\%$
4	$\frac{1}{72} = 1,4\%$
5	$\frac{1}{36} = 2,8\%$
6	$\frac{5}{108} = 4,6\%$
7	$\frac{5}{72} = 6,9\%$
8	$\frac{7}{72} = 9,7\%$
9	$\frac{25}{216} = 11,6\%$
10	$\frac{1}{8} = 12,5\%$
11	$\frac{1}{8} = 12,5\%$
12	$\frac{25}{216} = 11,6\%$
13	$\frac{7}{72} = 9,7\%$
14	$\frac{5}{72} = 6,9\%$
15	$\frac{5}{108} = 4,6\%$
16	$\frac{1}{36} = 2,8\%$
17	$\frac{1}{72} = 1,4\%$
18	$\frac{1}{216} = 0,5\%$



c) O jogador A, porque a probabilidade de ocorrerem somas favoráveis a ele é de 57,9%.

d) Resposta pessoal.

10. a)

Idade	Nº de pessoas	Fr
0-9	1 569 000	15%
10-19	1 778 200	17%
20-29	1 663 140	15,9%
30-39	1 349 340	12,9%
40-49	1 171 520	11,2%
50-59	1 161 060	11,1%
60-69	920 480	8,8%
≥ 70	847 260	8,1%
Total	10 460 000	100%

b) 10320; 38320

11. a) 10%; 13% b) 10 h 48 min

12. a) 80 nadadores. b) 10%

13. e 14. a

15. a) 16 b) 1,1

16. 14%

17. a) 4 lâmpadas.

b) Aproximadamente 1,81.

c) Aproximadamente 68% pela curva de Gauss.

d) Resposta pessoal.

18. a) $\bar{X} = 3$; DP = 2 c) 13,3%; 33,3%

b) 60% d) Menos de 4 filhos.

19. Na primeira, pois há menor concentração dos dados em torno da média.

20. a) 45

b) O intervalo $]30, 60[$ parece corresponder ao intervalo $[\bar{X} - 2DP, \bar{X} + 2DP]$ com 69% da distribuição. Desse modo, temos $]45 - 2 \cdot 7,5, 45 + 2 \cdot 7,5[$, ou seja, o desvio padrão parece ser 7,5.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 70)

1. O amarelo ia para a Zona Sul com 30 ocupantes, o vermelho ia para a Zona Leste com 15 ocupantes e o branco ia para a Zona Norte com 5 ocupantes.

FOCO NA TECNOLOGIA – CALCULADORA (P. 70)

1. a) 3 c) 0,2 e) -3
b) 3 d) -0,25 f) -0,25

CÁLCULO RÁPIDO (P. 70)

1. 3 000 litros. 3. 30%
2. 25% 4. R\$ 72,00
5. a) R\$ 300,00 b) 20% c) Não.

APRENDER A APRENDER (P. 71)

1. a) $S = \{-1, 1, -1\}$
Sistema possível e determinado.
b) $S = \{-4, 3, 1\}$
Sistema possível e determinado.

c) $x = -2$ e $y = -1$

Sistema possível e determinado.

d) $x = -1, y = 1$ e $z = 2$

Sistema possível e determinado.

2. a) Sistema impossível.

b) Sistema possível e indeterminado.

3. $m \neq \frac{13}{2}$

4. a) Cleonice.

$$b) \begin{cases} x + y + 25 = 150 \\ x + 45 = y + 70 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 125 \\ x - y = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 75 \\ y = 50 \end{cases}$$

Logo: 100 estudantes acertaram a questão de álgebra e 75 estudantes acertaram a questão de geometria.

5. a) Clarice: R\$ 20 000,00; Ester: R\$ 50 000,00; Ivo: R\$ 30 000,00.

b) 60%

6. a) x: cebolas grandes

y: cebolas pequenas

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ 200x + 25y = 1700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 36 \end{cases}$$

b) $384\pi \text{ cm}^2$. O menor desperdício ocorre com as cebolas grandes.

7. d

8. R = R\$ 4 820,00

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 74)

1. e

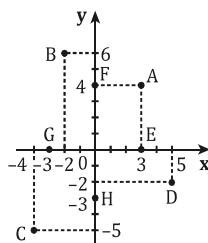
2. e

3. d

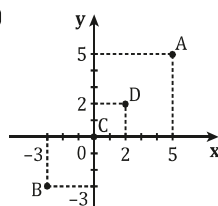
UNIDADE 2 – CAPÍTULO 4

FAZER E APRENDER

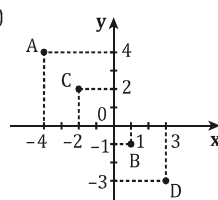
1.



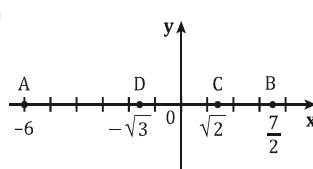
2. a)



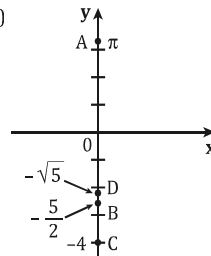
b)



c)



d)



3. a) $x_B = x_C = x_D = 3$ b) $y_B = y_C = y_D = -5$

4. 2º quadrante: $x < 0$ e $y > 0$

4º quadrante: $x > 0$ e $y < 0$

5. a) $m = 0$ c) $m < 0$ e) $m = -5$

b) $m > 0$ d) $m = 5$ f) $\neq m$

6. a) $n = 0$ c) $n < 0$ e) $n = 2$

b) $n > 0$ d) $n = -2$ f) $\neq n$

7. a) $m = \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ c) $m = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

b) $m = (4, -2)$

8. a) $Q(13, 6)$ b) $Q(10, 8)$

9. $(5, 4); \left(\frac{7}{2}, 7\right); \left(\frac{13}{2}, 1\right)$

10. $M(2, -4), N(-1, 1), P(-2, 2), G_1\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right); G_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

11. $A(1, 2), B(-3, 4)$ e $C(5, 8)$.

12. $C(0, 2)$ e $G(-1, 0)$.

13. $G(4, 4)$

14. e

15. a) 5 c) $\sqrt{61}$ e) 13

b) 10 d) $\sqrt{218}$ f) $5\sqrt{2}$

16. a) Escaleno. c) Isósceles.

b) Escaleno.

17. a) $5 + 3\sqrt{5}$ c) $\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

b) $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{13}$

18. a) $P(-5, 0)$ ou $P(1, 0)$. c) $P\left(\frac{18}{7}, -\frac{18}{7}\right)$

b) $P(0, 28)$ ou $P(0, -2)$.

19. a) $\overline{AB} = \overline{CD}$ c) $\overline{AC} = 5$ e $\overline{BD} = 13$.

b) $\overline{BC} = \overline{AD}$

20. a) $(2, 2)$ ou $(10, 10)$. b) $r = 2$ ou $r = 10$.

21. $(0, 2)$ ou $(0, 10)$.

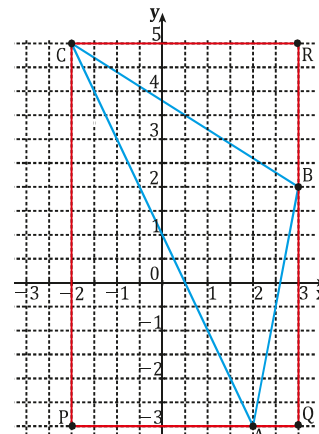
22. b

23. Os pontos fixos são $A(-1, -1)$ e $B(-6, -6)$ e a distância entre eles é $5\sqrt{2}$.

24. a) 14 b) 12 c) 26

25. Resposta possível:

Plotar os três pontos em um sistema de coordenadas cartesianas e calcular as áreas das figuras formadas.



$$\begin{aligned} A_{ABC} &= A_{PQRC} - A_{APC} - A_{AQB} - A_{BRC} = \\ &= 5 \times 8 - \frac{4 \times 8}{2} - \frac{1 \times 5}{2} - \frac{5 \times 3}{2} = \\ &= 40 - 16 - 2,5 - 7,5 = 14 \end{aligned}$$

Imagens: BIS

26. 20

27. a) $C\left(\frac{9}{2}, 0\right)$ ou $C\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.
 b) $C(0, -9)$ ou $C(0, -1)$.
 c) $C(1, 1)$ ou $C(9, 9)$.
 d) $C(3, -3)$ ou $C\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
 e) $C(6, 3)$ ou $C\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
 f) $\nexists \triangle ABC$

28. a) Não. b) Sim.
 29. a) $m = -1$ c) Não existe m .
 b) $m = 4$
 30. a) $P\left(\frac{37}{3}, 0\right)$ d) $P\left(-\frac{111}{7}, \frac{111}{7}\right)$
 b) $P\left(0, \frac{111}{16}\right)$ e) $P\left(\frac{111}{41}, \frac{222}{41}\right)$
 c) $P\left(\frac{111}{25}, \frac{111}{25}\right)$ f) $P(-9, 12)$

31. $P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

32. b

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 88)

1. Todas as lâmpadas.
 2. Cláudio.
 3. b

APRENDER A APRENDER (P. 89)

1. a) $x = 4$ cm
 b) $x = 6\sqrt{3}$ cm e $y = 3\sqrt{3}$ cm.
 c) $x = 3$ cm e $y = 3\sqrt{3}$ cm.
 d) $x = 2\sqrt{2}$ cm
 2. Aproximadamente 9 m de altura.
 3. Aproximadamente 87 m.
 4. $x = 10$
 5. a) $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $\tan \theta = 2\sqrt{2}$.
 b) $a = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ e $b = \frac{2}{3}$.
 6. $27\sqrt{2}$ cm³

FOCO NA TECNOLOGIA – CALCULADORA (P. 90)

1. Aproximadamente 0,63 km.
 2. 44 735 386 habitantes (segundo dados do IBGE em 28/05/2016).

CÁLCULO RÁPIDO (P. 90)

1. a) $M(2, 3)$ c) $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$ e) $M(1, -2)$
 b) $M(2, 5)$ d) $M(2, -2)$ f) $M(1, 0)$
 2. a) 4 c) 6 e) 7
 b) 6 d) 8 f) 8
 3. a) Lado \overline{BC} . b) Área do $\triangle ABC$.
 4. a) -3 c) 1 e) 1
 b) $\frac{13}{3}$ d) $\frac{8}{3}$
 5. a) $x = 8$ c) $x = -2$ e) $x = -2$
 b) $x = 16$ d) $x = -9$ f) $x = 8$

UNIDADE 2 – CAPÍTULO 5

FAZER E APRENDER

1. a) $4x - 5y + 13 = 0$ d) $x - 6 = 0$
 b) $5x + 8y - 22 = 0$ e) $y + 2 = 0$
 c) $2x + y = 0$
 2. a) $x - y = 0$ c) $y = 0$
 b) $x + y = 0$ d) $x = 0$
 3. a

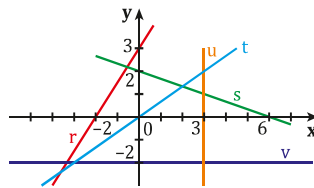
4. a) $x - 2y + 5 = 0$ b) $4x + y - 7 = 0$

5. $(6, 5)$ ou $(1, 0)$.

6. $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$

7. a) $\left(-1, \frac{14}{3}\right)$ c) $(6, 0)$ e) $\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$
 b) $(-3, 6)$ d) $(0, 4)$ f) $(-12, 12)$

8. b
 9.



10. $C(1, -1)$ ou $C(-2, -10)$.
 11. a) $y + 4 = 0$ b) $x - 6 = 0$
 12. $A \in r$; $B \notin r$; $C \in r$; $D \in r$; $E \notin r$
 13. a) $k = 0$; $2y + 1 = 0$ c) $k = 2$
 b) $k = -2$; $2x - 1 = 0$
 14. a) Concorrentes. c) Coincidentes.
 b) Paralelas.
 15. $(4, 5)$
 16. $(1, 2)$, $(-1, -2)$ e $(-3, 4)$.

17. $k = \frac{9}{32}$

18. a) Para $m = 6$: $r \parallel s$.

Para $m \neq 0$ e $m \neq 6$: r e s são concorrentes.

- b) Para $m = \frac{1}{2}$ ou $m = -1$: $r \parallel s$.

Para $m \neq \frac{1}{2}$ e $m \neq -1$: r e s são concorrentes.

- c) Para $m = 1$ ou $m = -1$: r e s são coincidentes.
 Para $m \neq 1$ e $m \neq -1$: r e s são concorrentes.

19. $p = -2$ e $q = 4$.

20. \overline{AB} : $x - 2y + 15 = 0$

- \overline{BC} : $2x + y - 10 = 0$

- \overline{CD} : $x - 2y = 0$

- \overline{DA} : $2x + y - 5 = 0$

21. A de maior inclinação é $y = 4x - 11$, pois $m = 4 = \tan \theta$ e, quanto maior $\tan \theta$, maior é θ para $0 \leq \theta < 90^\circ$.

22. As ordenadas formarão uma P.A. de razão -6 .

23. a) 2 b) $-\frac{5}{4}$ c) 0

24. a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $\nexists m$ d) 0

25. a) $y = \sqrt{3}x + 5$ d) $y = -x - 3$

- b) $y = x - 2$ e) $y = \sqrt{3}x$

- c) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ f) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$

26. a) $P\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$; $Q(0, b)$; $R\left(-\frac{b}{2b-2a}, \frac{(2b-a)b}{2b-2a}\right)$
 b) $a = -8$, $b = 4$ e $c = 16$.

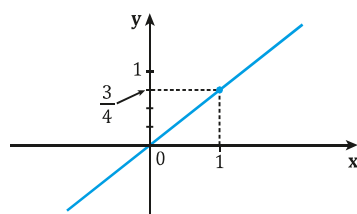
27. $x - y + 6 = 0$

28. a

29. c

30. $\sqrt{3}x - 3y + 4\sqrt{3} = 0$

31. a) $y = \frac{3}{4}x = 0,75x$



- b) $\theta \approx 37^\circ$

32. a) Paralelas.

- c) Paralelas.

- b) Concorrentes.

33. a) $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$

- c) $y = 4$

- b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$

- d) $y = \frac{2}{3}x - 8$

34. $y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$; $y = -\frac{3}{2}x$

35. $k = 15$

36. $k \neq 2$ e $k \neq -2$.

37. d

38. $B(8, 4)$; $C(9, 9)$; $D(1, 5)$

39. a) Perpendiculares.

- c) Concorrentes.

- b) Paralelas.

- d) Perpendiculares.

40. a) $y = -\frac{5}{4}x + \frac{11}{2}$

- c) $y = -6$

- b) $y = 2x - 8$

- d) $x = -2$

41. a) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$

- b) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$

42. $x - 2y + 9 = 0$

43. $h_{\overline{AB}}$: $y = x - 2$

- $h_{\overline{BC}}$: $y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$

- $h_{\overline{AC}}$: $y = -3x + 14$

44. $m_{\overline{AB}}$: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{6}$; $m_{\overline{BC}}$: $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}$

45. c

46. F, V, V, F, V

47. a) $y - 2 = m(x - 3)$, $m \in \mathbb{R}$ ou $x = 3$

- b) Sim.

- c) $c = -5$

48. a) $x = -4$

- c) $y = x - 1$

- b) $y = -5$

- d) $y = \frac{5}{4}x$

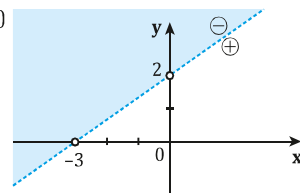
49. a) $6x - y + 2 = 0$

- b) $(0, 0)$ e $(-1, -1)$.

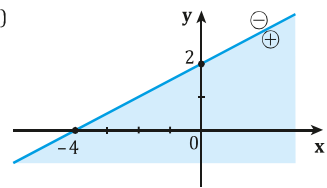
50. a) Se $a = 0$ ou $a = 1$, a reta passa por vários pontos que não dependem de a . Se $a \neq 0$ e $a \neq 1$, todas as retas passam pelo ponto $(1, 3)$.

- b) $a = -1$

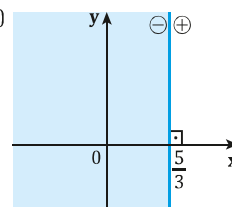
51. a)



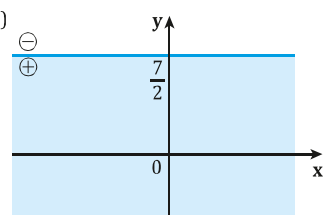
- b)



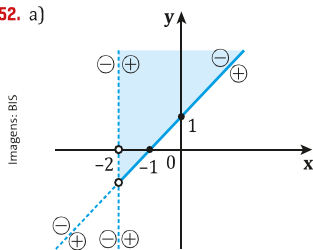
- c)



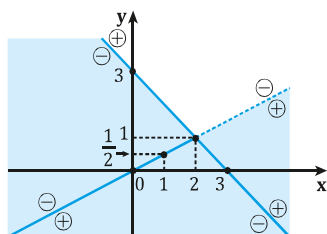
- d)



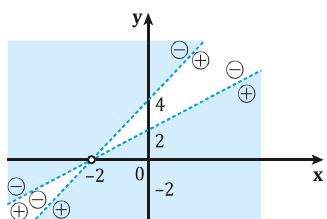
52. a)



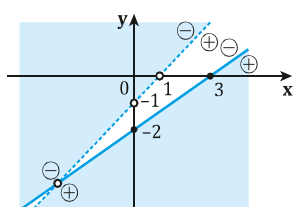
b)



53. a)



b)



54. a) $\frac{2}{3} < k < \frac{3}{2}$ b) $k < \frac{2}{3}$ ou $k > \frac{3}{2}$

55. e

CÁLCULO RÁPIDO (P. 115)

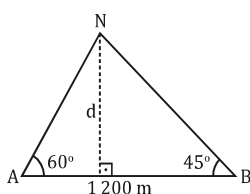
1. a) $4a^2 - b^2$ c) $4x^2 - 4y^2$
b) $9x^2 - 25$ d) $u^2 - v^2$
2. a) $x^2 + 14x + 49$ d) $25 - 10y + y^2$
b) $x^2 - 14x + 49$ e) $a^2 + 4a + 4$
c) $a^2 - 6a + 9$ f) $4x^2 - 24x + 36$
3. a) $1 - 20x + 100x^2$ d) $x^2 - 36$
b) $5x^2 + 14x - 3$ e) $a^2 - b^2$
c) $36x^2$ f) $4x^3 + 16x^2 + 16x$
4. a) $x = 3$ e $y = 1$. e) $x = 10$ e $y = 6$.
b) $a = -1$ e $b = -1$. f) $x = 3$ e $y = 9$.
c) $x = -3$ e $y = \frac{3}{2}$. g) $x = 8$ e $y = 4$.
d) $a = -2$ e $b = -9$. h) $a = 1$ e $b = 2$.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 116)

1. c 2. $\frac{1}{2}$ s por volta. 3. b

FOCO NA TECNOLOGIA – CALCULADORA (P. 116)

1. a)



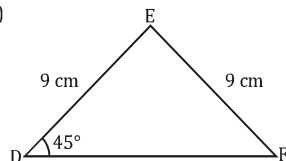
b) Aproximadamente 760,8 m.

2. a) $T = 6,52x - 109,50$ c) 14 m^3

b) Aproximadamente R\$ 4,19.

APRENDER A APRENDER (P. 116)

1. b)



c) A informação de que é um triângulo isósceles; as medidas dos lados DE e EF; a medida de um dos ângulos: $m(\hat{D}) = 45^\circ$.

d) Resposta pessoal.

e) $m(\overline{DF}) = 9\sqrt{2} \text{ cm}$

2. a) $\hat{A} = 30^\circ$; $a \approx 2,56$; $b = 5$

b) $\hat{C} = 68^\circ$; $b \approx 6,74$; $c \approx 9,79$

c) $\hat{A} \approx 74^\circ$; $\hat{C} \approx 56^\circ$; $c \approx 86,23$

d) $\hat{C} = 50^\circ$; $a \approx 7,64$

3. Aproximadamente 13,06 m.

4. a) $\alpha \approx 31^\circ$

b) Resposta pessoal.

5. $\overline{ML} = 8$; $\overline{JL} = 4$

6. A sede da fazenda fica a 115 m do transformador e a estufa, a 66,23 m.

7. $BD = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot p \cdot (\cos \gamma - \sin \gamma)}{\sin \gamma}$

8. b

9. $A_\Delta = 14,8 \text{ cm}^2$

10. $\alpha \approx 70^\circ$

11. $A_{EFGD} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$

12. a) $A_\Delta = 1,5x \text{ cm}^2$ b) $x \approx 4,4 \text{ cm}$

13. $c = 14 \text{ cm}$; $\hat{A} \approx 82^\circ$; $\hat{B} = 38^\circ$

14. a) $\hat{A} = 32^\circ$; $\hat{B} = 38^\circ$; $\hat{C} \approx 110^\circ$

b) $a \approx 10$; $\hat{B} = 35^\circ$; $\hat{C} = 105^\circ$

c) $\hat{A} = 22^\circ$; $\hat{B} = 50^\circ$; $\hat{C} \approx 108^\circ$

d) $c \approx 4,8$; $\hat{A} \approx 48^\circ$; $\hat{B} = 92^\circ$

15. $d = 20,5 \text{ m}$; $D \approx 25 \text{ m}$

16. $x = 2\sqrt{7} \text{ m}$

17. b

18. a

19. $h = 50 \cdot \sin 20^\circ$

UNIDADE 2 – CAPÍTULO 6

FAZER E APRENDER

1. • Traçando a circunferência de centro em **O** (central) e raio 5. Os pontos que pertencem a essa circunferência ou ao seu interior representam postos policiais que podem se comunicar diretamente com a central.

- Os pontos da circunferência de centro em **O** e raio 5.
- Os pontos do círculo de centro em **O** e raio 5.

2. a) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 9$

b) $(x+4)^2 + (y+2)^2 = 25$

c) $x^2 + (y-6)^2 = 1,44$

d) $(x+3)^2 + y^2 = 100$

e) $x^2 + y^2 = 20$

f) $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$

3. a) $C(5, 2)$ e $r = 4$.

b) $C(-4, -3)$ e $r = \sqrt{17}$.

c) $C(0, -5)$ e $r = 3$.

d) $C(5, 0)$ e $r = 2\sqrt{2}$.

e) $C(0, 0)$ e $r = \sqrt{37}$.

f) $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ e $r = \frac{5}{13}$.

4. a) $(2\sqrt{7}, 0)$ e $(-2\sqrt{7}, 0)$.

b) $(0, 14)$ e $(0, -2)$.

c) $(2\sqrt{15}, 4)$ e $(-2\sqrt{15}, 4)$.

d) $(-4\sqrt{3}, 10)$ e $(4\sqrt{3}, 2)$.

e) Não há pontos de abscissa 9 em **L**.

f) $(3 + \sqrt{23}, 3 + \sqrt{23})$ e $(3 - \sqrt{23}, 3 - \sqrt{23})$.

g) $(-3 + \sqrt{23}, 3 - \sqrt{23})$ e $(-3 - \sqrt{23}, 3 + \sqrt{23})$.

5. a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $(x-5)^2 + y^2 = 25$

c) $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$

d) $(x+5)^2 + y^2 = 25$

e) $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 25$

6. $\frac{\pi}{2}$

7. b

8. a) $\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{3}$ e 4.

b) $M(-2, \sqrt{3})$

d) $7\pi - 8\sqrt{3}$

$N(-2, -\sqrt{3})$

e) $2\sqrt{7}$

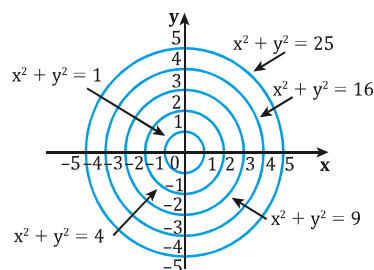
$Q(2, -\sqrt{3})$

9. Não, pois a cada **x** correspondem dois valores de **y**, ou seja, duas imagens.

10. a) Sim.

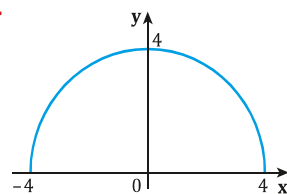
b) $D = [-2, 2]$

11.



12. a) 15 π b) 6,28; 12,56; 18,84; 25,12; 31,40

13.



$D = [-4, 4]$; $\text{Im} = [0, 4]$

14. $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 1$ (circunferência menor);

$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 10$ (circunferência maior)

15. a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 73$

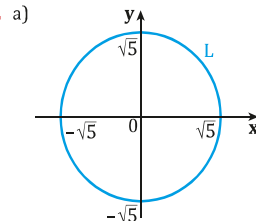
b) $(x+2)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

16. a) $k = 4 + 2\sqrt{5}$ ou $k = 4 - 2\sqrt{5}$.

b) $n = -\sqrt{15}$ ou $n = \sqrt{15}$.

c) $m \neq 8$ e $m \neq 0$.

17. a)



b) **A** ∈ **L**, **B** ∈ **L**, **C** e **D** são exteriores a **L** e **E** é interior a **L**.

c) Resposta pessoal.

18. a) **A** é interior a **L**, **B** é exterior a **L** e **C** está na circunferência **L**.

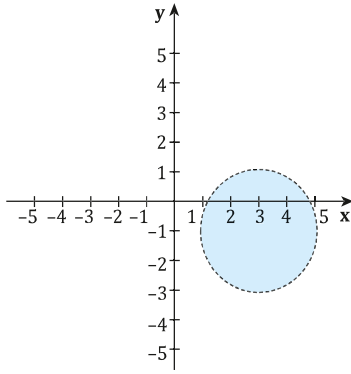
b) **A** está na circunferência **L**, **B** é interior a **L** e **C** é exterior a **L**.

19. a) $k < -4$ ou $k > 6$.

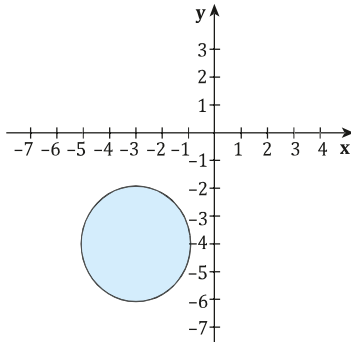
b) $-3 \leq k \leq 7$

20. a) Pontos internos à circunferência de centro (3, -1) e raio 2.

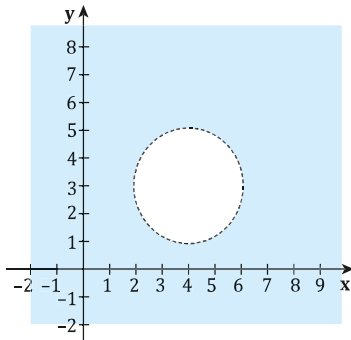
Imagens: BIS



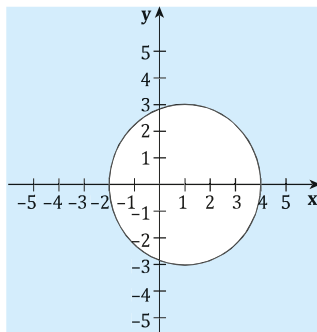
- b) Pontos internos e pontos do círculo de centro (-3, -4) e raio 2.



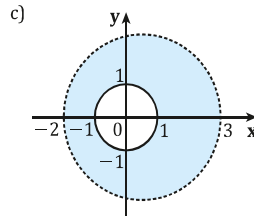
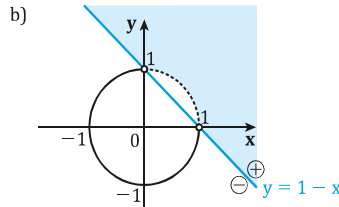
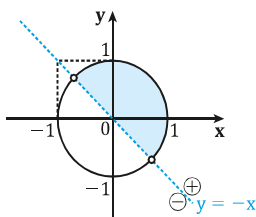
- c) Pontos exteriores à circunferência de centro (4, 3) e raio 2.



- d) Pontos exteriores à circunferência de centro (1, 0) e raio 3.

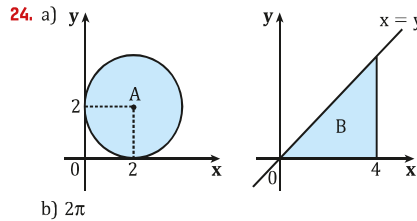


21. a)



22. a) P pertence à circunferência.
b) $y - 5 = \frac{8}{15}(x - 3)$ ou $x = 3$.

23. d



- b) 2π

25. c

26. L e p são secantes, L e s são tangentes, L e v são disjuntas.

27. p, s, v e w são tangentes a L.

28. a) (2, -4) e (-2, 0). c) L e s são disjuntas.
b) (1, 2) e (5, 10). d) $(-\frac{4}{5}, -\frac{12}{5})$

29. a) $m = \frac{3}{4}$ ou $m = -\frac{3}{4}$. c) $m < -\frac{3}{4}$ ou $m > \frac{3}{4}$.
b) $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$

30. 60 31. $2\sqrt{69}$

32. $3x - 4y - 1 = 0$ ou $3x - 4y - 21 = 0$.

33. c

34. a) $y = -x + 1$ c) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$
b) P(0, 1)

35. L₁ e L₂ são tangentes externas, L₁ e L₃ são tangentes internas, L₁ e L₄ são disjuntas, L₁ e L₅ são secantes, L₁ e L₆ são disjuntas, L₁ e L₇ são concêntricas.

36. a) (2, -1) e $(-\frac{11}{17}, -\frac{92}{17})$. b) $(\frac{47}{13}, \frac{38}{13})$ e (-5, -2).

37. $(x + 2)^2 + (y - 10)^2 = 100$ ou $(x + 2)^2 + (y - 10)^2 = 256$.

38. $x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$ ou

$$(x + 3)^2 + (y - \frac{9}{2})^2 = \frac{185}{4}.$$

39. a) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$

- b) Determinando os pontos de interseção de L e l e a reta que passa por eles.

- c) 20

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 135)

1. e

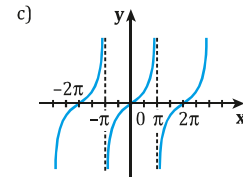
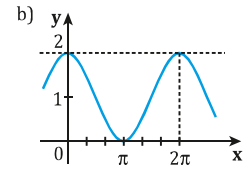
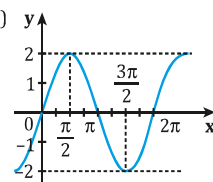
2. a) $h = \frac{45}{\pi}$ cm

- b) $V = \frac{135 - \pi}{3}$ mL

3. d

APRENDER A APRENDER (P. 136)

1. a)



2. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

3. -1

CÁLCULO RÁPIDO (P. 136)

1. a) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 1$
b) $y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$ e) $a^4 - 2a^2y + y^2$
c) $9 + 6a + a^2$ f) $36 - 12y + y^2$

2. a) $x^2 + 6x + 9 - x^2 - 7x = -x + 9$
b) $4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 + 8 = x^2 - 4x + 9$
c) $y^2 + 4y + 4 - y^2 - 8y - 16 + 4y + 12 = 0$
d) $16z^2 - 24z + 9 - 24z - 9 = 16z^2 - 48z$

3. a) $x^2 + 16x + 64$ f) $4x^2 - 81$
b) $x^2 - 16x + 64$ g) $p^2 + 2pq + q^2$
c) $x^2 - 64$ h) $p^2 - 2pq + q^2$
d) $4x^2 - 36x + 81$ i) $p^2 - q^2$
e) $4x^2 + 36x + 81$

4. a) $4x - 6$
b) $3x^2 - 12x - 2x + 8 = 3x^2 - 14x + 8$
c) $2x + 2$
d) $6x + 2$
e) $4x - 4$
f) $5x^2 + 15x - x - 3 = 5x^2 + 14x - 3$
g) $2x$
h) 12
i) $x^2 - 36$

5. a) $4x - 6$
b) $3x^2 - 4x - 6x + 8 = 3x^2 - 10x + 8$
c) $x^2 - 4x + 4 + 3x - 4 = x^2 - x$
d) $x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 24x + 16 = 10x^2 - 28x + 20$
e) $-5a - 13b$
f) $6a^2 + 9ab - 24ab - 36b^2 = 6a^2 - 15ab - 36b^2$
g) $a^2 - 8ab + 16b^2 - 6a - 9b$
h) $(a - 4b)^2 - (6a + 9b) =$
 $= a^2 - 8ab + 16b^2 - 6a - 9b =$
 $= a^2 - 6a - 8ab - 9b + 16b^2$

6. a) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
b) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
c) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
d) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

7. a) $\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$
b) $\sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$
c) $\sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$
d) $\sqrt{108} = 3\sqrt{12}$; certa, mas poderia ser $6\sqrt{3}$.
e) $\sqrt{279} = \sqrt{9 \cdot 31} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{31} = 3\sqrt{31}$
f) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$; certa.

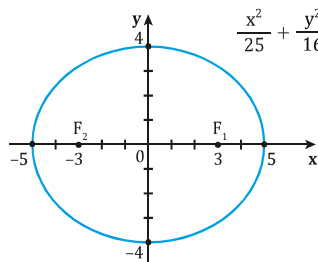
8. a) C(3, 4) e r = 5.
b) C(-6, 1) e r = 7.
c) C(0, 0) e r = $\sqrt{3}$.
d) C($-\frac{1}{5}, 0$) e r = 1.

UNIDADE 2 – CAPÍTULO 7

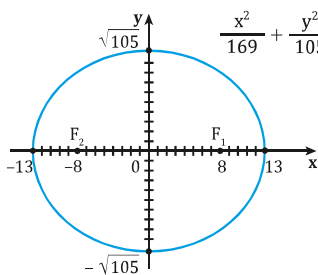
FAZER E APRENDER

1. a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

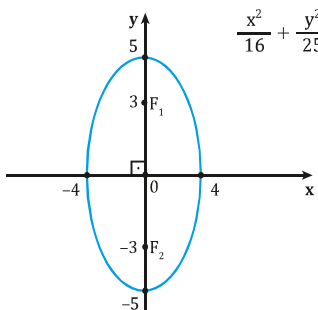
Imagens: B/S



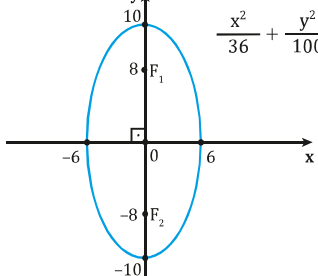
b) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{105} = 1$



c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$



d) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$



2. Não, pois P é exterior à elipse.

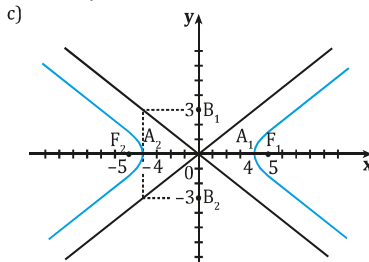
3. $\frac{x^2}{15} + \frac{3y^2}{5} = 1$ ou $\frac{9x^2}{55} + \frac{y^2}{55} = 1$.

4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 5. b 6. a

7. Porque a é o comprimento do semieixo focal. Se a = 0, temos uma reta. Se a = c, temos uma parábola.

8. Quanto maior a excentricidade da hipérbole, mais "fechada" ela será, ou seja, seus ramos estarão mais próximos do eixo focal.

9. a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $F_1(5, 0)$ e $F_2(-5, 0)$.



d) $s_1: 3x + 4y = 0$ e $s_2: 3x - 4y = 0$.

10. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ 11. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$

12. a) $F_1(\sqrt{2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{2}, 0)$; $x^2 - y^2 = 1$; $x - y = 0$ e $x + y = 0$; e = $\sqrt{2}$

b) $F_1(0, 5)$ e $F_2(0, -5)$; $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$; $4x - 3y = 0$ e $4x + 3y = 0$; e = $\frac{5}{4}$

c) $F_1(0, \sqrt{13})$ e $F_2(0, -\sqrt{13})$; $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$; $2x - 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$; e = $\frac{\sqrt{13}}{2}$

d) $F_1(-5, 0)$ e $F_2(5, 0)$; $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; $3x - 4y = 0$ e $3x + 4y = 0$; e = $\frac{5}{4}$

13. $(6, 2\sqrt{3})$ e $(-6, -2\sqrt{3})$.

14. $y = \frac{2}{x}$

15. a) $(y - 2)^2 = 8(x - 3)$

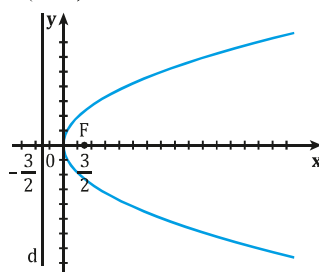
b) $(y + 1)^2 = -12(x + 2)$

c) $(x - 1)^2 = 4(y - 2)$

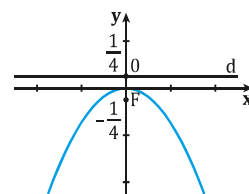
d) $(x + 2)^2 = -8(y + 3)$

16. a) $y^2 = 4x$ b) $x^2 = y$

17. a) $F(\frac{3}{2}, 0)$; d: $2x + 3 = 0$



b) $F(0, -\frac{1}{4})$; d: $4y - 1 = 0$

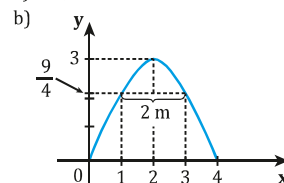


18. a) $V(2, -2)$; $F(2, -\frac{7}{4})$; d: $4y + 9 = 0$

b) $V(-2, 3)$; $F(-2, \frac{5}{2})$; d: $2y - 7 = 0$

19. Quando sua equação for da forma: $(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$.

20. a) A 2,25 m da base.

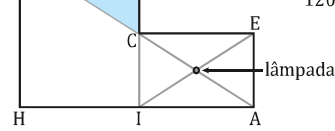


21. Ponto $(0, \frac{1}{4})$.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 153)

1. e

2. a) $\text{Área} = \frac{121}{120} \text{ m}^2$



b) Sim. A porta vai passar a 10 cm da cama.

CÁLCULO RÁPIDO (P. 154)

1. a) $x = 2$ d) $x = 0$ ou $x = -4$.

b) $x = 5$ e) $x = -3$ ou $x = 3$.

c) $x = -2$ f) Sem solução em \mathbb{R} .

2. b) $x = -1$ c) $x = 0$ d) $x = 1$

3. a) 0 b) 1 c) 0 d) 1

4. a) $12^3 = 1728$ c) $15^3 = 3375$

b) $(1,2)^3 = 1,728$ d) $(1,5)^3 = 3,375$

APRENDER A APRENDER (P. 154)

1. a) 1 980 cm³ b) 1 650 cm³

2. c 3. b 4. d

5. Resposta pessoal. $\frac{V_R}{V_B} = \frac{1}{4}$

6. a 7. b 8. b

9. $V = 46\,656 \text{ cm}^3$ 10. e

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 158)

1. e

2. b

UNIDADE 3 – CAPÍTULO 8

FAZER E APRENDER

1. a, c, d

2.

Polinômio	Nº de termos	Grau	Valor numérico para $x = -1$	Escrita ordenada segundo as potências decrescentes de x	Coefficiente do termo de maior grau	Coefficiente de x^2
$x - x^5 + 1$	3	5	1	$-x^5 + x + 1$	-1	0
$2 - x^3 + x - \sqrt{2}$	4	3	$2 - \sqrt{2}$	$-x^3 + x + 2 - \sqrt{2}$	-1	0
$x^2 - \sqrt{3}x + 5$	3	2	$6 + \sqrt{3}$	$x^2 - \sqrt{3}x + 5$	1	1
$x - x^2$	2	2	-2	$-x^2 + x$	-1	-1
$x^4 - x^2 + x^3$	3	4	-1	$x^4 + x^3 - x^2$	1	-1
$-1 - x$	2	1	0	$-x - 1$	-1	0
5	1	0	5	5	5	0
0	1	Não é definido	0	0	Não faz sentido	0

3. a) $\sqrt{2}x^4 + \pi x^3 - 2x^2 - 0,5x + 5$
b) $2\pi x^4 + \sqrt{3}$
4. a) $\sqrt{2} + \pi x - 2x^2 - 0,5x^3 + 5x^4$
b) $2\pi + \sqrt{3}x^4$
5. a) 2 b) 18 c) 8; -8
6. a) $m = 2 \rightarrow$ grau 2; $m \neq 2 \rightarrow$ grau 2
b) $m = 0 \rightarrow$ grau indefinido; $m \neq 0 \rightarrow$ grau 4
c) $m \neq -2$ e $m \neq 2 \rightarrow$ grau 3; $m = -2 \rightarrow$ grau 2;
 $m = 2 \rightarrow$ grau zero
d) $\forall m \in \mathbb{R} \rightarrow$ grau 2
7. a) $m \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ grau 2; $m = -\frac{1}{2} \rightarrow$ grau 1.
b) $m \neq 8$ e todo $p \in \mathbb{R} \rightarrow$ grau 3; $m = 8$ e todo
 $p \in \mathbb{R} \rightarrow$ grau 2
c) $p \neq 0$ e $p \neq -3 \rightarrow$ grau 3; $p = -3 \rightarrow$ grau 2;
 $p = 0 \rightarrow$ grau 1
8. a) Não.
b) Sim, $m \neq 8$, $m \neq 0$, $p \neq 0$ e $p \neq 1 \rightarrow$ completo
de grau 3; $m = 8$, $p \neq 0$ e $p \neq 1 \rightarrow$ completo
de grau 2.
c) Não.
9. $r = \frac{80}{\pi}m$; $A(x) = \pi x^2 + 400x$
10. a) 101 c) $2^{101} - 1$
b) 1 d) $2 - \frac{1}{2^{100}}$
11. a) $P = 6x + 8$; $A = 2x^2 + 9x - 5$
b) 1 e 2.
c) $-\frac{4}{3}$; $\frac{1}{2}$ ou -5.
d) Os valores $-\frac{4}{3}$ e -5 para x tornam o valor
 $2x - 1 < 0$, o que não faz sentido como com-
primento de um campo, e para $x = \frac{1}{2}$ a me-
dida $2x - 1 = 0$, o que significa que o campo
terá área nula e se reduzirá a uma linha.
12. a) $\frac{100}{x} + 2,50$ b) $100 + 2,50x$
c) A expressão em a não é um polinômio, pois
há variável no denominador.
13. $400 - 3x$
14. a) $x > 20$ c) $\ell = x$; $V = 2x^3 - 30x^2 - 200x$
b) $6x - 70$ d) 45 cm, 40 cm, 40 cm
15. $P(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$
16. $P(x) = -3x + 4$; $x = \frac{4}{3}$
17. $P(x) = 4x^2 - 6x + 2$; $x = 1$ ou $x = \frac{1}{2}$.
18. a) $x^2 - x + \frac{3}{2}$ c) $x^3 + \frac{9}{2}x - \frac{3}{2}$
b) $-x^3 - \frac{5}{2}x + 1$ d) $2x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 1$
19. a) $-2x^3 + 6x^2 - 3x + 3$ d) $x^2 + 4x + 3$
b) $2x^3 - 4x^2 - 5x + 3$ e) $2x^3 - 13x^2 + 15x$
c) $-3x^2 + 7$ f) $x^4 - 1$
20. a) O grau do polinômio que representa a soma
é menor ou igual ao grau dos polinômios que
são adicionados.
b) O grau do polinômio que representa o pro-
duto é igual à soma dos graus dos polinô-
mios fatores.
21. a) 5 b) 9 c) 5
22. a) $P(x) = (2x + 1)(x - 2) - x(x - 3) - (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
 $P(x) = 2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 + 3x - x^2 - x^2 + 2$
 $P(x) \equiv 0$
b) $A(x) = (x - 1)(x + 3) + x^2(x + 3) - x - 3$
 $A(x) = x^2 + 3x - x - 3 + x^3 + 3x^2 - x - 3$
 $A(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
 $B(x) = (x - 1)(x + 3)(x + 2)$
 $B(x) = (x^2 + 2x - 3)(x + 2)$
 $B(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
 $\therefore A(x) \equiv B(x)$
23. $a = -3$; $b = -5$; $c = 1$

24. $a = 5$; $b = -1$; $c = 4$
25. $b^2 = 4ac$
26. b
27. a) $Q(x) = 1$; $R(x) = 4x - 3$
b) $Q(x) = 0$; $R(x) = x^2 + x + 1$
c) $Q(x) = 0$; $R(x) = 6$
28. $P(x) = 10x^3 + 7x^2 - 11x + 5$
29. $2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 3$
30. a)

2	1	-6	11	-6
	1	-4	3	0

b)

-2	1	2	-1	1	6
	1	0	-1	3	0
31. a) $Q(x) = 3x^2 + 4x + 12$; $R(x) = 37$
b) $Q(x) = 4x^3 + 7x^2 + 14x + 30$; $R(x) = 57$
c) $Q(x) = x^3 + x^2 - 3x + 6$; $R(x) = -13$
d) $Q(x) = -6x^3 + 11x^2 - 11x + 7$; $R(x) = -10$
32. a) $Q(x) = 3x^2 - 4x$; $R(x) = -2$
b) $Q(x) = 4x^2 - x + 1$; $R(x) = -5$
c) $Q(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x - 1$; $R(x) = 6$
d) $Q(x) = -5x^3 - 5x^2 + x$; $R(x) = 6$
33. $P(x) = 6x^5 + 5x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 1$;
 $D(x) = x + 2$;
 $Q(x) = 6x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 30x + 62$
34. b
35. a) -6 b) -6 c) -6 d) $\frac{188}{27}$
36. a) É divisível. b) $k = -2$ c) -2, 2 e 3.
37. d
38. a) $a = -2$, $b = -2$, $c = 8$
As raízes são $(1 + i)$, $(1 - i)$, 2 e -2 .
b) $Q(x) = k \cdot (x^2 + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$ ($k \neq 0$)
39. a) $-1 + \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$ e 0.
b) -4, 0 e 1.
c) $\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}$, $\frac{-1 - \sqrt{65}}{4}$ e 0.
40. a) $x(x^2 + 2x - 1)$ c) $y^3(y^2 + y - 16)$
b) $m(m + 4)(m - 1)$
41. a) $\{-3, -2, 2, 3\}$ b) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$
42. a) $\{-1\}$ b) $\{-3, 1\}$
43. a) $P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)^2$
b) $\{-3, -1, 1\}$
44. $\{-2, 1, 2\}$
45. a)
- b) 6 meses.

FOCO NA TECNOLOGIA – CALCULADORA (P. 178)

1. a) $0,12\pi m^3$
b) Resposta possível:
Quando o óleo alcança altura h no cone, o raio
da superfície circular será de πr^2 , em que
 $r = 0,6h$. Assim, seu volume será:
 $V = \frac{A_{base} \times h}{3} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (0,6h)^2 \cdot h}{3} = 0,12\pi h^3$
c) $V(0,45) \approx 0,034 m^3$
 $V(0,25) \approx 6 \cdot 10^{-3} m^3$
 $V(0,125) \approx 7 \cdot 10^{-4} m^3$
 $V(0,5) \approx 0,047 m^3$
d) $\frac{V(1)}{V(0,5)} = 8$

2. a) $x > 2$
b) $V(x) = \pi \cdot (x - 2)^2 \cdot (x^2 + 2)$
c) 15 latas.

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 178)

1. e 2. Carla.

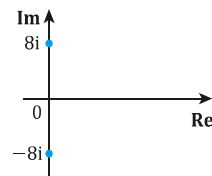
APRENDER A APRENDER (P. 179)

1. c 3. c 5. a 7. c
2. c 4. a 6. e

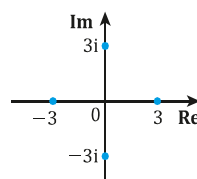
UNIDADE 3 – CAPÍTULO 9

FAZER E APRENDER

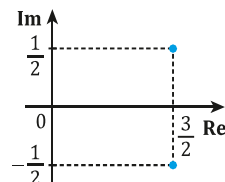
1. a) $\text{Re}(z) = -6$; $\text{Im}(z) = 0,5$
b) $\text{Re}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{Im}(z) = -\frac{1}{2}$
c) $\text{Re}(z) = 0$; $\text{Im}(z) = -\pi$
d) $\text{Re}(z) = 3 + \sqrt{2}$; $\text{Im}(z) = 0$
2. a) $x = -3$ b) $x = 2$
3. a) $x = 0$ ou $x = 3$. c) $x = -3$
b) $x \neq 0$ e $x \neq -3$.
4. a) $x = -1$ e $y = -8$.
b) $x = 0$ e $y = -3$.
c) $x = 4$ e $y = -2$.
d) $x = 0$ e $y = -4$ ou $x = 0$ e $y = 4$.
5. a) $2 + 4i$ c) $9 + 20i$ e) $5 - 12i$
b) $-4 + 8i$ d) $-35 - 12i$ f) $8 + 4i$
6. a) 0 b) -2^{-50}
7. d
8. a) $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ou $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
b) $x = 0$ ou $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.
9. a) $\{-8i, 8i\}$



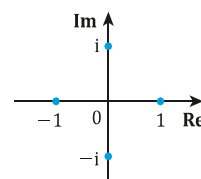
- b) $\{-3i, 3i, -3, 3\}$



- c) $\left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$

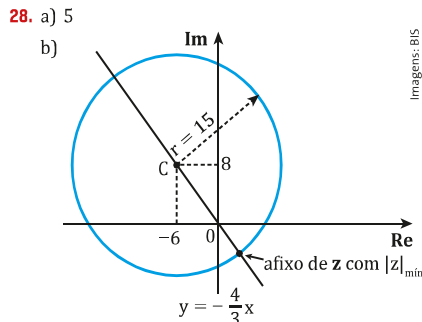


- d) $\{-1, 1, i, -i\}$



10. $\left\{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i\right\}$

11. a) $\{-3i, 3i\}$
 b) $\{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\}$
 c) $\left\{1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$
 d) $\left\{2i, \frac{3 + \sqrt{3}i}{4}, \frac{3 - \sqrt{3}i}{4}\right\}$
12. a) $\left\{\frac{12}{13} + \frac{5}{13}i, \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i\right\}$
 b) $f(z) = \left(z - \frac{12}{13} - \frac{5}{13}i\right) \cdot \left(z - \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i\right)$
13. a) $\bar{z} = 8 - 5i$ c) $\bar{z} = 6i$
 b) $\bar{z} = -62 - 7i$ d) $\bar{z} = -4$
14. a) $\frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$ d) $-4 + 6i$
 b) $\frac{1}{10} + \frac{13}{10}i$ e) $-1 + i$
 c) $-\frac{3}{10} + \frac{11}{10}i$ f) $-i$
15. a) $-\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$ c) $-i$
 b) $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$ d) $-2 + 3i$
16. a) $x = 0$ ou $x = -\frac{1}{4}$
 b) $x \neq 0, x \neq 1$ e $x \neq -\frac{1}{4}$
 c) $x = 1$
17. a) $z = 2 - 3i$
 b) $z = 0$ ou $z = -i$ ou $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
18. a) $u = -1 - 3i$ e $v = 5 + i$
 b) $u = \frac{3}{2} - 2i$ e $v = \frac{3}{2} - 3i$
- 19.
-
20. 5
21. $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$
22. Isósceles.
23. a)
-
- b) Paralelogramo.
 c) Sim. $\frac{29}{2}$
24. a) 20 c) 50
 b) $\sqrt{2}$ d) 80
25. a) $\sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 b) $5\sqrt{2}$ d) 5
26. a) $z = -3 + 4i$ b) $z = \frac{3}{2} + i$
27. a) Reta de equação $2x - 4y - 1 = 0$.
 b) Circunferência de centro $(2, 3)$ e raio 4.
 c) Círculo de centro $(-1, 2)$ e raio 1.
 d) Os pontos do plano exteriores ao círculo de centro $(0, 2)$ e raio 3.



29. 20
30. $1 - i$
31. a) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{5\pi}{4}$
 b) 0 d) $\frac{4\pi}{3}$ f) $\frac{\pi}{3}$
32. a) $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$
 b) $12\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
 c) $3\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$
 d) $4(\cos \pi + i \sin \pi)$
 e) $10\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$
 f) $4\left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}\right)$
33. a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ c) $-2 + 2i$
 b) $-3\sqrt{3} - 3i$
34. a) $\operatorname{Re}(z) = 10; \operatorname{Im}(z) = 0$
 b) $\operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 c) $\operatorname{Re}(z) = -1; \operatorname{Im}(z) = 1$
 d) $\operatorname{Re}(z) = 0; \operatorname{Im}(z) = -2$
35. a) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ b) $-10i$
36. a)
-
- b)
-

37. e
38. É uma circunferência de centro na origem do plano Argand-Gauss e raio 2.
39. É uma semirreta que forma um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o semieixo positivo do eixo real.
40. a) $H_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); H_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right); H_3(1, 0); H_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right);$
 $H_5\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); H_6(0, -1); H_7\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$
 $H_8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right); H_9(-1, 0); H_{10}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right);$
 $H_{11}\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); H_{12}(0, 1)$
 b) $H_1: z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$
 $z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $H_2: z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$
 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
 $H_3: z = \cos 0 + i \sin 0$
 $z = 1$
 $H_4: z = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$
 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
 $H_5: z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$
 $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 $H_6: z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$
 $z = -i$
 $H_7: z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$
 $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 $H_8: z = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$
 $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
 $H_9: z = \cos \pi + i \sin \pi$
 $z = -1$
 $H_{10}: z = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$
 $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
 $H_{11}: z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$
 $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 $H_{12}: z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$
 $z = i$
41. a) $50(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$
 b) $2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$
 c) $\frac{1}{2}(\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ)$
 d) $\frac{1}{5}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$
42. a) $-4 - 4\sqrt{3}i$ c) -8
 b) $-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ d) $\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$
43. a) $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
 b) $z^8 = 2^{12}; z^{17} = 2^{25}(1 + i); z^{26} = 2^{39}i;$
 $z^{39} = 2^{58}(1 - i)$
44. a) $2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$
 b) $z^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i; z^{-10} = \frac{1}{2^{11}} - \frac{\sqrt{3}}{2^{11}}i$
45. a) $n = 3k, k \in \mathbb{Z}$ b) $n = 3$
46. a) $n = 2$ b) $n = 6 + 8k, k \in \mathbb{Z}$
47. a) $z = -1$ c) $z = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
 b) $z = -i$ d) $z = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
48. a) $z^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$
 $\frac{1}{z^n} = \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)$
 $z^n + \frac{1}{z^n} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) + \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta) = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) + \cos(n\theta) - i \sin(n\theta) = 2 \cos(n\theta)$
 b) $z^n - \frac{1}{z^n} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) - \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) = 2i \sin(n\theta)$
49. $x = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ$
 $x^2 = (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)^2 = \cos^2 15^\circ + 2 \cos 15^\circ \sin 15^\circ i + \sin^2 15^\circ i^2$
 $x^2 = \cos 30^\circ + \sin 30^\circ i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
 $x^4 = (x^2)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$x^6 = x^4 \cdot x^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = i$$

$$x^{10} = x^4 \cdot x^6 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

então:

$$2x^{10} - x^6 + \sqrt{3} = 0$$

$$2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i + \sqrt{3} = 0$$

$$0 = 0$$

Portanto, $\cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ$ é solução da equação.

50. Consideramos que $z = a + bi$, então temos que

$$\frac{i \cdot z}{z} = \frac{-2ab + (a^2 - b^2)i}{a^2 + b^2}.$$

Como $\frac{i \cdot z}{z}$ é real, então temos que $a = b$.

a) Portanto, $|z| = |\operatorname{Re}(z)| \cdot \sqrt{2}$, pois $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + a^2} \Rightarrow |z| = a \cdot \sqrt{2}$.

b) Como $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Portanto, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$.

51. c

52. e

53. a) $3 + 2i; -3 - 2i$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i; -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

b) $4 + 2i; -4 - 2i$ d) $-1 + i; 1 - i$

54. a) $\{3 + 6i, -1 + 2i\}$

b) $\{2 + i, -3 + i\}$

55. a) $i; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -i$

c) $1 + \sqrt{3}i; -2; 1 - \sqrt{3}i$

d) $1; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

56. a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}i; -\sqrt{2} + \sqrt{6}i; -\sqrt{6} - \sqrt{2}i; \sqrt{2} - \sqrt{6}i$

b) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

57. $2 - 3i$ e $z = -5 - 12i$.

58. $\sqrt{3} + i; 2i; -\sqrt{3} + i; -\sqrt{3} - i; \sqrt{3} - i$

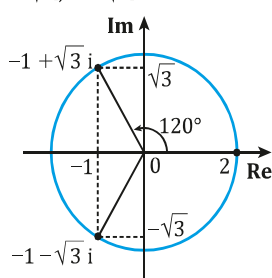
59. a) $\{-3i, 3i, -2, 2\}$

b) $\left\{-1, 2, -1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

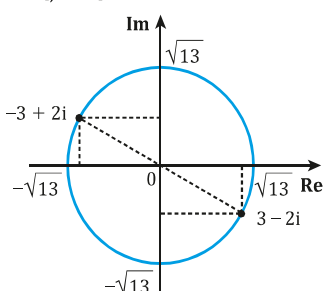
c) $\{1 - i, -2 + 2i, -5 - i, -2 - 4i\}$

d) $\{1 - i, -1 - 3i\}$

60. $2; -1 + \sqrt{3}i; -1 - \sqrt{3}i$



61. $-3 + 2i; 3 - 2i$



62. c

FOCO NA TECNOLOGIA – CALCULADORA (P. 204)

1. Aproximadamente 135,6 m.

2. a) $\bar{X} = R\$ 2\,000,00$; $Me = R\$ 1\,500,00$

b) Menor, pois o numerador continuará igual e o denominador aumentará em duas unidades.

APRENDER A APRENDER (P. 205)

1. a) $y = -\frac{3}{5}x + 3$ c) $D = \mathbb{R}$; $\operatorname{Im} = \mathbb{R}$

b) $y > 0$ para $x < 5$

$y = 0$ para $x = 5$

$y < 0$ para $x > 5$

2. Aproximadamente 87 m.

3. c

4. a) Sistema impossível.

b) Sistema possível e indeterminado.

5. b

6. c

7. e

8. e

9. $\left(49 + \frac{7\pi}{2}\right)\text{cm}^2$

10. a

UNIDADE 3 – CAPÍTULO 10

FAZER E APRENDER

1. $2i; -i; \frac{1}{2}$

2. a) $m = -3$

b) Para qualquer $m \in \mathbb{C}$.

3. a) $P(x) = 3(x-2)(x-4)$

b) $P(x) = 5(x-1)(x-2)(x-3)$

c) $P(x) = 2(x-1)(x-3)(x+3)(x+2)$

4. $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i; \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$

5. $m \leq -\sqrt{2}$ ou $m \geq \sqrt{2}$.

6. Para verificar os tipos de raízes de $(x^2 - 3x + 5)$, podemos determinar o discriminante:

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0$. Portanto, $x^2 - 3x + 5 = 0$ possui apenas uma raiz real.

7. $\{2, 1 + i\}$

8.	3	1	-8	18	0	-27
	3	1	-5	3	9	0
	3	1	-2	-3	0	
	3	1	1	0		
		1	4			

9. $\left\{-2, \frac{2}{3}, 1\right\}$

10. a) $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

b) $(x-2)^3(x-i)^2(x+2i) = 0$

11. $\forall m \in \mathbb{R}$

12. a

13. a) $m = 3$ ou $m = -3$.

b) $m = -3$

c) Não.

d) Sim, para $m = 3$.

14. a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{7}{5}$ d) $\frac{19}{9}$

15. a) $-\frac{5}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1

16. a) -3 b) 3

17. $\{2, 3, 4\}$

18. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

19. $\{1, 2, 6\}$

20. a) 180 cm^3

b) 216 cm^2

21. $\{4 - i, 4 + i, 4\}$

22. $\{-1, 2i, 4\}$

23. $\left\{-1, \frac{3}{2}\right\}$

24. d

25. $k = 64$

26. c

27. d

28. a) $5 - 3i$

b) $1 + 2i$ e $-3 - i$.

29. $\left\{1 - i, 1 + i, -\frac{1}{2}\right\}$

30. $\left\{1, 1 - 2i, 1 + 2i, \frac{2}{3}\right\}$

31. a) $x^3 - 10x^2 + 33x - 34 = 0$

b) $x^2 + (-6 + i)x + 8 - 2i = 0$

32. a) Grau 9.

b) Grau 6.

33. a) $\left\{1, -i, i, \frac{2}{3}\right\}$

b) $\left\{1, -2i, 2i, -\frac{1}{2}\right\}$

34. $\{i, 1 - i, 1 + i\}$

35. c

36. $c = 78$

37. 01, 02

38. 2

39. a) $\left\{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i, \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i, -\frac{1}{2}\right\}$

b) $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}\right\}$

40. -2 ou 3.

41. $\frac{1}{2}$ ou $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

42. -1, 1, -2, 2 são possíveis raízes inteiras que, substituindo na equação, implicam $a \notin \mathbb{Z}$. Logo, não são soluções.

43. A expressão é igual a $2 \in \mathbb{Z}$.

44. 01, 02, 04, 08

45. b, c

46. +3, -3 e +4. Pesquisa racional.

47. a) 4

b) -13

c) 0

FOCO NA TECNOLOGIA – CALCULADORA (P. 219)

1. a) Aproximadamente 43,5 m.

b) Aproximadamente 37,8 m.

c) Aproximadamente 57,6 m.

d) Aproximadamente R\$ 2 972,46.

APRENDER A APRENDER (P. 219)

1. 02, 04

2. 5

3. 18

4. Sim, porque são concêntricas em (2, 1) com raios diferentes (2 e 3).

5. 62 cm^2

6. 10 herdeiros.

7. c

8. d

9. d

10. c

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 225)

1. a

2. e

3. a

4. a

UNIDADE 4 – CAPÍTULO 11

FAZER E APRENDER

- $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$
- $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$; $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$
- $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$
 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- a) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$
b) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$
c) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$
d) Nenhum.
- a) 4º quadrante. f) 2º quadrante.
b) 3º e 4º quadrantes. g) 1º quadrante.
c) 4º quadrante. h) 3º quadrante.
d) 1º quadrante. i) 2º e 3º quadrantes.
e) 2º e 4º quadrantes.

7.

	Seno de α	Cosseno de α	Tangente de α
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	positivo decrésciente	negativo decrésciente	negativa crescente
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	negativo decrésciente	negativo crescente	positiva crescente
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	negativo crescente	positivo crescente	negativa crescente
$2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$	positivo crescente	positivo decrésciente	positiva crescente

- d = $\sqrt{7}$ m
- a) 8 °C b) 14 h e 22 h.
- b
- a) $\sin 100^\circ = \sin 80^\circ$
 $\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$
 $\operatorname{tg} 100^\circ = -\operatorname{tg} 80^\circ$
b) $\sin 200^\circ = -\sin 20^\circ$
 $\cos 200^\circ = -\cos 20^\circ$
 $\operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg} 20^\circ$
c) $\sin 340^\circ = -\sin 20^\circ$
 $\cos 340^\circ = \cos 20^\circ$
 $\operatorname{tg} 340^\circ = -\operatorname{tg} 20^\circ$
d) $\sin 1610^\circ = \sin 10^\circ$
 $\cos 1610^\circ = -\cos 10^\circ$
 $\operatorname{tg} 1610^\circ = -\operatorname{tg} 10^\circ$
e) $\sin 3100^\circ = -\sin 40^\circ$
 $\cos 3100^\circ = -\cos 40^\circ$
 $\operatorname{tg} 3100^\circ = \operatorname{tg} 40^\circ$
f) $\sin 2470^\circ = -\sin 50^\circ$
 $\cos 2470^\circ = \cos 50^\circ$
 $\operatorname{tg} 2470^\circ = -\operatorname{tg} 50^\circ$
- a) $\sin \frac{6\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}$
 $\cos \frac{6\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7}$
 $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$

- $\sin \frac{7\pi}{5} = -\sin \frac{2\pi}{5}$
 $\cos \frac{7\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$
 $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$
- $\sin \frac{15\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8}$
 $\cos \frac{15\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8}$
 $\operatorname{tg} \frac{15\pi}{8} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$
- $\sin \frac{49\pi}{10} = \sin \frac{\pi}{10}$
 $\cos \frac{49\pi}{10} = -\cos \frac{\pi}{10}$
 $\operatorname{tg} \frac{49\pi}{10} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$
- $\sin \frac{57\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8}$
 $\cos \frac{57\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8}$
 $\operatorname{tg} \frac{57\pi}{8} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$
- $\sin \frac{39\pi}{5} = -\sin \frac{\pi}{5}$
 $\cos \frac{39\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5}$
 $\operatorname{tg} \frac{39\pi}{5} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$

- a) $\sin 78^\circ = \cos 12^\circ$
 $\cos 78^\circ = \sin 12^\circ$
 $\operatorname{tg} 78^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 12^\circ}$
b) $\sin \frac{7\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{9}$
 $\cos \frac{7\pi}{18} = \sin \frac{\pi}{9}$
 $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{18} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}$
c) $\sin 162^\circ = \sin 18^\circ$
 $\cos 162^\circ = -\cos 18^\circ$
 $\operatorname{tg} 162^\circ = -\operatorname{tg} 18^\circ$
d) $\sin \frac{3\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{10}$
 $\cos \frac{3\pi}{5} = -\sin \frac{\pi}{10}$
 $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}}$
e) $\sin 260^\circ = -\cos 10^\circ$
 $\cos 260^\circ = -\sin 10^\circ$
 $\operatorname{tg} 260^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ}$
f) $\sin \frac{29\pi}{18} = -\cos \frac{\pi}{9}$
 $\cos \frac{29\pi}{18} = \sin \frac{\pi}{9}$
 $\operatorname{tg} \frac{29\pi}{18} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}$

- a) $\sin (-280^\circ) = \cos 10^\circ$
 $\cos (-280^\circ) = \sin 10^\circ$
 $\operatorname{tg} (-280^\circ) = \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ}$
b) $\sin \left(-\frac{7\pi}{5}\right) = \cos \frac{\pi}{10}$
 $\cos \left(-\frac{7\pi}{5}\right) = -\sin \frac{\pi}{10}$
 $\operatorname{tg} \left(-\frac{7\pi}{5}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}}$
c) $\sin (-162^\circ) = -\sin 18^\circ$
 $\cos (-162^\circ) = -\cos 18^\circ$
 $\operatorname{tg} (-162^\circ) = \operatorname{tg} 18^\circ$

$$\begin{aligned} \text{d) } \sin \left(-\frac{4\pi}{9}\right) &= -\cos \frac{\pi}{18} \\ \cos \left(-\frac{4\pi}{9}\right) &= \sin \frac{\pi}{18} \\ \operatorname{tg} \left(-\frac{4\pi}{9}\right) &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{18}} \end{aligned}$$

- a) $y = -1$
b) $y = -\cos^2 x$
- a) $y = 1$ c) $y = 0$
b) $y = 0$ d) $y = 1$
- Provavelmente fez $\sin 210^\circ = \sin 30^\circ$ e $\cos 210^\circ = \cos 30^\circ$.
- Respostas pessoais.
- a) Suplementares.
b) Suplementares.
c) Complementares.
d) Complementares.
- $\sin \beta = m$; $\cos \beta = -\sqrt{1-m^2}$; $\operatorname{tg} \beta = -\frac{m}{\sqrt{1-m^2}}$
- $\cos \beta = \pm \sqrt{1-m^2}$; $\sin \beta = m$; $\operatorname{tg} \beta = \pm \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$
- $\sin \alpha = \sin \beta$; $\cos \alpha = -\cos \beta$
- $\sin \alpha = \cos \beta$; $\cos \alpha = \sin \beta$
- a) $y = -1$ b) $y = \sin x \cos x$

FOCO NA TECNOLOGIA – CALCULADORA (P. 244)

- a) 4,2262 c) 20
b) 0,84202 d) 0,76604
- a) $\alpha \approx 28,5^\circ$ c) $\alpha \approx 3,2^\circ$
b) $\alpha \approx 38,3^\circ$ d) $\alpha \approx 87,4^\circ$
- a) 0,1736 d) 0,6428 g) 0,9397
b) 0,3420 e) 0,7660 h) 0,9848
c) 0,5000 f) 0,8660 i) 1
- a) 0,9848 d) 0,7660 g) 0,3420
b) 0,9397 e) 0,6428 h) 0,1736
c) 0,8660 f) 0,5000 i) 0

Quando o ângulo aumenta, o cosseno diminui (para ângulos no 1º quadrante).

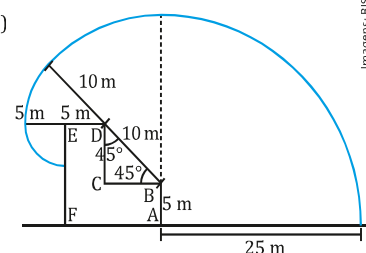
- $\widehat{BAC} = 90^\circ$; $\widehat{ABC} \approx 22,6^\circ$; $\widehat{ACB} \approx 67,4^\circ$

FOCO NO RACIOCÍNIO LÓGICO (P. 244)

- Antônio e Carlos mentem, e Berta fala a verdade.
- d

APRENDER A APRENDER (P. 245)

- 0,007
- $\frac{25}{28}$
- b
- a
- 10
- a
- d
- R\$ 160,00
- a)



- Aproximadamente 732 m².

CÁLCULO RÁPIDO (P. 246)

1 e 2.

	Arco em graus	Arco em radianos	Seno	Cosseno
A	0°	0	0	1
E	30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
P	45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
F	60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
B	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
G	120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Q	135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
H	150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
C	180°	π	0	-1
I	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
R	225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
J	240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
D	270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
K	300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
S	315°	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
L	330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

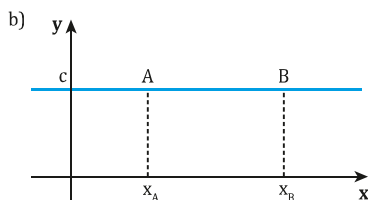
UNIDADE 4 – CAPÍTULO 12

FAZER E APRENDER

1. 1,2 m/s; 3,6 m/s

2. No instante A.

3. a) 0



A inclinação da reta \overline{AB} é nula porque a reta é horizontal.

4. Respostas pessoais.

5. $2a^2$

6. $y = -4x - 4$

7. $y = 2x + 1$

8. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

9. 0,25 m/s

10. 10 m/s²

11. 13 s

12. a) $4x^3 - 3x^2 + 2x$

b) $-\frac{1}{x^2} + 2x$

c) $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $24x^3 + 3x^2 + 12$

e) $60x^3$

f) $-12x^2 + 14x - 3$

13. $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$

14. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

b) $x = 0$ ou $x = 2$.

c) As retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de abscissas $x = 0$ e $x = 2$ são horizontais (paralelas ao eixo Ox).

15. $y + \frac{7}{6} = -3(x - 1)$ e $y - \frac{9}{8} = -3\left(x + \frac{3}{2}\right)$.

16. V, F, V, F

17.

	f é crescente em	f é decrescente em
a)	$]-\infty, -3]$ e $[5, +\infty[$	$[3, 5]$
b)	$]-\infty, -1]$ \cup $[1, +\infty[$	$[-1, 1]$
c)	$[-1, 0] \cup [1, +\infty[$	$]-\infty, -1]$ \cup $[0, 1]$
d)	$]-\infty, 3]$	$[3, +\infty[$

18. a) $f'(x) = a$

$a > 0 \Rightarrow f$ crescente em \mathbb{R}

$a < 0 \Rightarrow f$ decrescente em \mathbb{R}

b) $f'(x) = 2ax + b$; $f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$

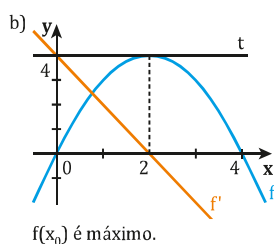
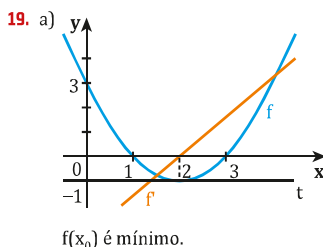
$f'(x) > 0$ se $x > -\frac{b}{2a}$, então f é crescente para $x > -\frac{b}{2a}$.

$f'(x) < 0$ se $x < -\frac{b}{2a}$, então f é decrescente para $x < -\frac{b}{2a}$.

c) $f'(x) = 2ax + b$; $f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$

$f'(x) < 0$ se $x > -\frac{b}{2a}$, então f é decrescente para $x > -\frac{b}{2a}$.

$f'(x) > 0$ se $x < -\frac{b}{2a}$, então f é crescente para $x < -\frac{b}{2a}$.



20. a) $(-1, -3)$ é ponto de mínimo local e $(1, 1)$ é ponto de máximo local.

b) $\left(-2, \frac{10}{3}\right)$ é ponto de máximo local e $\left(2, -\frac{22}{3}\right)$ é ponto de mínimo local.

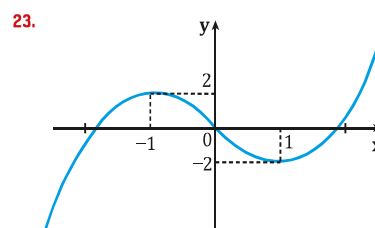
21. a) $x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right[\rightarrow f$ é decrescente;
 $x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[\rightarrow f$ é crescente

b) $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{16}\right)$ é ponto de mínimo de f . Não há ponto de máximo.

c) $y = 0$. Nesse ponto, o eixo Ox é tangente ao gráfico de f , mas f é decrescente em torno de $(0, 0)$.

22. a) $(0, 0)$ é ponto de mínimo local e $(2, 4)$ é ponto de máximo local.

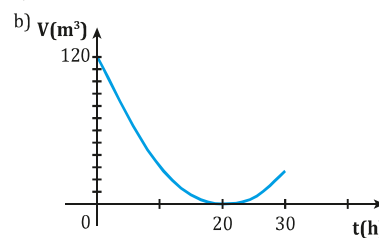
b) $(-3, 54)$ é máximo absoluto; $(0, 0)$ e $(3, 0)$ são mínimos absolutos.



24. $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

25. 110 m e $\frac{220}{\pi}$ m.

26. a) $a = 0,3$ e $b = 20$.



27. $r \approx 3,5$ m

28. 2,2 h ou 2 h 12 min.

FOCO NA TECNOLOGIA – CALCULADORA (P. 269)

1. c

2. b

APRENDER A APRENDER (P. 269)

1. Respostas possíveis:

Resfriamento e aquecimento se sucedem, talvez como forma de modificação de suas propriedades termomecânicas.

O resfriamento é rápido e o aquecimento não deve passar de 280 graus.

2. a) 96 pessoas.

b) 64 pessoas.

3. 36

4. $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

5. R\$ 128,00

6. a) V

b) V

c) F, as retas podem ser reversas.

d) F, ela pode ser reversa.

e) V

7. 28 149 km

POR DENTRO DO ENEM E DOS VESTIBULARES (P. 272)

1. a

2. b

Orientações Didáticas

SUMÁRIO

Apresentação	291
Orientações gerais sobre esta coleção	292
I. Uma palavra sobre o livro didático	292
II. Os pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a proposta didático-pedagógica	292
III. O desenvolvimento da linguagem matemática no Ensino Médio	294
IV. As competências em Matemática e nesta coleção	296
V. Temas e conteúdos	297
Seleção dos conteúdos.....	297
A distribuição dos conteúdos em eixos	298
A ordem dos conteúdos	299
Conteúdos opcionais.....	300
Planejamento	300
VI. Projetos	301
VII. Avaliação	301
Sobre os instrumentos e as formas.....	301
VIII. Estrutura da obra, sugestões de utilização e competências envolvidas	302
De olho na resolução	302
Fique conectado.....	302
Fazer e aprender.....	303
Invente você.....	303
Foco... ..	304
Aprender a aprender	306
Para complementar.....	307
Entre saberes.....	307
Mundo plural	307
Palavras-chave	307
Cálculo rápido.....	308
Por dentro do Enem e dos vestibulares	309
Projeto.....	309
Orientações específicas para este volume	310
Organização do trabalho com este livro	310
O livro e o tempo das aulas.....	310
Objetivos relacionados aos capítulos e aos conteúdos	310
Considerações sobre os capítulos e seções	312
Unidade 1 - Matemática em contextos	312
Unidade 2 - Geometria analítica	316
Unidade 3 - Polinômios, números complexos e equações polinomiais	321
Unidade 4 - Funções trigonométricas e taxa de variação de funções	325
Projeto	327
Sugestões de conteúdos complementares	331
Texto	331
Jogos.....	332
Resoluções das atividades	344
Referências bibliográficas	416

APRESENTAÇÃO

Esta coleção de Matemática para o Ensino Médio pretende contemplar as tendências mais atuais para o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, observando a necessidade de adequação a estudantes com diferentes motivações, interesses e capacidades, de modo a criar condições para sua inserção em um mundo marcado por mudanças sociais, econômicas, científicas e tecnológicas.

Composta de três volumes, a coleção tem como base os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM, 1999) e a proposta curricular para o Ensino Médio Inovador apresentada pela Secretaria de Educação Básica do MEC em 2009. Isso pode ser observado pela ênfase dada aos conceitos centrais de cada tema e pela sinalização de que alguns dos tópicos tradicionalmente ensinados podem ser omitidos, sem prejuízo da sequência lógica dos conteúdos ou do desenvolvimento das habilidades e competências indicadas pelos PCNEM. No entanto, mesmo esses conteúdos indicados como opcionais fazem parte desta coleção, em respeito à diversidade de propostas das escolas e de seus estudantes. Metodologicamente, destacam-se a proposta de projetos e o cuidado com as questões de processos de acesso ao Ensino Superior e do Enem. No volume do 3º ano, há preocupação especial em promover a manutenção de diversos conteúdos dos anos anteriores, o que possibilita o preparo dos estudantes para os testes seletivos que comumente ocorrem ao final do Ensino Médio.

O reconhecimento das exigências atuais e a preparação para tantas outras com as quais certamente o estudante irá se confrontar durante e após a escolaridade básica implicam uma diferente utilização do raciocínio e dos conhecimentos matemáticos, atribuindo ao ensino da Matemática a dupla função de desenvolver habilidades e competências e de levar o estudante a adquirir conhecimentos que possam se constituir em chaves para a leitura do mundo em que vive, bem como para a compreensão e a participação no progresso científico e tecnológico.

Procuramos, nesta coleção, organizar o ensino dos conceitos matemáticos de modo a valorizar as duas perspectivas mencionadas, desenvolvendo os temas selecionados de forma a permitir ao estudante usufruir tanto do valor científico da Matemática quanto do seu caráter formativo e instrumental.

A você, professor, que adota a obra, fica o convite para nos auxiliar a concretizar essa proposta.

As autoras

Orientações gerais sobre esta coleção

I. Uma palavra sobre o livro didático

Em nossa concepção, o livro didático deve cumprir a função de apresentar o conhecimento matemático previsto para a etapa da escolaridade à qual se destina de modo organizado e propiciar ao estudante a experiência de vivenciar metodologias que sejam adequadas para a aprendizagem desse conhecimento.

Nesse sentido, estudante e professor devem encontrar no livro didático de Matemática para o Ensino Médio os conteúdos possíveis de serem aprendidos pelo jovem que concluiu o Ensino Fundamental e que, agora, caminha na direção de fazer novas escolhas para o seu projeto de vida, como a continuidade dos estudos no Ensino Superior e a inserção no mundo do trabalho.

Nesta coleção, não temos a pretensão de que absolutamente tudo seja ensinado e aprendido, mas entendemos que professor e estudantes têm o direito de encontrar aqui o que os documentos oficiais, a escola e o professor planejam como objetivos formativos para os estudantes e as ferramentas necessárias para que estes possam atuar em suas práticas sociais, bem como os conteúdos que desejam aprender, até mesmo para além do tempo das aulas durante a Educação Básica.

Em relação à abordagem dos conteúdos tradicionalmente apresentados nos três anos do Ensino Médio, esta é muitas vezes criticada como fragmentada, sem grandes conexões entre os conteúdos ou com a realidade próxima dos estudantes, sendo por isso responsabilizada pelo desinteresse e pela baixa motivação deles.

De fato, em geral as aplicações imediatas não são características dos conteúdos do Ensino Médio; por exemplo, a Álgebra já se distancia da rotina diária do jovem desde o 7º ano do Ensino Fundamental. Por isso, é preciso ter clareza de que, no Ensino Médio, o que constitui a integração entre os diferentes temas e conteúdos é o desenvolvimento de competências, algumas das quais estão naturalmente associadas à aprendizagem de Matemática. Exemplos disso encontram-se destacados a seguir, na descrição dos eixos cognitivos comuns a todas as áreas de conhecimento presentes na Matriz do Enem:

“EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. Dominar linguagens (DL): dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das *linguagens matemática*, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. Compreender fenômenos (CF): *construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais*, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. Enfrentar situações-problema (SP): selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. Construir argumentação (CA): relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. Elaborar propostas (EP): recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.”

Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/downloads/2012/matriz_referencia_enem.pdf> (grifos nossos). Acesso em: 18 maio 2016.

Esse modo de compreender o livro didático ressalta a importância do planejamento das aulas de cada professor de acordo com o plano pedagógico da escola, pois é esse planejamento que permite a ele fazer escolhas, orientar o ensino e considerar a realidade e os interesses dos estudantes.

Por outro lado, não basta ter à mão temas e conteúdos para elaborar seu plano de aulas; o professor precisa encontrar no livro didático algum alinhamento com o modo de ensinar que considera adequado para o desenvolvimento de competências dos estudantes, e isso se dá pela identificação do professor com os pressupostos teórico-metodológicos e com as atividades propostas ou sugeridas pelo livro didático.

II. Os pressupostos teórico-metodológicos que fundamentam a proposta didático-pedagógica

A Matemática no Ensino Médio, entendido como etapa final da escolaridade básica, deve se organizar de tal modo que represente a aquisição, pelo estudante, de uma parcela importante do conhecimento humano, de forma que ele possa ler e interpretar a realidade e desenvolver as capacidades necessárias para sua atuação efetiva na sociedade e em sua vida profissional.

Assim, nesta etapa da escolaridade, a Matemática vai além do seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem, e com papel integrador importante com relação às demais ciências da natureza.

O enfrentamento das situações que o jovem terá no prosseguimento de seus estudos, no trabalho e no exercício da cidadania, mais do que informações, requer a mobilização de conhecimentos e habilidades.

“Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.”

(PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2002. p. 111.)

Podemos exemplificar a necessidade do desenvolvimento de competências e habilidades em Matemática, analisando o processo envolvido no enfrentamento de qualquer situação-problema. Nessa etapa da escolaridade, além da leitura e de conhecimentos específicos de Matemática, as situações propostas envolvem o domínio de códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, a compreensão e a interpretação de desenhos e gráficos e a relação destes com a linguagem discursiva. O estudante precisa, ainda, analisar e compreender a situação por inteiro, decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la, argumentar, expressar-se e fazer registros.

“A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.”

(Ibidem, p. 112.)

Tanto isso é verdade, que sabemos da dificuldade do estudante quando propomos a análise de situações em que devem ser relacionados dados ou fatos diversos ou quando é necessário decidir entre diferentes e possíveis caminhos de resolução. Nesse caso, percebemos que, mesmo quando possui informações e conceitos, o estudante não os mobiliza, não os combina eficientemente, desanima, espera a explicação do professor, não se permite tentar, errar, não confia em suas formas de pensar. Quando se prioriza a resolução de problemas, o tratamento de situações complexas e diversificadas oferece ao estudante a oportunidade de pensar por si mesmo, de construir estratégias de resolução e argumentações, de relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, de perseverar na busca da solução. Para isso, os desafios devem fazer sentido e ser, de fato, problemas para quem os resolve.

Resumidamente, quando entendemos uma competência como mobilização de informações, conhecimentos e procedimentos em situações complexas, a perspectiva metodológica da resolução de problemas pode responder à necessidade do desenvolvimento das competências específicas de Matemática. É pela resolução de problemas que podemos desenvolver formas específicas de pensar, as quais podem habilitar o jovem a enfrentar desafios na vida escolar e fora dela.

Isso não significa que os exercícios do tipo “calcule”, “resolva” etc. devam ser eliminados, pois eles cumprem a função do aprendizado de técnicas e propriedades. Mas de forma alguma são suficientes para preparar o estudante para que ele possa continuar aprendendo, ou para que construa visões de mundo abrangentes, ou, ainda, para que se realize no mundo social ou profissional.

Não se trata de separar o ensino de conteúdos específicos das competências; pelo contrário, essas são duas dimensões da aprendizagem que devem ocorrer conjuntamente.

Para alcançar os objetivos implicados nessa perspectiva, a seleção de temas e conteúdos, assim como a forma de tratá-los no ensino, são decisivas. A maneira como se organizam as atividades e a sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino são atitudes que poderão permitir o trabalho simultâneo dos conteúdos e das competências. Se o professor insistir em cumprir programas extensos, com conteúdos fragmentados e sem significado, transmitindo-os de uma única maneira a estudantes que apenas ouvem e repetem, sem dúvida as competências estarão fora de alcance.

Em documento recente, produzido pela Diretoria de Concepções e Orientações Curriculares para a Educação Básica, que descreve uma proposta curricular para o Ensino Médio Inovador, encontramos reafirmadas as justificativas para as escolhas dessa proposta didática no sentido do desenvolvimento das competências com a pers-

pectiva da resolução de problemas ou da problematização presentes já nas orientações dos PCNEM (1999). Desse documento, podemos destacar:

“A intencionalidade de uma nova organização curricular é erigir uma escola ativa e criadora construída a partir de princípios educativos que unifique, na pedagogia, *éthos*, *logos* e *técno*s, tanto no plano metodológico quanto no epistemológico. Entendendo que o projeto político-pedagógico de cada unidade escolar deve materializar-se, no processo de formação humana coletiva, o entrelaçamento entre trabalho, ciência e cultura, com os seguintes indicativos:

- Contemplar atividades integradoras de iniciação científica e no campo artístico-cultural;
- *Incorporar, como princípio educativo, a metodologia da problematização como instrumento de incentivo à pesquisa, à curiosidade pelo inusitado e ao desenvolvimento do espírito inventivo, nas práticas didáticas;*
- *Promover a aprendizagem criativa como processo de sistematização dos conhecimentos elaborados, como caminho pedagógico de superação da mera memorização;*
- *Promover a valorização da leitura em todos os campos do saber, desenvolvendo a capacidade de letramento dos alunos;*
- Fomentar o comportamento ético, como ponto de partida para o reconhecimento dos deveres e direitos da cidadania, praticando um humanismo contemporâneo, pelo reconhecimento, respeito e acolhimento da identidade do outro e pela incorporação da solidariedade;
- *Articular teoria e prática, vinculando o trabalho intelectual com atividades práticas experimentais;*
- *Utilizar novas mídias e tecnologias educacionais, como processo de dinamização dos ambientes de aprendizagem;*
- *Estimular a capacidade de aprender do aluno, desenvolvendo o autodidatismo e a autonomia dos estudantes;*
- Promover atividades sociais que estimulem o convívio humano e interativo do mundo dos jovens;
- Promover a integração com o mundo do trabalho por meio de estágios direcionados para os estudantes do ensino médio;
- *Organizar os tempos e os espaços com ações efetivas de interdisciplinaridade e contextualização dos conhecimentos;*
- Garantir o acompanhamento da vida escolar dos estudantes, desde o diagnóstico preliminar, acompanhamento do desempenho e integração com a família;
- Ofertar atividades complementares e de reforço da aprendizagem, como meio para elevação das bases para que o aluno tenha sucesso em seus estudos;
- Ofertar atividades de estudo com utilização de novas tecnologias de comunicação;
- *Avaliação da aprendizagem como processo formativo e permanente de reconhecimento de saberes, competências, habilidades e atitudes.”*

(Ensino Médio Inovador. Brasília: MEC/Secretaria da Educação Básica/Diretoria de Concepções e Orientações Curriculares para a Educação Básica. Coordenação Geral de Ensino Médio, 2009. p. 19-20.)

Os itens acima destacados em *itálico* explicitam algumas das escolhas metodológicas desta coleção, tanto no que diz respeito à ênfase em relação à proposição e à resolução de situações-problema e ao desenvolvimento de competência leitora, quanto na forma como isso pode ser alcançado em atividades que promovam autonomia, aprendizagem em grupo e avaliação em um processo amplo, no qual buscamos inserir o jovem em constante exercício de reflexão sobre suas aprendizagens.

III. O desenvolvimento da linguagem matemática no Ensino Médio

A Matemática dispõe de um sistema notacional próprio no qual se apoia, construído ao longo da história para representar ideias e conceitos. Assim, quando escrevemos algo como $\sin x = 1$ ou $\sin x > 1$, para compreender o que as frases significam não basta lê-las em língua materna (seno de x é igual a um ou seno de x é maior que um), porque há uma quantidade grande de noções, conceitos e procedimentos embutidos nessa escrita, tais como:

- saber o que exatamente significa $\sin x$;
- entender que o símbolo x representa um valor desconhecido;
- compreender que o sinal de igualdade ou desigualdade nessas expressões indica que há algo a ser calculado, mas que, ainda que haja alguma “semelhança” entre as escritas, o uso de $=$ ou $>$ modifica significativamente a natureza da resposta que se busca;
- realizar os cálculos indicados;
- saber interpretar os resultados em um contexto específico e expressar a resolução encontrada seguindo as regras que regem a escrita matemática.

Uma das competências que se esperam dos estudantes que terminam o Ensino Médio é o domínio das linguagens. Em Matemática, a meta é que o estudante seja capaz de ler, interpretar e produzir textos específicos dessa disciplina.

De fato, se desejamos que, após a Educação Básica, o estudante continue aprendendo, que utilize o que aprendeu para enfrentar situações-problema e que produza conhecimento, a capacidade de comunicar-se matematicamente é cada vez mais importante.

É comum achar que no Ensino Médio o estudante adquiriu fluência na representação e na comunicação matemática porque cursou o Ensino Fundamental. Também é frequente que se atribuam as dificuldades sentidas pelo estudante para ler e interpretar textos de Matemática a uma fluência deficiente na leitura e na interpretação de textos em língua portuguesa. Mas as coisas não acontecem bem assim.

Pelo exemplo, é possível perceber que um componente essencial da linguagem matemática é que ela possui uma terminologia e uma simbologia próprias, que, especialmente no Ensino Médio, são de uso quase exclusivo da escola e da ciência. Certamente, para ler os textos em Matemática e para “falar” sobre essa área do conhecimento nos valem da língua portuguesa. No entanto, até mesmo essa leitura não implica uma transposição imediata, uma vez que há termos que, no uso diário, têm sentidos bem diferentes que em Matemática, como é o caso de *agudo*, *plano*, *módulo*, *grau*, *diferença*, *expoente*, *função* ou *total*, sem falar nas palavras que não são usadas fora da escola, tais como *cotangente*, *polinômio* e *minuendo*.

Por outro lado, por melhores que tenham sido as aulas de Matemática no Ensino Fundamental, elas não terão sido suficientes para desenvolver no estudante a competência da comunicação matemática. Ainda que uma parte dessa compreensão tenha se iniciado nos anos anteriores da escolaridade, será preciso o tempo do Ensino Médio para continuar aprendendo a se comunicar matematicamente.

Considerando que a linguagem matemática, como dissemos, é fundamentalmente difundida na escola e que tem características muito especiais, conseguir esse domínio não é simples, e as aulas de Matemática precisam ter espaço para que o estudante se aproprie cada vez mais das formas próprias de expressão nessa área do conhecimento. Para isso, é importante que:

- haja análise e discussão de diferentes representações matemáticas, convencionais ou criadas pelos estudantes, o que é possível conseguir fazendo, por exemplo, um painel com diferentes representações para uma dada situação-problema;
- ocorram momentos para discutir os diferentes significados de um símbolo matemático, para que o professor, usuário fluente da comunicação matemática, interaja com os estudantes e seja exemplo para eles;
- sejam analisados erros nas escritas produzidas em sala de aula, de modo que os estudantes percebam o que é válido ou não em uma escrita matemática;
- haja momentos de leitura de textos matemáticos para que os estudantes tenham contato com uma escrita matemática produzida por um escritor mais experiente;
- ocorram discussões a partir do que os estudantes sabem sobre expressões matemáticas, para ampliar a compreensão a partir desse levantamento inicial;
- sejam usados dicionários nas aulas de Matemática;
- haja rodas de conversa sobre enunciados de problema ou termos matemáticos sobre os quais os estudantes têm dúvidas;
- os estudantes sejam estimulados a escrever uma explicação para um termo ou expressão matemática;
- haja análise do uso de uma mesma palavra em Matemática e em um contexto não matemático (por exemplo: Onde mais você já ouviu a palavra *domínio*? Que outros significados você conhece para a palavra *diferença* que não seja o da subtração? O que significa *face*, em Geometria e fora dela?);
- identificar em que contextos não matemáticos são usadas certas ideias matemáticas, como, por exemplo, a de funções.

Essas estratégias favorecem a criação de um ambiente de comunicação matemática e contribuem para o aprimoramento constante do estudante com relação às regras que orientam as representações matemáticas. Afinal, como se sabe, o domínio de uma linguagem implica saber pensar nessa linguagem, e isso só ocorre quando vivemos em um ambiente que propicia e exige tal forma de pensamento. Por isso, nesta coleção haverá muitas indicações para que professor e estudantes se dediquem a ler, escrever e discutir sobre Matemática nas aulas. Voltaremos a esse ponto quando falarmos das seções presentes nos três volumes da coleção.

IV. As competências em Matemática e nesta coleção

No sentido de auxiliar os professores, em cada unidade vamos detalhar as competências no âmbito da Matemática, explicitando o que se espera do estudante, com observações para o professor nos exemplos e nas atividades, bem como nos temas desenvolvidos no texto do livro que se aproximam mais de uma ou de outra competência ou habilidade pretendida.

No entanto, é preciso anunciar que algumas das seções desta coleção têm determinadas habilidades e competências como objetivos específicos. Como exemplos, a seção **Foco na leitura** trabalha a leitura do enunciado de problemas que utilizam diferentes tipos de textos e explicita estratégias de resolução; a seção **Foco na tecnologia** visa desenvolver o entendimento dos princípios e da função das tecnologias da comunicação e da informação no desenvolvimento do conhecimento, associando-o às linguagens que lhe dão suporte e aos problemas que se propõem solucionar.

Outro ponto que merece destaque é o fato de os textos destinados ao estudante terem sido escritos para serem acessíveis a ele, ou seja, os conteúdos e as deduções de propriedades ou fórmulas são explicados de modo detalhado, a fim de que o texto possa ser lido e compreendido pelo estudante. Assim, os objetivos de aprimorar a competência leitora e de aquisição e uso da linguagem matemática podem ser desenvolvidos em atividades individuais ou em grupo, nas quais o estudante deve ler os textos e as propostas de atividades, antes mesmo de receber as explicações do professor. Essa prática é muito valiosa para o desenvolvimento da autonomia do estudante em relação à busca de informações que dependem da leitura em Matemática.

Em Matemática, utilizaremos a matriz de referência do Enem (2009) para nos referirmos às habilidades específicas dessa área ao longo dos volumes que compõem esta coleção e das orientações ao professor. São sete competências e trinta habilidades que desvelam essas competências e se relacionam mais diretamente aos conteúdos e temas que organizam o ensino de Matemática.

Competência de área 1 — Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	
H1	Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações — naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2	Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3	Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4	Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 — Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.	
H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 — Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H10	Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11	Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12	Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13	Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14	Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 — Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H15	Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16	Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17	Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18	Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 — Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas, usando representações algébricas.	
H19	Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20	Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21	Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22	Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 — Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	
H24	Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25	Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26	Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 — Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	
H27	Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29	Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Na descrição das unidades e nos comentários ao professor nestas Orientações Didáticas, buscamos explicitar as competências e habilidades mais diretamente relacionadas ao que se propõe no texto para o estudante.

V. Temas e conteúdos

Seleção dos conteúdos

O primeiro critério para a seleção dos conteúdos desta coleção está no potencial de cada tema para o desenvolvimento das competências descritas no item IV, seguido de dois outros critérios: permitir ao estudante compreender a Matemática em suas diversas concepções e avançar no conhecimento da Matemática a partir do ponto em que se encontra. Com base nos PCNEM:

“(...) os temas selecionados devem ter relevância científica e cultural. Isso significa que, além das justificativas relativas às aplicações e à linguagem, sua importância está em seu potencial explicativo, que permite ao aluno conhecer o mundo e desenvolver sentidos estéticos e éticos em relação a fatos e questões desse mundo. (...)”

- Os temas devem, ainda, permitir uma articulação lógica entre diferentes ideias e conceitos para garantir maior significação para a aprendizagem, possibilitar o estabelecimento de relações de forma consciente no sentido de caminhar em direção às competências da área e, até mesmo, tornar mais eficaz a utilização do tempo disponível.
- É importante evitar detalhamentos ou nomenclaturas excessivos. (...)”

(PCN+ Ensino Médio, p. 119.)

A distribuição dos conteúdos em eixos

A proposta dos PCNEM organiza os conteúdos em três eixos estruturadores:

1. Números e Álgebra
2. Geometria e medidas
3. Análise de dados [Estatística e probabilidade]

Cada um desses eixos é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo.

Esses três eixos podem ser verificados na matriz de referência do Enem por meio da seguinte correspondência: as competências 1, 4 e 5 da matriz estão mais diretamente relacionadas ao eixo *Números e Álgebra*; as competências 2 e 3 correspondem ao eixo Geometria e medidas; as competências 6 e 7 cobrem o eixo de Análise de dados.

A opção da proposta pedagógica desta coleção é trabalhar por eixos. Isso significa que não basta tratar os conteúdos propostos para o Ensino Médio um após o outro, de modo linear, mas é preciso organizar o ensino para que muitas conexões possam ser aprendidas pelo estudante. Além disso, é importante lembrar que cada estudante aprende de modos diferentes e em tempos diferentes, o que significa que, se tratarmos apenas uma forma de pensar em Matemática, favoreceremos uns e excluiremos outros. De fato, cada eixo corresponde a uma forma de pensar que se revela nas competências explicitadas na matriz do Enem.

No Ensino Médio, o primeiro dos eixos, *Números e Álgebra*, trata de números e variáveis em conjuntos finitos e quase sempre contínuos. Os objetos principais de estudo são os campos numéricos dos números reais e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais.

No segundo eixo, *Geometria e medidas*, encontramos como objetos de estudo as formas planas e espaciais e suas representações na forma de desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto. As propriedades de que a Geometria trata são de dois tipos: associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas. Temos, assim, em Geometria, duas maneiras diferentes de pensar: uma delas relacionada à identificação de propriedades referentes a paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas; e outra que tem como foco quantificar comprimentos, áreas e volumes.

O terceiro eixo estruturador, *Análise de dados*, tem como objeto de estudo conjuntos finitos de dados, que podem ser numéricos ou informações qualitativas, o que dá origem a procedimentos bem distintos daqueles adotados para os demais temas, pela maneira como são feitas as quantificações, usando-se processos de contagem combinatórios, frequências, medidas estatísticas e probabilidades. Nesse eixo, percebe-se mais fortemente a preocupação com o desenvolvimento de competências relativas à contextualização sociocultural, que permite ao estudante avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando os conhecimentos adquiridos.

Encontramos nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* de 2006, para a área de Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias, indicações explícitas de cuidados com a escolha dos conteúdos nas afirmações.

“No que se segue, partimos do princípio de que toda situação de ensino e aprendizagem deve agregar o desenvolvimento de habilidades que caracterizem o ‘pensar matematicamente’. Nesse sentido, é preciso dar prioridade à qualidade do processo e não à quantidade de conteúdos a serem trabalhados. A escolha de conteúdos deve ser cuidadosa e criteriosa, propiciando ao aluno um ‘fazer matemático’ por meio de um processo investigativo que o auxilie na apropriação de conhecimento.”

(*Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. v. 2. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2006. p. 70.)

Nesse documento, os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos – *Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados [Estatística] e probabilidade* –, seguindo de perto as orientações já descritas nos PCNEM (1999) em relação à ênfase dada a cada um deles. Vale destacar um trecho das *Orientações* de 2006, que justifica algumas das escolhas e a forma como tratamos alguns conteúdos nesta coleção.

“Algumas vezes, de forma intencional, são retomados assuntos já tratados no ensino fundamental – é o momento de consolidar certos conceitos e ideias da matemática escolar que dependem de explicações cuja compreensão exige uma maior maturidade. Sugestões quanto à forma de trabalhar os conteúdos acompanham o detalhamento sempre que possível, destacando-se o valor formativo agregado e descartando-se as exigências de memorização, as apresentações de ‘regras’ desprovidas de explicações, a resolução de exercícios repetitivos de ‘fixação’ ou a aplicação direta de fórmulas.”

(Ibidem, p. 70.)

Nesta coleção, usaremos a organização em eixos proposta pelos PCNEM, sem que haja qualquer discordância entre essa e a proposta das *Orientações* de 2006.

De qualquer forma, escolhida uma ou outra organização dos conteúdos, o importante é que no planejamento de cada semana sejam contemplados ao menos dois eixos, especialmente aqueles que permitem ao estudante vivenciar formas distintas de pensar, diferentes modelos e procedimentos e aplicações diversas.

Por esses motivos, alguns temas foram distribuídos ao longo dos três volumes desta coleção e outros são retomados em todos os volumes, como é o caso de Estatística e Trigonometria. Ao mesmo tempo que o estudante tem contato com diferentes formas de pensar em Matemática, ele revê e aprofunda conceitos e procedimentos estudados no Ensino Fundamental e no ano anterior.

Além disso, a cada volume, sempre que o tema é revisitado para aprofundamento ou na seção **Aprender a aprender**, as ideias essenciais voltam a cada série, permitindo ao estudante aprendizagens de maior significação nas novas relações que se acrescentam com os conteúdos em estudo.

A ordem dos conteúdos

Uma característica desta coleção que pode provocar algum estranhamento é a mudança na ordem de alguns conteúdos em relação à ordem tradicionalmente presente nos textos didáticos para o Ensino Médio. O motivo dessas mudanças está em estudo feito com estudantes e professores visando permitir maiores e mais frequentes conexões entre diferentes conceitos e ideias, bem como uma abordagem histórica entre diferentes conceitos, de modo a ampliar-lhes o significado e, especialmente, considerar a forma e o tempo que um estudante tem para aprender alguns conceitos em toda a sua complexidade.

Por isso, no volume do 1º ano, o estudo de *Estatística* antecede o de *funções*, a fim de que o estudante possa ler e interpretar gráficos, incluindo os gráficos em linhas (também chamados de gráficos de segmentos). A intenção é partir de gráficos que tragam informações do universo mais próximo aos estudantes, explorar a leitura e a interpretação de textos em forma de gráficos e tabelas e retomar algumas propriedades dos campos numéricos para depois estender com naturalidade o que aprenderam para o estudo do gráfico cartesiano de funções.

Nesse mesmo volume, a unidade sobre *progressões* antecede o estudo de *funções exponenciais e logarítmicas* por diversas razões. A primeira delas é permitir ao estudante conhecer funções cujos domínios são conjuntos discretos. Em segundo lugar, para dar maior significado ao crescimento exponencial e compreensão da função exponencial. E, finalmente, porque, a partir das progressões aritméticas e geométricas e de seu desenvolvimento na história da Matemática, é possível mostrar ao estudante o significado dos logaritmos e seu valor para a realização de cálculos que hoje são executados com o simples teclar em uma calculadora científica.

No volume do 2º ano, também buscando favorecer a compreensão do estudante por uma abordagem próxima ao desenvolvimento histórico dos conceitos, organizamos o estudo de *sistemas lineares* antes da apresentação de *matrizes* e *determinantes*. Assim, quando esses dois últimos temas são apresentados, o estudante sabe sua origem e utilidade e terá ao final o conhecimento para decidir sobre o melhor método para a resolução de um sistema.

A principal modificação está na distribuição da *Trigonometria* ao longo dos três volumes da coleção. Essa decisão teve como base o tempo que os estudantes precisam para aprender os conceitos e as relações trigonométricas. No volume do 1º ano, estuda-se a *trigonometria do triângulo retângulo* e do *triângulo qualquer*, com ênfase no cálculo de distâncias inacessíveis. No volume seguinte, retomamos e ampliamos o assunto com o estudo das *funções seno, cosseno e tangente*, com foco no entendimento do *ciclo trigonométrico* e nas propriedades de periodicidade e comportamento dessas funções. No volume do 3º ano, as *razões trigonométricas*, suas propriedades e as funções são retomadas com um pouco da história de sua origem e a proposição de problemas mais complexos para serem resolvidos usando-se outros conteúdos estudados no 3º ano.

A *Estatística* também está distribuída ao longo dos três volumes pela importância que esse conteúdo possui, como linguagem cada vez mais usada pelos meios de comunicação e de divulgação para apresentar dados e justificar decisões.

Conteúdos opcionais

Alguns tópicos de conteúdos e até mesmo capítulos inteiros desta coleção podem estar acompanhados da indicação **conteúdo opcional**. Essa decisão foi tomada em relação a assuntos que não atendem à maioria dos critérios utilizados para a seleção dos conteúdos nesta coleção e que, portanto, podem ser desenvolvidos apenas em caráter opcional por não serem relevantes para a formação básica do estudante do Ensino Médio.

Esses assuntos são mantidos porque podem ser necessários ao estudante em algum processo seletivo para o Ensino Superior, ou pelo desejo de aprofundar seus estudos em Matemática.

Ao professor, acostumado a valorizar igualmente todos os conteúdos da Matemática, vale lembrar que, quando abrimos mão de assuntos que não são essenciais à formação do jovem neste momento da escolaridade — e que podem se constituir em obstáculos à aprendizagem — ou que são mera informação a ser usada em momentos pontuais, temos mais tempo para aprofundar conceitos que são realmente significativos para a formação matemática de qualquer pessoa, e não somente daquelas que seguirão alguma carreira ligada à Matemática.

Planejamento

De acordo com os PCNEM e a matriz de referência do Enem (2009), os temas e conteúdos desta coleção foram distribuídos nos três anos do Ensino Médio conforme a tabela a seguir, supondo um mínimo de quatro aulas semanais. No entanto, se em sua escola o número de aulas é inferior a esse, sugerimos que em seu planejamento não enfatize os temas da tabela destacados em *itálico*, podendo mesmo omiti-los.

Eixos/competências	1º ano	2º ano	3º ano
Números e Álgebra Competência de área 1: Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais. Competência de área 4: Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano. Competência de área 5: Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas, usando representações algébricas.	<ul style="list-style-type: none">Variação de grandezas: noção de função; funções analíticas e funções não analíticas; representação e análise gráfica.Sequências numéricas: progressões e noção de infinito; variações de forma exponencial ou logarítmica; <i>operações com funções</i>.	<ul style="list-style-type: none">Variação de grandezas: funções seno, cosseno e tangente.Sistemas lineares, matrizes e determinantes.	<ul style="list-style-type: none">Números complexos.Polinômios, equações polinomiais e funções polinomiais.Variação de grandezas: taxa de variação de grandezas.
Geometria e medidas Competência de área 2: Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela. Competência de área 3: Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	<ul style="list-style-type: none">Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras.Trigonometria: trigonometria do triângulo retângulo e do triângulo qualquer.	<ul style="list-style-type: none">Trigonometria: trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta (revisão e desenvolvimento do assunto).Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; corpos redondos; propriedades relativas à posição (interseção, paralelismo e perpendicularismo); <i>inscrição e circunscrição de sólidos</i>.Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado.	<ul style="list-style-type: none">Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; interseção e posições relativas de figuras.
Análise de dados Competência de área 6: Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação. Competência de área 7: Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	<ul style="list-style-type: none">Estatística: descrição de dados; representações gráficas.	<ul style="list-style-type: none">Estatística: análise de dados (média, moda e mediana).Contagem: princípio multiplicativo; problemas de contagem.Probabilidade: cálculo de probabilidades.	<ul style="list-style-type: none">Estatística: análise de dados (<i>variância e desvio padrão</i>).Probabilidade: possibilidades; cálculo de probabilidades; uso da probabilidade em Estatística.

VI. Projetos

Um dos recursos que podemos utilizar para desenvolver as ações pedagógicas na escola, de modo que as diversas competências estejam naturalmente envolvidas, é o trabalho com projetos. A realização de um projeto possibilita ao estudante desenvolver um tema de modo mais abrangente.

Um projeto aparece relacionado a uma ação específica, não repetitiva, com caráter eventualmente experimental, implicando uma estrutura particular e inédita de operações que permitem realizá-lo. A elaboração e a execução de um projeto encontram-se ligadas a uma “investigação-ação” que deve simultaneamente ser um ato de transformação e uma oportunidade de investigação e de formação, tornando-se, portanto, uma produção intelectual. Consiste em uma oportunidade para o estudante explorar uma ideia ou construir um produto que tenha planejado ou imaginado, e, por isso, o produto de um projeto deverá necessariamente ter um significado para quem o executa.

A elaboração de um projeto favorece novas aprendizagens: permite ao estudante ordenar conceitos e habilidades previamente dominados, a serviço de um novo objetivo ou empreendimento; possibilita ações de planejamento e desenvolvimento de estratégias para sua execução; exige organização e gestão de tempo, análise de limites e possibilidades de ação; solicita tratamento das informações e avaliação das ações empreendidas; exige cooperação, esforço pessoal etc., constituindo-se em um verdadeiro exercício de autonomia.

Retomando a publicação *Ensino Médio Inovador* (2009), encontramos mais justificativas para a proposta de projetos a partir da disciplina de Matemática. Assim, por meio deles é possível:

- “Promover a aprendizagem criativa como processo de sistematização dos conhecimentos elaborados, como caminho pedagógico de superação à mera memorização; (...)
- Articular teoria e prática, vinculando o trabalho intelectual com atividades práticas experimentais; (...)
- Organizar os tempos e os espaços com ações efetivas de interdisciplinaridade e contextualização dos conhecimentos (...).”

(*Ensino Médio Inovador*, p. 19-20.)

VII. Avaliação

Na proposta que idealizamos para esta coleção, a **avaliação** serve para aconselhar, informar e indicar mudanças, funcionando em uma lógica cooperativa que faz do diálogo uma prática e da reflexão, uma constante. Para professores e estudantes, a avaliação pode fornecer uma visão cada vez mais detalhada sobre o processo de ensinar e aprender, devendo ser considerada elemento articulador do processo de ensino-aprendizagem pelo acompanhamento que faz das ações pedagógicas e de seus resultados junto aos estudantes.

Dessa forma, a avaliação de Matemática, para o professor, é a possibilidade constante de reflexão sobre o projeto pedagógico, suas metas, suas possibilidades e a localização de cada estudante em relação às metas estabelecidas. Já para o estudante, a avaliação tem a função de torná-lo ator e autor de sua aprendizagem. Assim, avaliar é uma ação regulada e refletida, que usa as informações coletadas por meio de diversos instrumentos, em função do valor atribuído à aprendizagem.

Sobre os instrumentos e as formas

Não existe processo de avaliação sem a reunião de dados para serem analisados; daí a importância dos instrumentos de avaliação, sua escolha e seus critérios de uso.

A seleção e a elaboração de um instrumento de avaliação têm início ainda durante o planejamento, quando o professor questiona: “O que ensino?”, “Por que ensino?”, “Os estudantes podem aprender isso?”. Tais questionamentos já apontam para a necessidade de refletir sobre as ações didáticas a fim de garantir o aprendizado dos estudantes.

O importante é que a avaliação forneça dados que possibilitem ao professor compreender o que foi aprendido ou não para fazer intervenções que permitam ao estudante avançar. Os instrumentos podem guiar o olhar do professor nesse sentido.

A variedade de instrumentos de avaliação favorece a individualização do processo de ensino e aprendizagem, permitindo que esta seja uma experiência que, embora se realize no coletivo, torne-se única para cada estudante.

Há instrumentos a serem utilizados que estão mais diretamente relacionados à obtenção de dados pelo professor. Embora o estudante seja chamado a colaborar, é o professor que centraliza as ações de reunião e análise de dados. É o caso da observação e do registro, da análise da produção dos estudantes, das provas e da análise de erros, que podem ser usados em vários momentos.

Há situações no próprio livro – quando se propõe ao estudante que organize o que aprendeu, que invente problemas, produza textos após um jogo, analise exercícios e problemas com erros na resolução – que podem ser utilizadas com finalidade avaliativa, não necessariamente para dar uma nota, mas para obter dados e planejar intervenções.

A autoavaliação é outro instrumento que pode ser usado com a finalidade de atribuir ao estudante a responsabilidade de avaliar a si mesmo, estimulando a reflexão sobre sua participação e aprendizagem. Cabe ao professor garantir as condições para que esse instrumento cumpra seu objetivo, o que, certamente, gerará dados valiosos sobre os estudantes e o processo de ensino. O professor pode planejar com a classe os itens que irão compor uma autoavaliação ou utilizar situações propostas no Livro do Estudante e que têm essa função, como a seção **Palavras-chave**.

O último instrumento é o portfólio, uma forma de documentar os trabalhos realizados pelo estudante, tais como pesquisas, gráficos, textos, problemas resolvidos etc., e arquivá-los em uma pasta. O portfólio pode ser entendido como um articulador dos demais instrumentos de avaliação, pois sua organização, realização e utilização o tornam o representante mais adequado para se fazer da avaliação um processo compartilhado entre professor e estudante. Pode-se propor o uso de portfólios durante a realização dos projetos apresentados nesta coleção.

O essencial nessa perspectiva é a decisão de colocar a avaliação a serviço do processo de aprendizagem. Isso faz com que os diversos instrumentos utilizados se organizem em torno de atividades que tenham sentido e relevância para o estudante, em detrimento de exercícios pontuais e artificiais. Dessa forma, a avaliação torna-se, simultaneamente, uma situação de ensino e de aprendizagem.

VIII. Estrutura da obra, sugestões de utilização e competências envolvidas

Nesta coleção, os textos e as atividades foram idealizados para auxiliar o professor no desenvolvimento das aulas, especialmente no que diz respeito à fundamentação teórica de cada tema e também para permitir ao estudante desenvolver autonomia em relação à leitura e à compreensão dos assuntos abordados. Para tanto, o texto possui uma linguagem precisa, sem os exageros do formalismo excessivo. Os exemplos e as atividades resolvidas complementam as explicações e permitem ao estudante refletir sobre a teoria apresentada.

Ao longo do texto, em comentários para o professor, sugerimos formas diferenciadas para o uso do livro em sala de aula.

Para o estudante são propostas ações, tais como:

- procurar por palavras desconhecidas no texto;
- reler o texto e destacar as ideias centrais;
- discutir com um colega sobre o que compreendeu.

Essas e outras solicitações têm como objetivo desenvolver no estudante hábitos de estudo e autonomia na busca de informações.

Ao planejar as aulas, o professor deve analisar as orientações que são dadas a ele e aquelas que se destinam ao estudante; assim, poderá compreender melhor e otimizar a proposta pedagógica desta coleção.

Sugestões de utilização:

O professor pode diversificar sua aula organizando a classe em duplas ou grupos e pedindo aos estudantes que leiam o texto sobre o assunto que será abordado. Eles devem procurar entender o que o livro explica sobre o tema, discutir o texto, anotar dúvidas e procurar no dicionário palavras desconhecidas. Além disso, podem produzir, em grupo ou individualmente, um pequeno relatório de leitura, que será apresentado à classe para uma discussão final mediada pelo professor, o qual fará as intervenções necessárias para esclarecer dúvidas e complementar informações.

A seguir, apresentamos as seções que compõem cada volume e que visam concretizar a proposta didática desta coleção.

De olho na resolução

Nesta seção, além das atividades resolvidas, há várias solicitações para que uma ou outra atividade seja retomada a fim de auxiliar o estudante na resolução de outros problemas.

Fique conectado

Neste box há sempre a sugestão de algum material complementar (texto, *site* ou vídeo). Essas indicações permitem aos estudantes se organizar para ler ou assistir em momentos outros, que não necessariamente em aula.

Os assuntos selecionados podem ou não ter relação com os temas da unidade. A ideia central é propiciar ao estudante o prazer de conhecer e aprofundar um assunto, bem como ampliar o conhecimento matemático.

Os livros sugeridos são de natureza diversa: há textos jornalísticos, narrativos, de divulgação científica, paradidáticos, entre outros.

Os vídeos e filmes estão, em geral, disponíveis na internet

Sugestões de utilização:

- O professor lê os textos ou assiste aos vídeos sugeridos e faz comentários sobre eles, de modo a despertar o interesse dos estudantes.
- Os estudantes leem os textos ou assistem aos filmes ou vídeos individualmente, sem que haja necessidade de qualquer ação além de conhecer.
- Os estudantes podem, em uma data previamente combinada, conversar sobre o que compreenderam, suas dúvidas e impressões.
- Os estudantes podem escrever um comentário a respeito do que aprenderam em um grupo criado por eles em uma rede social ou por *e-mail*, por exemplo. Eles podem emitir sua opinião sobre o texto ou mesmo se recomendariam ou não essa leitura para alguém.
- A turma pode criar um *blog* para registrar resenhas ou críticas sobre os textos lidos e os filmes ou vídeos assistidos.
- Ao longo de um semestre, pode-se criar um jornal de resenhas de textos e vídeos que envolvam a Matemática.

Nossa observação mais enfática é que **em hipótese alguma as leituras sejam utilizadas para fazer provas** ou para premiar os estudantes com acréscimos nas notas. A intenção é que a leitura seja vista como opção para saber mais, como forma de a Matemática contribuir para a cultura geral do estudante e que, portanto, seja um valor pelo conhecimento que propicia.

Fazer e aprender

Com o objetivo de que o estudante desenvolva habilidades por meio da resolução de uma grande variedade de problemas, essa seção traz diversas atividades que proporcionam a reflexão e a prática dos temas abordados no capítulo, além de permitir ao estudante que faça relações entre os diferentes assuntos do livro e, progressivamente, desenvolva raciocínios mais elaborados e originais. Essas sequências de atividades podem ser mais ou menos longas, dependendo da profundidade exigida pelo referencial teórico. Sempre que o assunto permite, a seção apresenta problemas relacionados com outras áreas do conhecimento ou com assuntos do dia a dia.

Em boxes ao longo das atividades, incentivamos o estudante a:

- retomar uma atividade resolvida que possa auxiliá-lo na resolução de um problema proposto;
- relacionar duas ou mais atividades buscando alguma regularidade entre elas;
- destacar uma atividade por sua complexidade ou por permitir alguma aplicação interessante.

Nesse processo, exige-se do estudante maior reflexão, permitindo que ele ganhe ferramentas mais valiosas do que a simples busca da resposta correta.

Sugestões de utilização:

O professor pode propor ao estudante que os problemas sejam resolvidos individualmente, em duplas ou em grupos, selecionando alguns para serem feitos em classe, sob sua supervisão, e outros como tarefa extraclasse, a fim de que o estudante desenvolva um trabalho autônomo.

Sugerimos que você desafie o estudante a encontrar diferentes modos de resolver um mesmo problema, discuta a possibilidade de um problema ter mais de uma resposta e estimule trocas de pontos de vista entre os estudantes. Também consideramos importante fazer, com a classe, a análise e a checagem da razoabilidade das respostas obtidas.

Pode ficar a critério do professor e de sua turma a resolução de todos os problemas e exercícios propostos ou a seleção de uma parte deles para essa finalidade.

Invente você

Acreditamos que o estudante deve ser capaz não só de resolver as atividades propostas no livro ou pelo professor, mas também desenvolver a habilidade de criar atividades. Por meio desse procedimento, ele sente que pode participar do fazer matemático e adquire noções sobre a forma de utilização da linguagem matemática, reflete acerca de seus próprios procedimentos e escreve sobre o que é significativo para si. O professor, por sua vez, tem elementos para avaliar dúvidas, progressos e necessidades do estudante.

Essa tarefa permite também que o estudante perceba a relação existente entre dados, pergunta e resposta, bem como a maneira de articular esses três elementos em um problema. As atividades propostas nessa seção são diversificadas, para que o estudante invente problemas parecidos com outros já resolvidos por ele, a partir de uma expressão, de uma pergunta, da resposta etc.

Sugestões de utilização:

O que fazer com os problemas formulados pelos estudantes? Certamente, essa é uma pergunta que o professor se faz. Algumas possibilidades são:

- sortear alguns problemas formulados e propor à classe que os resolva;
- distribuir os problemas formulados entre os estudantes para que cada um resolva o problema elaborado pelo colega;
- elaborar uma lista com todos os problemas para que os estudantes os resolvam;
- escolher um problema cuja formulação esteja incompleta ou malfeita para trabalhar como texto a ser reelaborado em conjunto com a classe.

O mais importante nesse processo é que o estudante sinta que escreve para um leitor, e não apenas para o professor, pois isso estimula o aperfeiçoamento das produções. Se os problemas produzidos apresentam uma linguagem confusa, estão sem perguntas ou não têm dados suficientes para a resolução, isso será percebido na hora em que o colega for resolvê-lo, e o professor poderá discutir cada problema com a classe, tratando-o como um texto que necessita de reformulação.

Nas orientações que aparecem nas laterais para o professor, também há indicações sobre como explorar a elaboração de problemas com os estudantes.

Foco...

Com três objetivos complementares, essa seção busca destacar aspectos essenciais da aprendizagem matemática, como a capacidade de raciocinar de modo lógico por dedução, a habilidade de leitura e resolução de problemas com textos mais longos ou mais complexos e a capacidade de utilizar recursos disponíveis nos computadores.

Dadas as suas características, ela se desdobra em quatro seções ao longo dos capítulos:

- **Foco no raciocínio lógico**
- **Foco na leitura**
- **Foco na tecnologia – computador**
- **Foco na tecnologia – calculadora**

Foco no raciocínio lógico – Essa seção tem como propósito fazer com que os estudantes resolvam problemas não convencionais. Esses problemas não estão relacionados ao tema do capítulo em que se encontram, mas não podem ser resolvidos com a aplicação direta de uma equação ou outro processo algorítmico, exigindo sempre do estudante certa dose de reflexão, criatividade e originalidade. Os problemas propostos envolvem as mais diversas habilidades e estratégias de resolução: tentativa e erro; resolução por tabelas, diagramas ou desenhos; busca de regularidade; conjectura e levantamento de hipóteses etc.

Nos três volumes, há uma grande variedade de problemas, dentre os quais destacamos os chamados problemas de lógica e os de estratégia, que exigem raciocínio dedutivo e cuja resolução depende do levantamento de hipóteses e da sua checagem imediata.

Sugestões de utilização:

Esses problemas podem ser propostos em classe para serem resolvidos, preferencialmente, em duplas. Mais do que em outros casos, a análise dos enunciados, a confrontação das soluções e a discussão das possibilidades de resolução são elementos essenciais na abordagem dos exercícios.

O trabalho com esses problemas torna-se mais eficaz se for constante, por isso sugerimos uma aula por quinzena, na qual o estudante tenha tempo para resolver e discutir ao menos um dos problemas propostos no livro. Eventualmente, é possível eleger algum dentre os mais complexos, como o “problema da semana”, ou seja, o estudante é desafiado a resolvê-lo no prazo de uma semana, durante a qual pode entregar soluções parciais, consultar os colegas e buscar diferentes resoluções, para, depois, em uma data combinada, apresentar seus registros e analisar as soluções encontradas.

Nossa experiência mostra que, em um primeiro momento, o estudante pode achar estranho resolver problemas tão diferentes, especialmente aqueles nos quais não aparecem números. No entanto, com o estímulo e o auxílio do professor, ele acaba sendo desafiado e é comum que passe a resolver os problemas dessa seção antes mesmo de o professor sugerir.

Foco na leitura – Essa seção é inovadora em termos de livros didáticos e seu objetivo é desenvolver a competência leitora dos estudantes, especialmente de problemas, bem como explicitar estratégias de resolução que podem ser incorporadas por eles e transferidas a outras situações – em Matemática e fora dela –, favorecendo a autonomia.

Sugestões de utilização:

O ideal é que haja primeiro uma leitura individual, para posterior socialização com colegas em pequenos grupos e, finalmente, com toda a classe. Eventualmente, no grupo podem aparecer outras maneiras de resolução dos problemas ou outras interpretações do texto, que podem enriquecer, e muito, a discussão coletiva final.

Foco na tecnologia – computador – Nesta coleção, consideramos que não é mais possível pensar na formação do estudante sem considerar a tecnologia da comunicação e informação (TIC), especialmente o computador. Em casa, nas comunidades em que vive e convive, o computador está cada vez mais acessível.

Faz parte da formação em Matemática contribuir para um uso refletido da TIC, a fim de que o jovem utilize esse recurso como ferramenta de investigação, pesquisa, aprendizagem colaborativa e, muito particularmente, na resolução de problemas.

Ao longo dos três volumes desta coleção, sempre que necessário e possível, propusemos atividades variadas que utilizam recursos diversos do computador e da rede mundial de informações (*web*), de modo a favorecer simultaneamente a aprendizagem da Matemática e dos recursos tecnológicos. A ideia é utilizar as novas mídias e tecnologias educacionais para favorecer as aprendizagens.

Optamos por recursos que comumente estão disponíveis nos *softwares* instalados nas máquinas e outros que são de acesso ou distribuição gratuita na internet, de modo que, caso a escola e os estudantes já disponham de acesso aos recursos da TIC, não haja impedimento para resolver os problemas propostos.

No texto do estudante, a cada recurso apresentado, há uma descrição de como acessar e utilizar o programa ou *software* da maneira mais simples possível. Assim, buscamos evitar dificuldades para aqueles que não têm familiaridade com o computador.

Sugestões de utilização:

- Nas aulas de Matemática, reservar um horário para realizar as atividades da seção nos computadores da escola.
- Procurar a comunidade para fazer uso de computadores disponíveis em centros de convivência ou comunitários.
- Incentivar os estudantes que dominam os recursos da tecnologia a trabalharem auxiliando aqueles com mais dificuldade.
- Depois das propostas realizadas, os estudantes podem discutir sobre suas aprendizagens tecnológicas, além das regularidades e propriedades matemáticas que são os objetivos da atividade proposta.

Foco na tecnologia – calculadora – Sabemos que não é mais possível pensar em um ensino de Matemática que desconsidere o uso das tecnologias de informação e comunicação, tanto para aumentar a eficácia do ensino quanto para desenvolver no estudante o senso crítico, o pensamento hipotético e dedutivo, a capacidade de observação e de pesquisa e as estratégias de comunicação.

Esse é um dos motivos que nos levaram a, nos três volumes desta coleção, enfatizar o uso da calculadora. Esse uso é previsto especialmente nessa seção, mas há também algumas passagens da obra em que sugerimos que ela seja utilizada na resolução de problemas propostos, como nas unidades que tratam de Estatística, Funções exponenciais, Logaritmos, Trigonometria e Matemática financeira.

A calculadora ainda é um tabu nas aulas de Matemática; geralmente, os argumentos mais comuns contra o seu uso no Ensino Médio são que o estudante “desaprende” como fazer cálculos, torna-se dependente da máquina, calcula mecanicamente e não poderá usá-la em exames ou provas. Gostaríamos de, ainda que brevemente, refletir sobre algumas dessas justificativas.

Não é verdade que o estudante que não utiliza máquinas sabe fazer contas melhor e com mais consciência do que aquele que as utiliza. A falta de habilidade com cálculos é consequência da maneira mecânica e sem significado como ele é ensinado e da ausência de um trabalho efetivo com cálculo mental e estimativa, em todos os níveis escolares.

Quanto ao vestibular, não encontramos praticamente nenhuma situação em que os números envolvidos nas questões exigissem realmente o uso da máquina. Geralmente, as questões de vestibulares não são feitas para que o estudante mostre destreza de cálculo, mas para que utilize conhecimentos mais amplos e habilidades de pensamento matemático que, se espera, tenham sido desenvolvidas durante o aprendizado escolar. Além do mais, há universidades em diversas regiões do país em que o uso da calculadora é exigido desde os primeiros dias de aula,

e o que se vê ali são estudantes que não fazem a menor ideia de como realizar em suas máquinas nem mesmo um simples cálculo de porcentagem. Isso mostra que um dos papéis da escola – levar o estudante a dominar, minimamente, as tecnologias presentes em sua realidade – não está sendo cumprido.

Nossa experiência indica que, quando usada de modo planejado, a calculadora não inibe o pensamento matemático; pelo contrário, tem efeito motivador na resolução de problemas, estimula processos de estimativa e cálculo mental, dá chance aos professores de proporem problemas com dados mais reais e auxilia na elaboração de conceitos e na percepção de regularidades. A utilização da calculadora humaniza e atualiza as aulas e permite ao estudante ganhar mais confiança para trabalhar com problemas e buscar novas experiências de aprendizagem.

Sugestões de utilização:

O uso da calculadora deve ser totalmente livre nas unidades de Estatística, pois nelas o que está em foco são as relações apresentadas, e não os cálculos em si, que em sua maioria são complexos, envolvem muitos números e podem desviar a atenção do estudante do real objetivo dessas unidades.

Além das seções específicas, cada um dos três volumes desta coleção apresenta uma variedade de problemas e exercícios que podem ser resolvidos com o auxílio da calculadora. São problemas propostos em diferentes unidades, relativos a diversos temas, tais como: Inequações, Logaritmos, Trigonometria, Probabilidade, Contagem e Geometria métrica espacial. O professor deve, aos poucos, permitir que o estudante decida em que momento ele pode se valer da máquina para resolver cada problema.

Finalmente, ao professor cabe ainda a tarefa de elaborar outras situações nas quais as máquinas possam ser úteis. Ao professor preocupado com o estudante que não possui calculadora, lembramos que uma por grupo de quatro ou cinco estudantes é suficiente para a realização do trabalho, e que hoje existem calculadoras a preços acessíveis.

Aprender a aprender

Uma vez que o objetivo maior do ensino de Matemática é contribuir para o desenvolvimento autônomo dos estudantes, entendemos que não basta que aprendam os conceitos presentes em cada capítulo, é preciso que eles mobilizem conhecimentos diversos a qualquer tempo, em função de situações-problema que devem ou desejam enfrentar. Por isso, nesta seção o objetivo é manter vivas as principais ideias já estudadas, como forma de aprender a estudar e aprender o que é mais significativo em termos de conteúdos, procedimentos e formas de pensar que foram objetivos dos capítulos e, até mesmo, de anos anteriores.

Presente em todos os capítulos, essa seção permite inclusive a revisão de temas abordados no Ensino Fundamental à medida que se fazem necessários para a continuidade do estudo de cada ano do Ensino Médio. Assim, por exemplo, antes de começarmos a estudar Trigonometria, propomos em vários capítulos, nos problemas desta seção, atividades envolvendo o Teorema de Pitágoras ou a noção de semelhança.

Com essa abordagem é possível trabalhar nos três volumes com alguns dos temas mais centrais da Matemática no Ensino Médio, como Geometria plana e espacial, Trigonometria, Funções, Probabilidade e problemas de Contagem.

No volume do 1º ano, a maioria das propostas dessa seção retoma conceitos e procedimentos do Ensino Fundamental que são necessários para a aprendizagem dos temas abordados no livro. A partir do capítulo 7, passamos a propor também problemas envolvendo temas já desenvolvidos nos capítulos anteriores.

No volume do 2º ano, o **Aprender a aprender** enfatiza os conceitos desenvolvidos no volume anterior, bem como serve à revisão e à manutenção constantes dos conceitos e procedimentos desse volume.

Já no último volume, a seção ganha um caráter de revisão dos conceitos mais centrais abordados nos volumes anteriores.

Em especial, essa seção, do modo como está formulada no volume do 3º ano, pode ser usada pelos professores que desejarem fazer com a classe uma revisão para os exames de acesso ao Ensino Superior.

Sugestões de utilização:

Essa seção permite um trabalho mais livre tanto para o professor, que pode se valer das sugestões que demos anteriormente para utilizar os problemas que nela aparecem, quanto para os estudantes, que podem ter ali um incentivo para um estudo mais autônomo. Sugerimos ao professor que, ao planejar suas aulas, verifique atentamente o **Aprender a aprender** e analise se há atividades que gostaria que a classe resolvesse antes de algum capítulo que está por ser trabalhado, ou, ainda, se há atividades que possam servir para o estudante sanar dúvidas que forem surgindo ao longo dos capítulos e que se refiram a conteúdos que deveriam ter sido abordados antes, ou mesmo aos que foram apresentados ao longo do ano.

Para complementar

Presente em todos os capítulos, essa seção tem diversas funções, tais como:

- destacar ideias ou propriedades que serão usadas no desenvolvimento do tema em estudo;
- mostrar outra abordagem do tema em estudo, como a perspectiva da história da Matemática;
- trazer um novo conteúdo que permitirá melhor compreensão do tema em estudo;
- apresentar uma curiosidade ou aplicação do que está sendo estudado;
- gerar pesquisas em grupo, além das aulas, com o intuito de conseguir mais informações do que aquelas apresentadas pelo texto.

Sugestões de utilização:

Pela diversidade de propósitos que essa seção apresenta, sugerimos, nas orientações ao professor ao longo do livro, diferentes formas de uso em sala de aula para cada caso, indo desde a leitura individual, seguida de discussão com os demais colegas e sistematização final pelo professor, até a leitura coletiva compartilhada, seguida de debate ou simples síntese do que foi apresentado no texto. Essa seção, além de pautar-se na leitura, traz por vezes questionamentos que visam envolver o estudante na resolução de uma situação ligada ao tema.

Entre saberes

Articular teoria e prática em contextos significativos para o jovem, relacionando o que está sendo estudado a outras áreas do conhecimento, é a meta dessa seção.

Na maioria dos capítulos, encontram-se artigos de divulgação científica ou textos informativos, para estabelecer relações entre a Matemática, as diversas situações que se apresentam no dia a dia e outras áreas do conhecimento. Essa seção busca desenvolver no estudante a curiosidade e a motivação para querer saber mais, pois apresenta, em textos simples, curiosidades e aplicações da Matemática estudadas no capítulo em diferentes situações e áreas.

Ao final, o estudante se depara com uma proposta relacionada ao tema, seja um problema, uma pesquisa ou seu posicionamento pessoal.

Sugestões de utilização:

Ao professor, cabe incentivar a leitura dessa seção, discutir com a classe o que foi lido e, quando notar interesse, propor que sejam feitas pesquisas (bibliográficas, na internet ou com outros profissionais) para ampliar e aprofundar o conhecimento em relação ao tema. Essa seção pode servir também como base de pesquisa para trabalhos a serem apresentados em feiras de Ciências, artigos para o jornal da escola ou pequenas monografias.

Mundo plural

Essa seção complementa a proposta de **Entre saberes**. Enquanto esta última permite ao estudante conhecer aplicações, em outras áreas do conhecimento, dos temas explorados no capítulo, em **Mundo plural** ele se depara com temas atuais e relevantes relacionados aos conceitos tratados na unidade.

Ao final dessas seções o estudante é incentivado a se posicionar, exercendo o pensamento crítico, ou seja, é convidado a responder a uma questão fundamentado em seu conhecimento de mundo e nas aprendizagens adquiridas ao longo de cada unidade.

Alguns exemplos podem ser citados, como no volume do 1º ano, em que o estudante é solicitado a analisar um gráfico estatístico elaborado pela ONU, com previsão, até 2030, do número total de pessoas infectadas pela Aids em dois cenários, para, em seguida, refletir sobre possíveis ações que permitam que esse número siga decrescendo, como descrito no gráfico, nesse período de tempo. No volume do 2º ano, as questões de acessibilidade e de mobilidade urbana incentivam o olhar do estudante para sua realidade próxima e, no volume do 3º ano, uma das propostas é que o estudante se posicione sobre o controle de populações de animais em risco de extinção, tendo como base dados matemáticos limitantes do hábitat de um grupo específico de animais.

Essa seção, assim como as demais, exige planejamento, de modo que os estudantes possam ter tempo para refletir e, se preciso, buscar informações para se posicionar frente às questões propostas.

Palavras-chave

Essa seção foi concebida para levar o estudante a tomar consciência de fatos, conceitos e procedimentos que aprendeu ao longo de uma unidade, bem como dar ao professor uma dimensão das conquistas e dificuldades do estudante.

Ao final de cada unidade, a seção propõe que o estudante, individualmente, em duplas ou pequenos grupos, resuma as principais ideias contidas na unidade, ilustre seus resumos com exemplos e outras informações que julgar necessárias e ainda aproveite para fazer um balanço de seus conhecimentos.

A seção **Palavras-chave** tem ainda a finalidade de ensinar o jovem a estudar, uma vez que ele precisa voltar ao tema, identificar as ideias centrais e se deter em explicá-las com suas próprias palavras e exemplos criados por ele mesmo.

Sugestões de utilização:

O professor pode incentivar o estudante a fazer seu resumo ao longo do desenvolvimento da unidade ou ao final dela. Esse resumo pode ser em forma de texto, de quadro-síntese ou de tabela de dupla entrada que relacione as palavras-chave, suas definições correspondentes e seus exemplos.

Essa atividade pode ser feita de forma interdisciplinar com Língua Portuguesa para que os estudantes entendam o que é e como se faz um resumo, um quadro-síntese, um texto informativo.

A seção serve também como instrumento ao qual o professor pode recorrer para avaliar as necessidades e o progresso dos estudantes: ao ler os resumos, poderá analisar dúvidas e incompreensões, conhecimentos adquiridos e extrapolações que cada estudante conseguiu fazer.

Cálculo rápido

Ao longo da Educação Básica, os estudantes precisam adquirir habilidades em diferentes modalidades de cálculo: estimativa, com algoritmos pessoais ou convencionais, usando a calculadora e o cálculo mental.

Neste livro, o cálculo rápido ou cálculo mental destaca-se em uma seção especial, porque:

- relaciona-se à maioria das ideias importantes da Matemática – medidas, expressões algébricas, números reais, trigonometria, gráficos e estatística;
- propicia o desenvolvimento de importantes habilidades de pensamento – memória, busca de regularidades, análise e síntese;
- permite uma revisão de procedimentos de cálculo já explorados no Ensino Fundamental;
- permite eliminar passos intermediários da escrita matemática, especialmente no cálculo literal;
- valoriza caminhos pessoais na busca por solucionar um problema;
- fornece um meio de avaliar a razoabilidade da resolução de um problema ou cálculo;
- diminui os erros cometidos pelos estudantes na resolução de problemas diversos.

Para que o estudante desenvolva suas habilidades com cálculo mental e possa perceber seu valor, é preciso que na escola haja um tempo especialmente dedicado a essa finalidade. Por isso, incluímos a seção **Cálculo rápido** em todos os capítulos dos volumes de 1º e 2º anos e nos capítulos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 11 do volume do 3º ano.

É importante esclarecer que, em nossa concepção, o cálculo mental, como habilidade pessoal, se desenvolve progressivamente utilizando-se muitas vezes do apoio do cálculo escrito para etapas intermediárias até obter o resultado final. À medida que se desenvolve, as etapas escritas se abreviam até que ele seja feito quase exclusivamente de cabeça. Os procedimentos apresentados e vivenciados pelo estudante, mesmo que não sejam incorporados totalmente como ferramentas mentais, ao calcular de diferentes formas e refletir sobre diferentes técnicas, permitem a ele ser mais flexível ao pensar sobre números, grandezas e propriedades das operações, ao mesmo tempo em que se torna mais confiante em sua própria forma de pensar.

Para elaborar as propostas, pensamos em um programa que inclui a retomada de cálculo com números inteiros, racionais (incluindo decimais e porcentagem) e reais. Há propostas com previsão da ordem de grandeza de resultados de operações. Há sequências planejadas para explorar cálculo rápido com unidades de medida e outras para que os estudantes realizem cálculo mental envolvendo potenciação, álgebra e trigonometria.

Muitas vezes, a sequência proposta tem relação com o tema e as noções exploradas na unidade. Outras vezes, são propostas que preveem que um procedimento de cálculo seja mantido e aprofundado (um exemplo disso pode ser visto na seção **Cálculo rápido** do capítulo 2 do volume do 1º ano desta coleção).

Há atividades que têm como objetivo o desenvolvimento de estratégias pessoais de cálculo, permitindo ao estudante calcular do seu jeito e depois socializar sua forma de pensar com seus colegas de classe (por exemplo, a atividade 1 da seção **Cálculo rápido** no capítulo 1 do volume do 1º ano). Outras, mais frequentes, visam ampliar o repertório de técnicas de cálculo do estudante, mostrando a ele modelos de cálculo para que experimente utilizar e optar por utilizá-los ou não como ferramenta pessoais de cálculo (como exemplo, as atividades 2 e 3 da seção **Cálculo rápido** do capítulo 4 do volume do 1º ano).

Sugestões de utilização:

- Realizar as sequências durante as aulas para poder avaliar as dúvidas, as necessidades e os avanços dos estudantes.
- Dividir a lista proposta na seção para realizar os exercícios com os estudantes durante o estudo da unidade.
- Realizar, em sala, sessões de cálculo rápido duas vezes por semana, por períodos que não ultrapassem 10 minutos.
- Propor aos estudantes que avaliem suas habilidades com cálculo mental (o que fazem bem, que dúvidas apresentam, de que ajuda precisam...) e que planejem, se necessário, em conjunto com o professor, ações de intervenção (praticar mais atividades em que têm dificuldade; criar atividades parecidas com as que fizeram antes etc.).

Por dentro do Enem e dos vestibulares

Essa seção aparece ao final de cada unidade e tem como objetivo trabalhar a leitura e a resolução de questões típicas de processos seletivos, como o Enem.

Para tanto, selecionamos questões variadas que solicitam a leitura de diferentes formas textuais – verbal ou gráfica – e que permitem ao estudante aplicar as estratégias de resolução desenvolvidas na seção **Foco na leitura**, **Foco no raciocínio lógico** e na resolução dos problemas propostos a cada capítulo.

A expectativa é que eles possam conhecer melhor esses tipos de questões enquanto mobilizam conhecimentos diversos desenvolvidos no processo de aprendizagem proposto ao longo desta coleção.

Antes de demonstrar uma questão resolvida, apresentamos orientações que podem auxiliar na busca da resolução. Em seguida, o estudante se depara com a resolução completa da questão inicial, que pode confrontar com a sua forma de resolver a partir das orientações oferecidas pelo texto. Ao final, são propostas duas ou mais questões semelhantes, seja na forma textual ou no processo de resolução, nas quais o estudante pode aplicar o que aprendeu.

As questões finais dessa seção podem ser utilizadas como instrumentos de avaliação, tarefas extra classe ou, ainda, como objeto de discussão na sala de aula, em duplas ou pequenos grupos.

Projeto

Conforme descrito no item VI destas Orientações Didáticas, os projetos são propostas para a investigação e a ação dos estudantes suscitadas por um problema ou assunto a ser desenvolvido de modo mais abrangente, para além das páginas de um livro didático. Envolve muitas vezes a tomada de dados e a decisão pelas fontes para a busca desses dados, para que, em seguida, sejam organizados e descritos adequadamente. A linguagem matemática e a resolução de situações-problema acompanham todo o processo de desenvolvimento dos projetos propostos. Além de ser contexto natural para aprender Matemática, o trabalho com projetos permite o desenvolvimento das competências da área de forma integrada e natural.

Veja, a seguir, os projetos planejados para cada ano do Ensino Médio, detalhados nas considerações específicas de cada volume da coleção.

- 1º ano: “O município em que vivo” (unidade 1) e “Medindo distâncias inacessíveis” (unidade 4).
- 2º ano: “Um mundo de informações: infográficos” (unidade 2) e “Redes e mais redes” (unidade 4).
- 3º ano: “Matemática e Arte” (unidade 2).

Esses projetos são sugestões que podem ser aperfeiçoadas ou transformadas pelo professor. Com certeza, é possível propor outros temas para projetos após o estudo do que apresentamos no livro, em função do conhecimento que se tem dos estudantes, da prática profissional e das condições oferecidas pela escola.

Orientações específicas para este volume

Organização do trabalho com este livro

Este volume tem duas grandes metas. A primeira é apresentar os conteúdos (conceitos, habilidades e competências) que dizem respeito ao término dessa etapa da escolaridade, em continuidade ao que já desenvolvemos nos dois volumes anteriores. A segunda meta é proporcionar ao estudante uma revisão dos principais conceitos desenvolvidos no 1º e 2º anos e que costumam ser frequentes tanto nas ações do dia a dia quanto nos exames de seleção e mesmo no prosseguimento dos estudos superiores.

Assim, antes de apresentarmos os objetivos para este ano e os comentários específicos sobre os diversos capítulos e seções que compõem este volume, e que contemplam a continuidade do trabalho até agora desenvolvido, desejamos destacar que, acerca do trabalho visando à revisão dos conceitos:

- a seção **Aprender a aprender** apresenta, no geral, uma quantidade maior de atividades para aprofundamento e revisão, bem como uma abordagem diferenciada em alguns capítulos, com revisões conceituais;
- incluímos um capítulo sobre Matemática financeira para, entre outras coisas, proporcionar uma revisão contextualizada de algumas noções matemáticas (ver comentários adiante).

A seguir, apresentamos os objetivos do trabalho com a Matemática no 3º ano do Ensino Médio, que orientaram a organização deste volume da coleção.

O livro e o tempo das aulas

Uma vez que o trabalho com os diversos eixos permite o desenvolvimento de habilidades diferenciadas, pois cada eixo tem como característica formas de pensar específicas, sugerimos que, ao fazer o planejamento com este volume do 3º ano, a cada semana, as aulas abordem pelo menos dois eixos. Por exemplo, Matemática financeira, Geometria analítica e Estatística (unidades 1 e 2), Álgebra e Funções (unidades 3 e 4) podem dividir as aulas a cada semana. Por outro lado, é importante que uma aula semanal se destine ao trabalho com as seções especiais: **Foco no raciocínio lógico**, **Aprender a aprender**, **Invente você**, **Palavras-chave**, **Cálculo rápido**, **Entre saberes** e **Mundo plural**.

No caso de serem programadas apenas três aulas semanais de Matemática, sugerimos que, antes de qualquer decisão, o professor considere o que é essencial para os estudantes e escolha capítulos ou partes deles, com o objetivo de garantir a diversidade dos eixos nas aulas.

Assim, a cada semana os estudantes terão oportunidades de vivenciar atividades que exigem deles habilidades específicas diferentes e situações-problema bem diversificadas, de modo a garantir seu interesse e envolvimento com o projeto pedagógico desta coleção.

Objetivos relacionados aos capítulos e aos conteúdos

Eixo estruturador	Capítulos e seções deste volume	Habilidades e competências priorizadas	Objetivos específicos
Números e Álgebra	Capítulos 1, 8, 9, 10, 11 e 12 Aprender a aprender dos capítulos 1, 2 e 3	<ul style="list-style-type: none">• Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar as relações entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da Matemática.• Ler e interpretar diferentes linguagens e representações.• Construir modelos que correspondam a fenômenos periódicos.	<ul style="list-style-type: none">• Identificar diferentes campos numéricos e suas propriedades.• Resolver problemas que envolvam cálculo de aplicações financeiras.• Relacionar cálculo de juros simples e compostos a conceitos de função afim, função exponencial e logarítmica.• Reconhecer funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas.• Identificar um número complexo por sua forma algébrica, gráfica e trigonométrica.• Resolver equações do 2º grau cujas raízes não são reais.• Compreender um polinômio de grau qualquer.• Utilizar noções sobre polinômios no estudo de funções e na resolução de problemas algébricos.

Eixo estruturador	Capítulos e seções deste volume	Habilidades e competências priorizadas	Objetivos específicos
		<ul style="list-style-type: none"> Identificar em dada situação-problema as informações ou variáveis relevantes e elaborar possíveis estratégias para resolvê-la. Articular, integrar e sistematizar fenômenos e teorias dentro de uma ciência e entre as várias ciências e áreas do conhecimento. 	<ul style="list-style-type: none"> Construir, ler e interpretar gráficos de funções. Analisar gráficos e leis de funções para estabelecer sinal, crescimento, decrescimento, domínio e imagem. Determinar as raízes de uma equação polinomial. Estudar relações entre coeficientes e raízes. Pesquisar raízes racionais inteiras e complexas de equações polinomiais.
Geometria e medidas	<p>Capítulos 4, 5, 6, 7 e 11</p> <p>Aprender a aprender dos capítulos 4, 5, 6 e 7</p>	<ul style="list-style-type: none"> Utilizar e interpretar modelos para resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis. Compreender o conhecimento tecnológico como resultado de uma construção humana em um processo histórico e social. Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre diferentes temas. Reconhecer e avaliar o desenvolvimento tecnológico contemporâneo, suas relações com as ciências, seu papel na vida humana, sua presença no dia a dia e seus impactos na vida social. 	<ul style="list-style-type: none"> Identificar simetria axial e suas propriedades em figuras planas. Identificar posições relativas entre retas (paralelas e perpendiculares). Resolver problemas que envolvam a noção de distância entre dois pontos e a condição de existência de triângulos. Resolver problemas que envolvam o cálculo da distância entre ponto e reta, bem como o cálculo da área de triângulos. Determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir de sua equação. Identificar as posições relativas entre ponto e circunferência, entre circunferência e reta e entre duas circunferências. Compreender o conceito de elipse e hipérbole e ampliar a compreensão sobre parábolas. Compreender como podem ser obtidas as cônicas a partir de diferentes situações. Interpretar as cônicas graficamente. Resolver problemas que envolvam as cônicas e suas equações. Desenvolver o conceito de razões trigonométricas. Conhecer e aplicar, na resolução de problemas, as relações fundamentais entre razões trigonométricas. Resolver problemas que envolvam triângulos retângulos. Resolver problemas que envolvam triângulos quaisquer. Identificar domínio, imagem, sinal, periodicidade e raízes na representação das funções seno, cosseno e tangente.
Análise de dados	<p>Capítulos 2 e 3</p> <p>Aprender a aprender do capítulo 8</p>	<ul style="list-style-type: none"> Identificar formas de quantificar dados numéricos ou informações. Ler e interpretar dados e informações apresentados em diferentes linguagens e representações. Compreender e emitir juízos sobre informações. 	<ul style="list-style-type: none"> Resolver problemas que envolvam coleta, organização e representação de dados. Utilizar porcentagem em cálculos estatísticos. Compreender o conceito de probabilidade frequencista. Elaborar gráficos de probabilidade. Calcular média, variância e desvio padrão. Compreender o conceito de distribuição normal. Identificar e utilizar a curva de distribuição normal e, em particular, a curva de Gauss na análise de dados estatísticos. Desenvolver estratégias pessoais para compreender e analisar fenômenos do dia a dia.

Considerações sobre os capítulos e seções

Unidade 1 – Matemática em contextos

Capítulo 1– Noções de Matemática financeira

Esse capítulo foi escolhido para ser o primeiro deste volume que encerra o estudo na Educação Básica, porque permite alcançar vários objetivos, entre eles:

- recordar conteúdos de Matemática elementar, bem como a linguagem matemática relacionada a situações financeiras;
- retomar os conceitos de funções afim, exponencial e de logaritmo;
- resolver problemas diversos, muitos deles com excesso de informações, o que permite desenvolver as habilidades de leitura, análise de dados e tomada de decisão.

Após a introdução da terminologia relacionada à Matemática financeira e uma breve recordação sobre cálculo de porcentagens, o foco está na proposição e na resolução de problemas diversos, muitos com excesso de dados e textos mais elaborados para sua leitura. O cálculo com porcentagens é retomado na seção **Cálculo rápido**.

Observe que, ao longo do capítulo, nas laterais das atividades, há várias sugestões para a ação em sala de aula, algumas para os estudantes e outras para o professor. É importante analisar com mais atenção as recomendações para o desenvolvimento da habilidade de leitura. Em especial a seção **Foco na leitura**, que nesse capítulo apresenta uma sugestão de estratégia de leitura para que o estudante reflita sobre como realiza a leitura de textos mais longos e complexos. E na seção **Para complementar** da página 15, o estudante pode conhecer um pouco da história e das pessoas que desenvolveram o conteúdo matemático para responder a questões bem práticas em diferentes momentos e países.

A proposta da seção **Fique conectado** pode ser interessante para uma roda de conversa a respeito do significado de erros e arredondamentos. Cabe bem neste capítulo e também para os de Estatística e Probabilidade que virão mais adiante.

Nos tópicos 3, 4 e 5, é feita a sistematização que diferencia juros simples de juros compostos. Propomos aos estudantes que pesquisem dados atuais de valores cobrados em multas e empréstimos bancários, de financeiras e no comércio, como forma de investigar e se posicionar criticamente diante de situações vividas por eles ou por seus familiares.

Durante a resolução das atividades R1, R10 e R12 há menção ao uso de calculadora comum e científica, especialmente para o cálculo de potências. Se necessário, consulte o volume do 1º ano ou proponha outros cálculos semelhantes para que os estudantes se apropriem dos recursos da máquina.

Na seção **Para complementar** da página 23, os estudantes relacionarão as situações de juros simples e compostos a representações gráficas de funções afim ou exponenciais, o que lhes oferece outro recurso para entender a diferença e o comportamento de crescimento ou decrescimento dessas duas situações de variação do valor montante.

A seção **Aprender a aprender** desse capítulo traz um breve resumo do que os estudantes devem saber sobre funções afim, com as informações essenciais para a continuidade dos estudos em Matemática. Proponha os problemas e verifique se os estudantes encontram diferentes formas de resolução; socialize as diferentes formas encontradas e analise com a classe o que foi preciso saber sobre funções afim em cada um deles.

Uma observação relevante é que, em todas as seções **Aprender a aprender** deste volume, preparamos revisões de tópicos importantes do Ensino Médio. Sugerimos que você analise cada um deles para programar revisões que poderão ser feitas em aulas especialmente planejadas para isso.

A seção **Mundo plural** desse capítulo orienta o uso de uma planilha eletrônica para o planejamento de gastos do estudante. Isso pode gerar um interessante trabalho dos estudantes na elaboração de suas planilhas de planejamento e controle de receita e despesas, de modo que tomem consciência do valor de que dispõem para seus gastos e de suas possibilidades.

Como nesse capítulo alguns estudantes terão o primeiro contato com as seções especiais **Palavras-chave**, **Foco no raciocínio lógico**, **Aprender a aprender** e **Mundo plural**, converse com eles sobre os objetivos de cada uma delas, conforme já está descrito nas páginas 302 a 309 destas Orientações Didáticas.

Ainda quanto ao planejamento, esse capítulo eventualmente exigirá algumas retomadas, à medida que o professor identificar alguma dificuldade dos estudantes com relação a números racionais, porcentagens e linguagem algébrica. No entanto, sugerimos que isso não paralise o estudo das atividades propostas no livro, pois, ao longo dos demais capítulos, os estudantes terão oportunidade para pensar novamente sobre esses conteúdos.

Pode-se aproveitar a seção **Palavras-chave** para realizar uma avaliação em duplas com os estudantes. Eles organizam o resumo sugerido e você avalia o que aprenderam, as dúvidas que ainda têm e onde precisam de ajuda. Também faz observações e devolve para que possam rever e reorganizar se for necessário. Esse procedimento avaliativo, em dois tempos, é um recurso interessante para que eles acompanhem a própria aprendizagem, reflitam sobre seus erros e ampliem a compreensão sobre os conceitos estudados.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos numéricos: porcentagem e juros; relação de dependência entre grandezas.
- Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; função afim (na seção **Aprender a aprender**); exponenciais e logaritmos.
- Habilidades: resolver situações-problema que envolvam conhecimentos numéricos ou algébricos; avaliar a razoabilidade de um estudo numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas; avaliar propostas de intervenção na realidade usando os conhecimentos aprendidos.
- Competências gerais e de área: com os significados dos números e as noções de variação de grandeza, fazer uso da linguagem matemática no estudo e na compreensão de fenômenos, no enfrentamento de argumentação consistente e na elaboração de propostas de intervenção na realidade.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Resolver problemas envolvendo cálculo de aplicações financeiras.
- Relacionar cálculo de juros a conceitos de função afim, exponencial e logaritmos.
- Utilizar os conhecimentos desenvolvidos no capítulo para a construção de argumentação consistente, a fim de justificar processos de resolução de problemas.

Capítulo 2 – Estatística

Nessa unidade, a opção foi tratar de temas que propiciassem ao estudante contextos significativos nos quais está presente a Matemática que ele vem estudando ao longo da Educação Básica.

Nesse capítulo e no próximo a proposta é ir além das aplicações diretas dos conceitos da Estatística básica e da Probabilidade para mostrar situações que podem ser modeladas para a tomada de decisão ou posicionamento crítico, ou seja, para que o estudante possa perceber como é possível decidir ou se posicionar com fundamentação.

De fato, espera-se que o estudante do Ensino Médio ultrapasse a simples leitura de informações, mas que possa refletir criticamente sobre seus significados.

Para efetivar esses objetivos, neste capítulo, retomamos os conceitos mais importantes desse conteúdo, apresentando no tópico 1 os objetivos da Estatística e os diferentes tipos de gráficos mais frequentes na organização e na representação de dados. Os objetivos dos problemas propostos são a leitura e a interpretação de gráficos diversos, bem como a resolução de problemas relacionados a eles.

Na seção **Foco na leitura**, são apresentadas informações usadas pelas Ciências Humanas na forma de diversos gráficos no mesmo sistema de eixos, o que requer do estudante análise mais cuidadosa em sua leitura. A propósito, o tema desenvolvido na sugestão apresentada no **Fique conectado** é bastante interessante para os estudantes dessa faixa etária. Vale a pena discutir e mesmo ler em conjunto com a turma.

Nos tópicos 2 – *Dados organizados em classes* e 3 – *Representação gráfica de uma distribuição de frequências em classes*, avançamos o estudo com a organização de dados em classes e a representação em polígonos de frequências. Nas atividades 10 e 11 da seção **Fazer e aprender**, os estudantes devem também construir histogramas, o que permite avaliar a compreensão dos conceitos e procedimentos estudados até esse ponto do texto.

Antes do tópico 4, sugerimos que os estudantes possam lembrar o que estudaram sobre as medidas de tendência central — média, moda e mediana — nos anos anteriores, de modo que seus conhecimentos prévios apoiem a ampliação que será feita dessas medidas para dados agrupados em classes. As diversas atividades resolvidas e as atividades propostas devem ser desenvolvidas pelos estudantes e debatidas em sala de aula, de modo que todos

possam perceber diferentes formas de resolução, bem como construir argumentações consistentes com o uso da linguagem matemática para se comunicar com os colegas da classe.

Na seção **Para complementar**, os estudantes conhecem a chamada curva de distribuição de dados, sem nenhum formalismo, mas de tal modo que possam visualizar o significado das medidas de tendência central nesse tipo de gráfico.

O tópico 5 é, de fato, novo para os jovens que estudam com os livros desta coleção e tem como objetivo apresentar medidas de dispersão — variância e desvio padrão. Para isso, optamos por trabalhar a partir de exemplos simples, antes de apresentar as expressões que definem esses conceitos. É mais importante a compreensão do significado dessas medidas do que seu cálculo. No entanto, nesse capítulo, nos deteremos no cálculo dessas medidas para, no capítulo 3, com o apoio da Probabilidade, dar maior significado às medidas de dispersão.

Em **Foco na tecnologia – calculadora**, apresentamos como obter as medidas de tendência central e de dispersão com uma calculadora programável no modo Estatística. Verifique se é possível obter uma calculadora desse tipo; caso contrário, a calculadora de qualquer computador possui esse recurso e pode ser usada pelos estudantes. Permita que eles investiguem esse recurso e troquem entre si as descobertas que fizerem sobre como calcular a média dos dados apresentados no texto do livro.

A seção **Aprender a aprender** desse capítulo retoma as propriedades das funções quadráticas. Observe que isso é feito de forma concisa, por meio de três afirmações. Cabe ao estudante pesquisar para explicar com mais detalhes o significado das propriedades das funções quadráticas. Peça a eles que consultem seus resumos durante a resolução das atividades 2 a 6 dessa seção, para verificar se o resumo feito é adequado e, se for o caso, para completá-lo com o que for preciso para a resolução dos problemas. Socialize os resumos dos estudantes e elabore com eles um mais completo, com a contribuição de todos. Esse texto coletivo pode ser anotado pelos estudantes e consultado sempre que necessário.

A seção **Mundo plural** desse capítulo mostra a Matemática, mais precisamente a Probabilidade, sendo usada na meteorologia e na climatologia e propõe uma pesquisa simples sobre o clima na região dos estudantes.

Como sugestão de avaliação, propomos que professor e estudantes realizem uma pesquisa em livros e *sites* de universidades, do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas (Obmep), entre outros. A proposta é identificar problemas de Matemática, ou mesmo de outras áreas, que envolvam os temas estudados nesse capítulo. Com os problemas coletados, organiza-se um banco de propostas; depois, são escolhidas algumas atividades para serem analisadas e solucionadas, em duplas ou individualmente: que conceito aparece na questão, o que ela exige para ser resolvida etc.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos de Estatística: representação e análise de dados; representação gráfica de uma distribuição de frequências em classe; medidas de tendência central; medidas de dispersão (variância e desvio padrão); funções quadráticas (na seção **Aprender a aprender**).
- Habilidades: utilização de informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências; calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequência ou gráficos; resolver problemas que envolvam conhecimentos de Estatística; utilizar conhecimentos de Estatística como recurso para a construção de argumentação e para avaliar propostas de intervenção na realidade.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
- Resolver problemas com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
- Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.
- Calcular medidas de tendência central ou de dispersão (desvio padrão e variância) de um conjunto de dados.
- Utilizar conhecimentos de Estatística para construir argumentação e avaliar propostas de intervenção na realidade.

Capítulo 3 – Probabilidade e Estatística

Nesse capítulo, buscamos completar a descrição e a representação de dados iniciadas no capítulo anterior e avançar na investigação sobre esses dados, de modo a permitir a compreensão e a tomada de decisões a partir das informações analisadas. Lembrando que:

“[A análise de dados] permite o desenvolvimento de várias competências relativas à contextualização socio-cultural, como a análise de situações reais presentes no mundo contemporâneo e a articulação de diferentes áreas do conhecimento. Contribui também para a compreensão e o uso de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e conhecimento de formas específicas de raciocinar em Matemática.”

(PCN + Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos PCN – Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, MEC/Semtec, 2002. p. 127.)

Por isso, a Probabilidade, aqui associada à Estatística, será o foco do estudo, para permitir ao estudante reconhecer que, em fenômenos aleatórios e eventos naturais, tecnocientíficos ou sociais, a Probabilidade possibilita prever resultados e a consequente tomada de decisões.

No entanto, é preciso lembrar que não se trata de um curso formal e aprofundado de Estatística, mas de tornar possível ao estudante entender como essa área do conhecimento pode organizar dados e orientar análises a partir deles.

O tópico 1 – *Recordando Probabilidade* traz uma breve retomada dos termos e das definições básicas da Probabilidade, com uma sugestão específica no livro do estudante de como encaminhar essa retomada com a classe.

Após a seção **Foco na leitura**, durante a resolução das diversas atividades propostas nesse capítulo, discuta com a classe as três formas de representar a probabilidade: como número fracionário, como decimal e na forma de porcentagem. Esse conjunto de problemas pode exigir um tempo maior em sala de aula, bem como uma pesquisa dos fatos e das propriedades da probabilidade que foram estudados em ano anterior. Sugerimos ao professor que disponibilize livros para consulta dos estudantes ou então os organize, de modo que, de uma aula para outra, busquem as informações necessárias para completar a resolução das atividades.

Para o estudo dos tópicos 2 e 3, os estudantes podem se organizar em grupos para leitura e discussão do texto e das atividades resolvidas da seção **De olho na resolução**. Em seguida, proponha a eles que, individualmente, resolvam as atividades da seção **Fazer e aprender** para, no final, discutir com o grupo as resoluções e eventuais dúvidas.

O tópico 4 – *Probabilidade frequencista e Lei dos Grandes Números* associa o conceito de probabilidade ao de frequência relativa e apresenta, na seção **Foco na tecnologia – computador**, da página 61, um *site* muito interessante, que permite a simulação de lançamento de moeda e dados para que os estudantes possam formular hipóteses e conhecer a Lei dos Grandes Números em situação experimental. A seção **Foco na tecnologia – computador** da página 69 traz uma proposta do uso de planilha eletrônica para o cálculo de desvio padrão.

No tópico 5 encontra-se a essência desse capítulo, onde estão relacionados os diversos conceitos estudados sobre Estatística e Probabilidade. Nas orientações para o estudante, sugerimos um *site* para a retomada dos conceitos de desvio padrão e variância, os quais são importantes para a compreensão do texto e a interpretação da curva normal e da zona de normalidade dessa curva, bem como da distribuição dos dados.

Na seção **Foco no raciocínio lógico**, aproveite para observar se os estudantes têm facilidade para resolver problemas desse tipo e analisar com eles como escolhem as estratégias que usarão para as resoluções.

Na seção **Aprender a aprender**, preparamos uma revisão cuidadosa sobre sistemas lineares. Além de um resumo com as ideias principais, há várias atividades para resolução e análise de sistemas e também propostas que favorecem o desenvolvimento de habilidades de leitura, escrita e argumentação.

Como instrumento de avaliação, sugerimos promover a correção em sala de aula dos exemplos criados pelos estudantes para o resumo proposto na seção **Palavras-chave**, trocando-se os textos de um estudante com outro para conferir e sugerir aperfeiçoamento ao texto do colega. Essas produções são registros para sua avaliação, analisando o avanço dos estudantes entre o texto original e o texto aperfeiçoado.

Ao final desta unidade, assim como nas três próximas, a seção **Por dentro do Enem e dos vestibulares** colabora para que o estudante aprenda a ler e enfrentar problemas presentes em processos seletivos para o ensino superior.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos: representação e análise de dados; representação gráfica de uma distribuição de frequências em classes; medidas de dispersão (variância e desvio padrão); sistemas lineares (na seção **Aprender a aprender**).
- Habilidades: utilização de informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências; calcular medidas de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências ou gráficos; resolver problemas que envolvam conhecimentos de Estatística; utilizar conhecimentos de Estatística como recurso para a construção de argumentação e para avaliar propostas de intervenção na realidade.

- Competências gerais e de área: interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendências, extrapolação, interpolação e interpretação; compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade, a fim de interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Obter médias e avaliar desvios de conjuntos de dados ou informações de diferentes naturezas.
- Compreender e emitir juízos sobre informações estatísticas de natureza social, econômica, política ou científica apresentadas em textos, notícias, propagandas, censos, pesquisas e outros meios.
- Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, tecnocientíficos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
- Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
- Identificar uma distribuição normal representada graficamente.

Unidade 2 — Geometria analítica

Capítulo 4 – Estudo analítico do ponto

Nessa unidade, propomos o estudo da Geometria analítica. Ao discutir o estudo analítico do ponto com os estudantes, pretendemos que eles comecem a estabelecer relações entre diferentes formas de estudar as propriedades geométricas. Em anos anteriores, os estudantes conheceram a Geometria plana euclidiana; agora, eles vão rever as relações entre figuras se transformarem em equações.

Na abertura da unidade e desse capítulo, o estudante terá a oportunidade de conhecer a história da origem do método de René Descartes (1596-1650) de unificação da Geometria e da Álgebra.

Ao longo do capítulo, sempre que preciso, relembre ou solicite aos estudantes que pesquisem o significado de conceitos geométricos, os quais podem ser objeto de muitas dúvidas. Sugerimos que eles elaborem um pequeno dicionário ou glossário pessoal (ao qual podem recorrer sempre que desejarem) com os termos desconhecidos e uma breve explicação ou desenho para cada um deles.

Em **Foco na leitura**, discutimos a estratégia mais usual para a resolução de problemas de Geometria analítica, ou seja, a importância de um esboço das figuras envolvidas no problema e a identificação do que se tem como dados, do que se quer responder, bem como a representação das relações geométricas por pares ordenados e equações. Ao longo do capítulo, peça aos estudantes que relembrem essa sequência de procedimentos na resolução de outros problemas.

A seção **Aprender a aprender** desse capítulo tem como foco a trigonometria no triângulo retângulo. Além da importância desse tema por suas aplicações (o bastante para ser retomado nessa etapa final da formação dos estudantes), ele será necessário para a resolução de vários problemas nos próximos capítulos. Sugerimos o trabalho em duplas ou trios, de modo que um estudante possa aprender com o outro e que, juntos, busquem as soluções para as dúvidas que porventura existirem.

Em **Foco na tecnologia – calculadora**, os estudantes podem retomar as funções das teclas de uma calculadora comum, enquanto resolvem os problemas propostos. Na seção **Foco no raciocínio lógico**, colocamos três problemas com estratégias diversificadas de resolução. Seria bom, ao final da discussão de cada um, que o professor pedisse aos estudantes para explicitar seu raciocínio de resolução, que tipo de obstáculos encontraram e como superaram cada um. Dessa forma, eles tomam consciência do que fizeram, como fizeram e por que fizeram, podendo inclusive aprender uns com os outros diversas estratégias de resolução. Essas reflexões permitem ampliar o repertório de estratégias de resolução e realizar o que chamamos de *processo metacognitivo*, que se relaciona com a consciência sobre a própria aprendizagem.

Na seção **Palavras-chave**, pode-se solicitar aos estudantes que consultem como se organizaram para fazer essa mesma seção nos capítulos anteriores e que agora usem o que foi aprendido para escrever as sínteses de suas aprendizagens sobre o estudo analítico do ponto.

Pode-se aproveitar a seção para realizar uma avaliação em duplas com os estudantes. Eles organizam o resumo sugerido e o professor avalia o que aprenderam, que dúvidas têm e em que precisam de ajuda. Faz observações e devolve os resumos para que os estudantes possam revê-los e reorganizá-los se for necessário. Esse procedimento avaliativo, em dois tempos, é um recurso interessante para que os estudantes acompanhem a própria aprendizagem, reflitam sobre seus erros e ampliem a compreensão sobre os conceitos estudados.

Na seção **Mundo plural**, os estudantes conhecem uma aplicação da Geometria analítica para o cálculo de áreas de regiões do planeta a partir de coordenadas definidas por satélites. Incentive a leitura e a discussão do tema. Os estudantes podem buscar o recurso citado no texto e aprender mais sobre seu uso e aplicações a partir das questões propostas no final dessa seção.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos algébricos e geométricos: plano cartesiano; propriedades de figuras planas, comprimentos, distância entre dois pontos; ponto médio de um segmento; trigonometria do triângulo retângulo (na seção **Aprender a aprender**).
- Habilidades: resolver situações-problema que envolvam conhecimentos algébricos e geométricos; utilizar esses conhecimentos como recurso para a construção de argumentos e para avaliar propostas de intervenção na realidade.
- Competências gerais e de área: modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas, usando representações algébricas e conhecimentos geométricos, bem como fazendo uso da linguagem matemática e de argumentações consistentes.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Resolver problemas envolvendo os conhecimentos geométricos estudados no capítulo (ponto médio, distância entre dois pontos, área de triângulo).
- Ler, interpretar e produzir textos matemáticos relativos aos conceitos abordados no capítulo.
- Justificar a resolução de problemas usando argumentação consistente.

Capítulo 5 – Estudo analítico da reta

Para apresentar os encaminhamentos escolhidos para esse capítulo e todo o estudo de Geometria analítica, citamos um trecho das orientações dos próprios parâmetros para o Ensino Médio (2002).

“A unidade Geometria Analítica tem como função tratar algebricamente as propriedades e os elementos geométricos. O estudante do Ensino Médio terá a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações.

O estudante deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente.

Então, mais importante do que memorizar diferentes equações para um mesmo ente geométrico, é necessário investir para garantir a compreensão do que a Geometria Analítica propõe. Para isso, o trabalho com este tema pode ser centrado em estabelecer a correspondência entre as funções de 1ª e 2ª graus e seus gráficos e a resolução de problemas que exigem o estudo da posição relativa de pontos, retas, circunferências e parábolas.”

(PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2002. p. 124.)

Observe que o texto do Livro do Estudante tem como foco determinar as formas mais usadas para a equação de uma reta e sua representação gráfica no plano cartesiano. Muitos conceitos de Geometria plana serão solicitados nos problemas propostos; por isso, sempre que se fizer necessário, retome com os estudantes as definições e propriedades das figuras planas. No entanto, evite responder diretamente a todas as dúvidas deles. Incentive-os a buscar as respostas no próprio livro ou mesmo fora dele, consultar colegas da classe e, se for preciso, material de anos anteriores. Lembre-se de que desenvolver a habilidade de busca de informações e tomada de decisões sobre a adequação das informações encontradas é uma das metas da formação dos estudantes do Ensino Médio.

A seção **Para complementar** da página 96 é muito importante, pois permite ao estudante relacionar diferentes conceitos e entender por que a determinação da equação da reta é feita como descrito no texto do Livro do Estudante. E ainda falando em leitura, na seção **Fique conectado**, há indicação de uma crônica cujo teor humaniza a figura dos matemáticos. Vale uma leitura e uma conversa sobre ela.

No tópico 2 – *Posições relativas entre duas retas*, retomamos a análise de sistemas de equações lineares do 1º grau, agora como equações de retas no plano. Estabelecer a posição de duas retas pela observação das relações de proporcionalidade entre os coeficientes das equações é uma demonstração do sentido do estudo da Geometria analítica, ou seja, resolver um problema geométrico pela Álgebra.

Nos tópicos 3, 4 e 5, sugerimos que seja enfatizada a relação entre a Geometria analítica e o que os estudantes trazem do estudo das funções afim. Isso fica reforçado na seção **Foco na leitura**. Ao trabalhar com essa seção, discuta com os estudantes qual das formas de resolver o problema é mais fácil ou mais simples, na opinião deles, e peça que justifiquem suas escolhas. Desse modo, é possível obter elementos para avaliar se é preciso trabalhar mais com a Geometria analítica ou com as funções afim.

As atividades das seções **De olho na resolução** e **Fazer e aprender** devem ser o foco do trabalho nesse capítulo. Já os tópicos 6 e 7 podem ser omitidos, pois não contêm conceitos essenciais para a continuidade dos estudos. No entanto, podem ser propostos como aprofundamento, na forma de trabalho diversificado, e para os jovens que desejam concorrer a processos seletivos ao Ensino Superior que apresentam esses temas em suas provas de acesso.

O tópico 7 – *Inequação do 1º grau com duas variáveis* tem como objetivos retomar parte da linguagem da Geometria plana e do que os estudantes aprenderam sobre funções afim e sobre a reta no plano cartesiano. Ele cumpre o papel de retomada e de avaliação do que foi estudado. Outra justificativa para esse tópico é sua aplicação para resolução de problemas de programação linear, como descrito na seção **Para complementar** na página 114.

Na seção **Cálculo rápido**, enfatizamos os cálculos algébricos e a resolução de sistemas 2×2 simples, que serão bastante exigidos neste volume, especialmente nos capítulos de Geometria analítica e Álgebra. Na socialização das respostas, solicite que, em cada um dos sistemas da atividade 4, os estudantes digam qual é a posição das retas correspondentes às equações, identificando quais pares de retas são perpendiculares. Teremos várias propostas de **Cálculo rápido** com Álgebra; algumas delas exigirão dos estudantes que usem lápis e papel, mas não há problema algum nisso, uma vez que o enfoque desses casos está nos procedimentos algébricos que vão auxiliar em cálculos mais complexos.

Em **Palavras-chave**, é solicitado ao estudante que faça um resumo a partir do que aprendeu sobre retas, na perspectiva da Geometria analítica. Essa atividade merece tempo e planejamento, pois o texto final deve servir ao estudante como fonte de consulta sempre que precisar, e isso, sem dúvida, deve acontecer várias vezes, quando da resolução dos problemas que serão propostos nos próximos capítulos.

Depois de pronto o resumo, vale a pena aproveitar para realizar uma avaliação em duplas com os estudantes. Eles organizam o resumo sugerido e o professor avalia o que aprenderam, suas dúvidas e em que precisam de ajuda. Feitas as observações pertinentes, devolve-lhes os resumos para que possam revê-los e reorganizá-los se for necessário. Esse procedimento avaliativo em dois tempos é um recurso interessante para que os estudantes acompanhem a própria aprendizagem, reflitam sobre seus erros e ampliem a compreensão sobre os conceitos estudados.

Na seção **Foco no raciocínio lógico**, as atividades 1 e 2 têm como intuito a organização de dados, exigindo do estudante um esquema, desenho ou outro procedimento que preferir para vislumbrar a relação entre os dados e propor alguma estratégia de resolução. Já a atividade 3 tem como objetivo a percepção visual do estudante e o conhecimento de que, para a composição de um mosaico, é preciso que cada um dos lados da peça se encaixe em outro lado de uma outra peça. A resolução pode exigir algum tempo, mas o investimento no desenvolvimento dessas habilidades, a capacidade de argumentação e o conhecimento das diferentes formas de solução encontradas pelos estudantes é um ganho significativo para toda a classe.

Em **Foco na tecnologia – calculadora**, os estudantes podem retomar o uso das teclas das quatro operações básicas.

A seção **Aprender a aprender** desse capítulo tem como objetivo retomar a Trigonometria no que se refere a cálculos com relações trigonométricas de um triângulo qualquer. Aproveite o problema proposto para discutir com os estudantes como calcular seno e cosseno de arcos quaisquer para a resolução de problemas tais como os apresentados no texto. Relembre os estudantes que, além da tabela trigonométrica, podem usar uma calculadora científica (relembre também como ela deve ser usada nesses cálculos). Pode-se propor essa revisão em uma aula por semana, enquanto se desenvolve o capítulo.

A seção **Entre saberes** desse capítulo traz um aspecto bastante importante da Matemática como ciência aplicada, no sentido de outras ciências encontrarem na linguagem e nos conceitos matemáticos formas de registrar ou representar leis ou regras que regem fenômenos diversos.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos algébricos e geométricos: representações no plano cartesiano e equações; interseção e posições relativas de retas; inequações do 1º grau com duas variáveis; trigonometria do triângulo qualquer (na seção **Aprender a aprender**).

- **Habilidades:** interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos; reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentos matemáticos, de acordo com suas características; associar situações-problema geométricas a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa; avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos e geométricos.
- **Competências gerais e de área:** fazer uso das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática (Álgebra e Geometria), estabelecendo conexões entre eles, a fim de modelar e resolver problemas diversos, utilizando os conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação consistente e propostas de intervenção na realidade.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Associar às situações-problema que envolvam conhecimentos geométricos suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa.
- Identificar posições relativas entre retas (paralelas e perpendiculares).
- Resolver problemas que envolvam posições entre retas e suas representações geométrica e algébrica.
- Utilizar a noção de coeficiente angular da reta na resolução de problemas.
- Resolver graficamente inequações do 1º grau com duas variáveis.

Capítulo 6 – Estudo analítico da circunferência

No Livro do Estudante, o pequeno texto de introdução desse capítulo explica o porquê da importância do estudo da circunferência. No entanto, ao longo do desenvolvimento do texto e das atividades, é preciso lembrar aos estudantes que, com a Geometria analítica, ele passa a resolver problemas que na Geometria clássica só podem ser obtidos pelo desenho geométrico; por exemplo, encontrar o centro de uma circunferência ou a determinação da reta tangente a uma circunferência passando por um determinado ponto.

As atividades R2 e R3 da seção **De olho na resolução** são exemplos de como a Geometria analítica trata problemas que a Geometria clássica resolve pelo desenho geométrico, com a diferença de que o desenho geométrico traça a circunferência, enquanto a Geometria analítica determina a equação da circunferência, sem que seja necessário um desenho preciso.

Na seção **Fazer e aprender**, da atividade 6 a 14, os estudantes precisam relacionar diversos conteúdos e conceitos, entre eles o cálculo de áreas e o conceito e a representação de função.

Em **Foco na leitura**, é destacado o fato de que, em muitos problemas de Geometria, os dados podem ser apresentados de diferentes formas: texto discursivo, fórmulas ou desenhos. No caso do exemplo escolhido, o foco da discussão está na importância da leitura do desenho no plano cartesiano para a resolução do problema.

Ao longo do livro, há diversas sugestões de encaminhamentos para a leitura dos textos, bem como observações importantes a serem feitas aos estudantes. Analise essas sugestões e verifique quais delas podem auxiliar seu trabalho no desenvolvimento das habilidades, no que se refere à leitura e à resolução de problemas. Em especial, antes de discutir a posição relativa entre ponto e circunferência, reta e circunferência e entre circunferências (tópicos 3, 4 e 5), solicitamos que o estudante possa lembrar ou ao menos pensar sobre as possíveis posições entre essas figuras geométricas, de modo a dar mais significado aos seus conhecimentos prévios durante a discussão dessas relações, agora sob o ponto de vista das relações entre pares ordenados e equações.

A seção **Foco na tecnologia – computador** apresenta o uso do Winplot para o traçado de circunferências, o que é uma possibilidade para se decidir sobre a posição relativa entre circunferências no plano. Ao final do traçado das diversas circunferências, o estudante pode identificar pontos de interseção ou de tangência usando diretamente o recurso do programa de computador.

A seção **Entre saberes** desse capítulo trabalha as relações entre Geometria e Arte, incluindo as artes plásticas, a dança e a música como âmbitos das artes que recorrem às imagens de figuras para manifestar percepções de mundo, sentimentos e estética. Esses textos podem auxiliar no Projeto *Matemática e Arte*.

Lembre-se de que, a partir das propostas das diversas seções **Invente você** e **Palavras-chave**, é possível acompanhar as aprendizagens dos estudantes; suas produções devem ser socializadas em sala de aula para que busquem melhorar suas redações e apresentações dos problemas criados.

Na seção **Aprender a aprender**, retomamos as funções trigonométricas e as fórmulas da soma e da diferença. Além da revisão como forma de manter o aprofundamento de noções importantes, essa proposta vai ajudar os estudantes a se prepararem para as discussões que faremos em outros capítulos deste volume que envolvam Trigonometria.

Ao final desse capítulo, propomos o único **Projeto** deste volume — *Matemática e Arte*. Pensado para ser desenvolvido ao longo do estudo dos capítulos 5 e 6, as orientações detalhadas para seu desenvolvimento encontram-se mais adiante, na página 327.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos algébricos e geométricos: plano cartesiano; circunferências; equações; posição relativa entre figuras no plano cartesiano; funções trigonométricas (na seção **Aprender a aprender**).
- Habilidades: resolver situação-problema cuja modelagem envolva o estudo analítico da circunferência; usar conhecimentos algébricos e geométricos na seleção e na utilização de argumentos que justifiquem processos de resolução de problemas.
- Competências gerais e de área: modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas usando representação geométrica.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Determinar o raio e o centro de uma circunferência a partir de sua equação.
- Identificar as posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências.
- Representar a equação de uma circunferência dados o raio e o centro.
- Resolver problemas que impliquem o uso do estudo analítico da circunferência em sua modelação.
- Utilizar os conhecimentos sobre o estudo analítico da circunferência para justificar soluções de problemas e construir argumentação.

Capítulo 7 – Estudo analítico das cônicas

Esse capítulo aprofunda o estudo da Geometria analítica feito até aqui, incluindo o estudo das equações que representam as cônicas: elipse, parábola e hipérbole. O objetivo é a identificação dos elementos que definem essas curvas e sua relação com as respectivas equações de cada uma delas. Optamos pelo não aprofundamento do estudo dessas figuras, tendo em vista a formação dos estudantes do Ensino Médio, podendo inclusive ser omitida nesse primeiro estudo sobre a Geometria analítica.

Na abertura do capítulo, as cônicas são identificadas como seções planas da superfície de um cone, para que nos tópicos seguintes cada uma delas seja estudada em separado.

Sugerimos que a seção **Para complementar**, da página 144, que aborda o traçado de elipses, possa ser desenvolvida pelos estudantes, assim eles poderão refletir e entender o significado das igualdades entre distâncias que geram as equações de elipses. No tópico 2, durante o estudo da hipérbole, damos destaque à hipérbole cuja equação é $y = \frac{1}{x}$, que corresponde à função mais elementar que descreve a proporcionalidade inversa entre as duas variáveis.

No tópico 3, no estudo da parábola, algumas delas podem ser identificadas com gráficos de funções quadráticas, como aquelas que aparecem nas atividades 17, 18 e 19 da seção **Fazer e aprender**.

Na seção **Cálculo rápido**, há um pouco mais de Álgebra elementar e estratégias de cálculo envolvendo medidas de volume e números decimais.

A seção **Aprender a aprender** é especialmente importante porque sintetiza os resultados mais significativos da Geometria métrica espacial. Sugerimos trabalhar com os estudantes em pequenos grupos, para que possam buscar e analisar conteúdos que porventura tenham sido esquecidos e, ao mesmo tempo, desenvolver sua capacidade de realização e argumentação.

As questões foram escolhidas em razão dos textos mais elaborados que trazem em seus enunciados e por exigirem habilidades de leitura em Matemática, ao mesmo tempo em que solicitam do estudante relacionar diversos conteúdos e ideias estudados ao longo de seu percurso escolar. Observe as sugestões do Livro do Estudante sobre como trabalhar essa seção em sala de aula: elas favorecem a organização para o estudo e o trabalho independente, que deve ser uma meta da formação no Ensino Médio.

Como sugestão de avaliação, propomos que os estudantes possam usar os resumos feitos na seção **Palavras-chave** em uma prova com consulta. Com isso, assimilam que os resumos são importantes procedimentos de estudos e passam a valorizar cada vez mais essa prática.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos algébricos e geométricos: elipse, hipérbole e parábola; relações métricas em sólidos geométricos (na seção **Aprender a aprender**).
- Habilidades: resolver situação-problema cuja modelagem envolva um estudo analítico da elipse, da hipérbole e da parábola; utilizar conhecimentos algébricos e geométricos na seleção ou na elaboração de argumentos para justificar a resolução de problemas.
- Competências gerais e de área: modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas usando representação algébrica ou geométrica.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Ampliar o entendimento sobre parábola e compreender o conceito de elipse, hipérbole e seus elementos.
- Identificar na elipse, na hipérbole e na parábola os elementos que as compõem, associando-os às respectivas equações.
- Interpretar as cônicas graficamente.
- Resolver problemas que envolvam cônicas e suas equações.

Unidade 3 – Polinômios, números complexos e equações polinomiais

Capítulo 8 – Estudo de polinômios

Nesse volume, no eixo da Álgebra, estudamos os polinômios, as equações algébricas e os números complexos. Nos anos anteriores, os estudantes devem ter tido a oportunidade de conhecer como se dá o pensar e o tratamento algébrico de conceitos. No volume do 1º ano, as funções são um dos temas de estudo como estrutura algébrica. No volume do 2º ano, as matrizes têm tratamento semelhante ao que será dado agora aos polinômios.

Assim, os estudantes poderão, mais uma vez, acompanhar como a Matemática, com destaque para a Álgebra, trata cada novo conceito, relacionando-o às propriedades básicas das operações que fazem sentido para esse conceito.

A ênfase com que serão tratados os capítulos 8, 9 e 10 deste volume depende do planejamento feito pelo professor, que, sem dúvida, deve ser traçado em função dos interesses e objetivos dos estudantes.

Nesse capítulo e no capítulo 10, o objetivo é que o estudante perceba que existem formas imediatas de resolução de equações de grau menor ou igual a dois, mas que isso não ocorre com equações de grau superior a três. No entanto, equações que até o momento poderiam não ter solução no campo dos números reais, agora, com os números complexos, têm sempre solução.

As funções polinomiais foram escolhidas para estudo nesse e nos capítulos 10 e 12 com a intenção de rever e ampliar o estudo de funções e análise de gráficos e, ao mesmo tempo, estabelecer conexões entre diferentes conceitos matemáticos.

No tópico 1 – *Polinômios*, mais importante do que a terminologia relativa a polinômios é o conceito de igualdade de dois polinômios e a resolução de problemas que dependem dessa definição. Na primeira lista de atividades da seção **Fazer e aprender**, a atividade 10 exige a retomada da soma dos termos de uma P.G.; incentive os estudantes a buscar essa informação, evitando dar a resposta antes que eles o façam.

O tópico 2 introduz as funções polinomiais e seus gráficos, de modo que o estudante possa visualizar as raízes de um polinômio ou de uma equação polinomial.

Das operações com polinômios, é importante destacar as relações de grau entre os polinômios e os resultados das operações, bem como a divisão de um polinômio por um binômio da forma $x - a$.

As atividades R4, R5 e R6 da seção **De olho na resolução** e a seção **Foco na leitura** exigem mais atenção nas discussões, porque permitem ao estudante escolher uma ou outra forma de resolver um exercício e a percepção de que a linguagem matemática pode ser determinante para a compreensão e a resolução de problemas específicos.

No tópico 4 – *Decomposição em fatores e resolução de equações polinomiais*, destacamos a relação entre divisibilidade de um polinômio por binômio da forma $x - a$ e o fato de a ser raiz desse polinômio. Isso é importante, porque facilita a resolução de diversos problemas e permite desenvolver métodos para resolver equações lineares de grau n pela decomposição do polinômio em fatores. Esse assunto será retomado no capítulo 10, para a resolução de equações polinomiais.

A proposta da seção **Invente você** da página 178 pode ser usada como instrumento de avaliação. Sugerimos que os estudantes troquem entre si os problemas que inventaram, para que um resolva o problema criado pelo outro e possa sugerir aperfeiçoamento do texto produzido pelo colega.

Como em capítulos anteriores, a seção **Foco no raciocínio lógico** traz problemas de lógica.

A seção **Aprender a aprender** desse capítulo tem como foco os conceitos e procedimentos relacionados a Contagem e Probabilidade. Observe que a maioria dos problemas propostos possui textos mais elaborados; por isso, lembre os estudantes de que devem usar aqui o que aprenderam ao longo do volume sobre leitura e estratégias para o enfrentamento de situações como essas. É importante socializar não apenas as respostas dos problemas, mas especialmente a forma como cada estudante pensou para chegar a ela.

A seção **Mundo plural** desse capítulo aborda um tema bem interessante, que é a criptografia presente nas chaves de segurança e senhas relacionadas a diversas situações do dia a dia. Incentive os estudantes a pesquisar sobre esse tema e a compartilhar suas descobertas com a classe.

Como instrumento de avaliação, pode-se propor aos estudantes uma prova em dois tempos.

- Na primeira fase, a prova é realizada na aula e sem consulta, durante um período de tempo previamente combinado com os estudantes.
- Terminado o tempo, as provas são recolhidas e os estudantes são avisados de que no máximo em duas aulas elas serão devolvidas para que eles refaçam o que desejarem.
- A análise pode ou não conter pistas e sugestões de como cada estudante pode rever e aprimorar o trabalho realizado na primeira fase.
- Na segunda fase, eles receberão novamente a prova, com uma folha anexa grampeada para completar aquilo que não foram capazes de fazer antes ou refazer aquilo que sentirem necessidade.
- Eles não podem alterar a primeira versão (para que você saiba o que modificaram) e por isso fazem as revisões na folha anexa.
- São corrigidas as duas versões, mas valerá sempre a resolução correta.

Embora essa modalidade de prova seja trabalhosa, vale a pena porque favorece a reflexão dos estudantes entre si, com as famílias, com você e mesmo com base nos livros. Isso mobiliza a aprendizagem.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos: igualdade e operações com polinômios; gráficos de funções polinomiais; Contagem e Probabilidade (na seção **Aprender a aprender**).
- Habilidades: resolver situações-problema que envolvem conhecimentos algébricos; utilizar conhecimentos algébricos como recurso para a construção de argumentação.
- Competências gerais e de área: dominar a linguagem matemática; enfrentar situações-problema; modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas usando representações algébricas.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Identificar um polinômio e compreender como determinar seu grau.
- Operar com polinômios.
- Compreender e aplicar os métodos para determinar o quociente e o resto de uma divisão de polinômios.
- Utilizar as noções de polinômios na resolução de problemas algébricos.

Capítulo 9 – Números complexos

A abordagem escolhida para introduzir os números complexos é sua história; no entanto, os pontos essenciais desse capítulo são o conceito de número complexo e sua representação algébrica e gráfica para compreender a resolução de equações polinomiais, que são o tema de estudo do próximo capítulo.

O ideal é que, antes de propor a leitura do capítulo, sejam apresentadas aos estudantes algumas equações do 2º grau cuja resolução não seja possível no campo dos números reais, para justificar a ampliação dos campos numéricos para o dos números complexos.

Nos tópicos 2 e 3, a ênfase deve estar na definição de número complexo, no significado da igualdade de dois desses números e na sua representação geométrica no plano. As potências de i são um exemplo interessante de regularidade numérica que pode ser explorada nas diversas atividades propostas.

Na seção **Foco na leitura**, buscamos explicitar relações entre a representação de um número complexo no plano de Argand-Gauss e o que foi estudado neste ano, em Geometria analítica, sobre pontos e distâncias no plano cartesiano.

Esperamos que os conceitos de módulo e argumento de um número complexo sejam facilmente entendidos pelo estudante que, ao estudar Geometria analítica, compreendeu e sabe determinar a distância entre pontos e o coeficiente angular de retas. Recomendamos que a seção **Aprender a aprender** do capítulo 4 seja trabalhada antes da apresentação do argumento de um número complexo.

As relações entre números complexos como pares ordenados e os conhecimentos de Geometria analítica estão presentes nas atividades R7 a R10 da seção **De olho na resolução**, bem como nas da seção **Fazer e aprender**.

Para que as operações de multiplicação e divisão de números complexos sejam mais significativas para os estudantes, na seção **Para complementar** há uma conexão interessante entre a operação de multiplicação de números complexos e a rotação de pontos no plano.

As operações de potenciação e radiciação de números complexos não são essenciais em um curso de Ensino Médio e por isso estão identificadas como conteúdo opcional. No entanto, se em seu planejamento esses temas estiverem presentes, sugerimos que o enfoque seja na análise de qual forma é a mais adequada para realizar uma operação envolvendo esses números, e não na memorização de fórmulas.

Em **Foco na tecnologia – calculadora**, o estudante pode rever como utilizar a calculadora científica para calcular razões trigonométricas e cálculos estatísticos em situações do dia a dia.

Na seção **Palavras-chave** desse capítulo, destacamos apenas os termos e conceitos essenciais para a compreensão dos próximos capítulos. Isso permite ao estudante perceber que nem tudo que está no livro é essencial para a continuidade de seu estudo, e que ele pode, no futuro, se desejar ou precisar, retornar a este livro para conhecer mais sobre as operações com números complexos.

A seção **Aprender a aprender** traz problemas bem diversificados, com diferentes graus de dificuldade e envolvendo conteúdos variados, com o objetivo de que o estudante possa se autoavaliar quanto à habilidade para resolver problemas. Ao final da resolução e da discussão dessas questões, proponha que cada estudante escreva quais foram suas dificuldades e que tipo de texto consideram mais fácil de ser lido e interpretado. Ao analisar seus pontos fortes e suas fragilidades, cada estudante pode investir de modo mais preciso em seus estudos e o professor pode orientá-lo de maneira mais focada para avançar em seu aprendizado.

Como instrumento de avaliação, sugerimos que o professor repita ou modifique algum daqueles que indicamos nos capítulos anteriores.

Assim, desejamos que, ao final desse capítulo, os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos numéricos e algébricos: números complexos; representação de números no plano de Argand-Gauss; operações entre números complexos.
- Habilidades: identificar um número complexo e sua relação com os números reais; resolver equações do 2º grau cujas raízes são números complexos; relacionar operações com números complexos e movimentos de rotação no plano.
- Competências gerais e de área: construir significados para números complexos; dominar o uso da linguagem matemática; construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Identificar um número complexo por sua forma algébrica, gráfica e trigonométrica.
- Resolver operações de adição, subtração e multiplicação de números complexos.
- Relacionar operações com números complexos e movimentos de rotação.
- Resolver equações do 2º grau cujas raízes sejam complexas.

Capítulo 10 – Equações polinomiais

Completando os dois capítulos anteriores, esperamos que os estudantes tenham oportunidade de aplicar o que aprenderam na resolução e na interpretação de situações-problema simples envolvendo equações e funções polinomiais.

A seção **Palavras-chave** desse capítulo foi pensada para que o estudante possa se apropriar das relações entre esses três capítulos, além de avaliar a aprendizagem do conteúdo trabalhado.

O tema equações polinomiais é introduzido a partir de um problema de cálculo de volume, cuja resolução depende da determinação das raízes de uma equação polinomial de grau 3. Esse problema será resolvido no decorrer do capítulo de duas formas distintas: pela resolução algébrica da equação e pela estimativa, com o auxílio de um programa gráfico, dos valores das raízes no gráfico da função de 3ª grau correspondente.

Na primeira parte do capítulo, nos tópicos 2 a 7, está o desenvolvimento convencional de estudo das raízes de equações polinomiais, incluindo o Teorema fundamental da Álgebra, o conceito de multiplicidade de uma raiz, as relações de Girard, a relação entre as raízes complexas da equação e a determinação das raízes racionais da equação com coeficientes inteiros.

Nessa parte do capítulo, é importante destacar a seção **Foco na leitura**, na qual o estudante pode analisar as alternativas de resposta como possíveis facilitadoras da resolução de uma questão teste.

Na segunda parte do capítulo, escolhemos como objetivo a análise de gráficos de funções polinomiais a partir de suas raízes. Isso se encontra nas seções **Para complementar** e **Foco na tecnologia – computador**. Mesmo que de forma simplificada e com a aceitação sobre o formato dos gráficos dessas funções (toda função polinomial é diferenciável em seu domínio), os estudantes podem experimentar a construção de gráficos de funções relativamente complexas e confirmar o traçado com o apoio do programa gráfico Winplot.

As funções polinomiais serão retomadas no próximo capítulo; no entanto, o que foi tratado sobre elas até aqui é suficiente para que os estudantes retomem e ampliem seus conhecimentos sobre funções e interpretação de gráficos.

A seção **Aprender a aprender** desse capítulo tem o mesmo propósito da do capítulo anterior, ou seja, por meio de problemas diversificados e de maior complexidade, permitir que o estudante se perceba capaz de mobilizar diversos saberes conquistados ao longo do estudo neste e nos anos anteriores.

A proposta da seção **Mundo plural** desse capítulo permite ao estudante conhecer como diversas áreas do conhecimento buscam na Matemática instrumentos para modelar (equacionar) fenômenos, como o controle de populações em risco de extinção, bem como para controlar e decidir sobre como intervir em situações reais.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos algébricos: equações polinomiais, teorema fundamental da Álgebra, raízes racionais e complexas de uma equação polinomial; funções afim, quadráticas e seus gráficos.
- Habilidades: resolver situações-problema que envolvem conhecimentos algébricos; utilizar conhecimentos algébricos como recurso para a construção de argumentação.
- Competências gerais e de área: construir significados para equações e funções polinomiais; dominar o uso da linguagem matemática; construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos e resolução de problemas.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Determinar as raízes de uma equação polinomial e as raízes de um polinômio.
- Pesquisar raízes racionais, inteiras e complexas.
- Estudar a relação entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial.
- Resolver problemas utilizando os conteúdos estudados.
- Ler gráficos de funções polinomiais.

Capítulo 11 – Funções trigonométricas

Esse capítulo foi organizado para fazer uma breve revisão das noções e dos conceitos mais fundamentais da Trigonometria e para ampliar os estudos desse tema no que diz respeito às funções trigonométricas. No desenvolvimento do texto, optamos por uma abordagem histórica dos conceitos e termos trigonométricos, a fim de ampliar a percepção do estudante sobre a construção do conhecimento humano como um processo histórico e social.

No tópico 2 – *O ciclo trigonométrico*, a partir de antigas tabelas trigonométricas, fazemos uma breve incursão pela origem das razões trigonométricas. Esse item pode ser lido pelos estudantes individualmente e depois discutido coletivamente. Se for preciso, volte à seção **Aprender a aprender** dos capítulos 4 e 5 para retomar a importância dessas razões no cálculo de distâncias inacessíveis.

O tópico 3 tem início com o ciclo trigonométrico e a relação entre ângulos, arcos e valores da reta real. Uma vez que essa ideia é essencial para compreender a definição das funções trigonométricas a partir dos pontos desse ciclo, sugerimos especial atenção a esse texto.

Na primeira seção **Para complementar** desse capítulo, página 236, apresentamos a relação entre conteúdos estudados durante o Ensino Médio. Nosso objetivo é dar significado maior a esses temas, ao mesmo tempo que o estudante volta a ver representações geométricas pela Álgebra. Agora as matrizes passam a representar, com o auxílio da Trigonometria, movimentos de rotação no plano cartesiano. Se a classe estiver desenvolvendo o projeto “Matemática e Arte”, sugerido ao final do capítulo 6, é possível ampliá-lo com a observação de obras de arte que contenham simetrias de rotação, incluindo-se a análise dos ângulos usados nessas rotações.

A seção **Foco na leitura** desse capítulo foi planejada para enfatizar as habilidades envolvidas na resolução de um problema, algumas delas gerais, como leitura, tomada de decisão, estabelecimento de estratégia e sua execução, e outras mais específicas da Matemática, que, nesse caso, é o saber operar com expressões literais.

Os tópicos 3 e 4 permitem rever de forma mais sistemática várias propriedades das funções trigonométricas, muitas delas já utilizadas pelos estudantes na resolução de problemas. O **Fazer e aprender** e o **Invente você** deste capítulo podem ser usados como forma de avaliar as aprendizagens dos estudantes e eventuais retomadas que precisem ser feitas.

A proposta da seção **Para complementar**, página 243, é uma alternativa de trabalho com os estudantes que podem avançar ou são mais rápidos na resolução dos problemas, para que eles leiam o texto do livro e apresentem à classe o que conheceram sobre a origem dos nomes seno e cosseno.

Na seção **Foco na tecnologia – calculadora** desse capítulo, retomamos o uso da calculadora científica apresentado nos volumes anteriores. Ao final, os estudantes podem propor aos colegas atividades tais como as 2, 3 e 5 dessa seção, com valores quaisquer para os ângulos, de modo a retomarem o que aprenderam e apropriarem-se com segurança dos recursos da máquina.

Em **Foco no raciocínio lógico** estão dois problemas diversos em seus conteúdos e formas de texto; no entanto, deve-se chamar a atenção dos estudantes para o fato de que, na resolução de todos eles, é importante a forma de registro utilizada. Listas, tabelas, esquemas e desenhos podem, e devem, ser usados pelos estudantes como formas válidas e importantes para organizar dados e obter soluções.

A seção **Cálculo rápido** é uma oportunidade para o estudante se avaliar em relação à sua compreensão sobre o ciclo trigonométrico e à memorização das razões trigonométricas dos arcos fundamentais.

A seção **Mundo plural** desse capítulo pode ser desenvolvida com apoio do professor de Física ou apenas lida e discutida em classe. É importante que os estudantes tenham oportunidade de ver como a Matemática pode modelar uma situação do dia a dia, cuja explicação exige conhecimentos de outra área do conhecimento (nesse caso, o conceito de quantidade de movimento da Física). Ao final, proponha aos estudantes que socializem a resolução do problema proposto ao final dessa seção.

Como instrumento de avaliação, além das observações feitas em sala e das produções dos estudantes, sugerimos que o professor use o recurso da **prova elaborada com os estudantes**.

- A classe é dividida em grupos de três ou quatro estudantes que têm como função rever todos os assuntos estudados e fazer uma lista que mostre aqueles temas que efetivamente tenham sido aprendidos pelo grupo.
- Feito isso, cada grupo elabora um número determinado de questões (por exemplo, três) sobre os temas listados. É essencial que os estudantes saibam resolver os problemas que criaram.
- Os estudantes podem utilizar as propostas da seção **Invente você** para essa atividade.

- As questões, resolvidas, com os nomes dos grupos são entregues ao professor.
- Não há nada que impeça que os estudantes tenham cópias dos problemas que elaboraram.
- Elabore uma prova na qual apareça ao menos um problema de cada grupo, com identificação de quem o fez. Sua única modificação nas questões será na revisão do texto, no que se refere à clareza e à correção textual. Não haverá mudança no problema nem nos dados originais. Esclareça à classe como elaborou a prova.
- Essa modalidade é adequada como instrumento de avaliação porque permite a avaliação em grupos, com consulta, e mesmo uma autoavaliação dos estudantes, possibilitando que reflitam sobre a própria aprendizagem, tanto para selecionar os temas quanto para organizar as questões. Essa proposta, depois de realizada uma ou duas vezes, favorece as trocas entre os estudantes e a cooperação com seus pares.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos: razões e funções trigonométricas, redução ao 1º quadrante.
- Habilidades: utilizar e interpretar modelos para a resolução de situações-problema que envolvam medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis; construir modelos que correspondam a fenômenos periódicos; compreender a relação entre o círculo trigonométrico, as funções e as equações trigonométricas.
- Competências gerais e de área: fazer uso da linguagem matemática; construir e aplicar conceitos de Matemática para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos e da produção tecnológica; enfrentar situações-problema; construir argumentação; modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas usando representações algébricas.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Identificar funções trigonométricas e sua representação gráfica.
- Identificar domínio, imagem, periodicidade, raízes e crescimento nas funções trigonométricas estudadas.
- Resolver problemas por meio de conhecimentos trigonométricos.

Capítulo 12 – Taxa de variação de funções

Este último capítulo do volume do 3º ano retoma diversas ideias sobre o estudo de funções e fornece algumas noções que permitem compreender melhor certos elementos da área de Ciências da Natureza e suas tecnologias.

Embora haja controvérsia sobre a introdução do Cálculo diferencial no Ensino Médio, apresentamos neste volume um capítulo dedicado ao que chamamos de taxa de variação. Mais do que introduzir o Cálculo, aqui optamos por uma abordagem na qual os conceitos de limite e derivada aparecem quando são necessários para a resolução de problemas, permitindo ao estudante compreender melhor e relacionar os conceitos de tangência e de crescimento ou decréscimo de uma função.

Nosso objetivo é que os estudantes utilizem a noção de derivada para aprimorar a análise das funções polinomiais, especialmente na resolução de problemas de crescimento e de determinação de pontos de máximo ou de mínimo.

Nos tópicos 1 e 2, apresentamos o conceito de taxa de variação média e de variação instantânea de uma função do ponto de vista matemático, relacionando esses conceitos à inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto.

Na seção **Para complementar**, apresentamos construções interessantes das cônicas usando dobraduras em papel. As curvas ficam definidas pelas retas tangentes a seus gráficos.

No tópico 3, esses mesmos conceitos são revistos sob o ponto de vista da Física, mais especificamente com os conceitos de velocidade média e instantânea da cinemática.

A seção **Foco na leitura** analisa a diferença de linguagem simbólica usada pela Matemática e pela Física para se referir às funções e às taxas de variação. Desse modo, o estudante verifica que são tratadas as mesmas ideias descritas e nomeadas de formas diferentes.

Nos tópicos 4, 5 e 6 focamos a função derivada e a usamos na determinação de intervalos de crescimento ou decréscimo de funções polinomiais e de seus pontos de máximo ou de mínimo. São importantes as ativi-

dades resolvidas da seção **De olho na resolução** e as aplicações presentes nas atividades propostas no **Fazer e aprender** desse capítulo.

A seção **Foco na tecnologia – computador** apresenta a possibilidade da resolução de problemas de máximos ou de mínimos com o recurso de uma planilha eletrônica de cálculo e o traçado de gráficos. Sugerimos que alguns dos problemas já resolvidos pelos estudantes possam ser refeitos com o uso do computador, inclusive para checar a resolução feita e analisar que, na máquina, a solução dos problemas, apesar de visual, tem imprecisões geradas pelos limites do programa que é usado.

Na seção **Mundo plural**, os conceitos de limite e derivadas estão associados à determinação das calorias ingeridas por todo ser vivo e na transformação dessa energia em trabalho, que nos permite, por exemplo, andar, correr ou ler. Ao final, propomos a busca de textos e vídeos sobre experimentos usados nas aulas de Química ou Biologia para a visualização da energia contida nos alimentos.

Nesse capítulo, esperamos que os estudantes adquiram os conhecimentos e desenvolvam as habilidades e competências a seguir:

- Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; taxa de variação de funções; análise de gráficos.
- Habilidades: identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas; interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas; resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos; utilizar conhecimentos algébricos e geométricos como recurso para a construção de argumentação; avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.
- Competências gerais e da área: modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou tecnocientíficas usando representações algébricas.

Para auxiliar o processo de avaliação dos estudantes, pode-se considerar os seguintes indicadores:

- Calcular taxa de variação média de funções.
- Interpretar graficamente a derivada de uma função em um ponto.
- Utilizar as noções de taxa de variação de função para a resolução de problemas que envolvam crescimento, pontos máximo e mínimo de uma função.

PROJETO

Matemática e Arte

A previsão para este volume do 3º ano é de apenas um projeto, a ser desenvolvido nos capítulos 5 e 6. A duração do projeto é variável e dependerá do interesse dos estudantes pelo tema proposto, dos problemas que surgirem para serem resolvidos e da própria motivação do grupo em continuar ou não.

O modo de trabalhar com o projeto não deve ser rígido, pois as exigências de cada momento orientarão cada etapa do trabalho. No entanto, isso não significa que o professor deva assumir uma atitude espontaneísta na condução do trabalho. É importante que haja um planejamento do que vai ser feito a cada dia, do material necessário para cada etapa, e que se estabeleça onde ou a quem serão feitas consultas para obter informações ou ajuda nas questões sugeridas durante a elaboração ou a realização do projeto.

Para garantir que haja um vínculo entre as intenções escolares e o desejo dos estudantes, o professor deve fazer uma negociação com eles: ao pedir, na proposição e no desenvolvimento do projeto, que os estudantes explorem um conhecimento escolar, o professor deve, em contrapartida, dar-lhes a oportunidade de escolher fatos, habilidades e recursos que desejam incluir na execução do projeto. É importante, ainda, que o professor explicita aos estudantes que o projeto deve ter qualidade, inovação, imaginação, ética, estética e variedade.

Durante a realização do projeto, é conveniente que se observe os estudantes trabalhando, a fim de conhecer suas áreas de interesse e desenvolver estratégias para auxiliar cada um a avançar no que demonstra ter maior dificuldade. Deve-se também procurar estimular os estudantes a planejar e revisar seus trabalhos, bem como a cooperar e contribuir uns com os outros.

Veja a seguir algumas orientações específicas para o projeto proposto ao 3º ano do Ensino Médio.

Propomos que esse projeto se inicie pela apresentação do tema à classe e pela discussão coletiva sobre o que os estudantes sabem a respeito de obras de arte relacionadas à Geometria.

A seguir podem ser apresentadas algumas obras de artistas como Mondrian e Kandinsky, que optaram pelo uso de retas e circunferências em seus quadros.

Mondrian

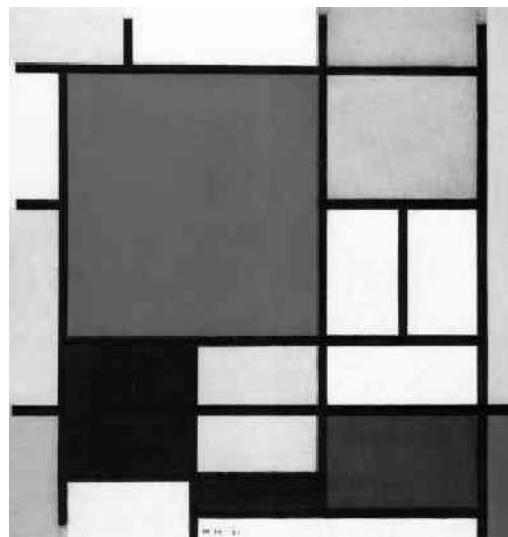
Piet Mondrian (Holanda, 1872-1944) começou como um acadêmico pintor de paisagens, na melhor das tradições holandesas. Passou em seguida por várias fases, do impressionismo ao cubismo. A influência desta última escola foi decisiva. A partir de 1909, ele gradativamente eliminou os elementos descritivos de seus trabalhos, até que, em 1917, surgiu em toda plenitude seu estilo amadurecido e totalmente abstrato.

Até o fim de sua vida, Mondrian utilizaria apenas as três cores primárias mais o negro, o cinza e o branco, dispostos em retângulos, sobre uma rede de linhas negras.

Em torno desse aparentemente rígido tema, Mondrian executou uma longa série de sutis variações, nas quais cores, formas e traços surgiam em harmônicas combinações. Divorciado do mundo natural, o trabalho de Mondrian, mesmo assim, permanece como uma realização profundamente humana.

Suas criações abstratas de estruturas geométricas iriam influenciar, anos depois, não só a pintura, mas também a arquitetura contemporânea, o desenho industrial, as artes decorativas e mesmo as técnicas de diagramação das artes gráficas.

Reprodução, em escala de cinza, da obra
*Composição com vermelho, amarelo, azul
e preto*, 1921, de Piet Mondrian.
Óleo sobre tela, 59,5 cm × 59,5 cm.



Mondrian/Haia, Haags Gemeentemuseum.

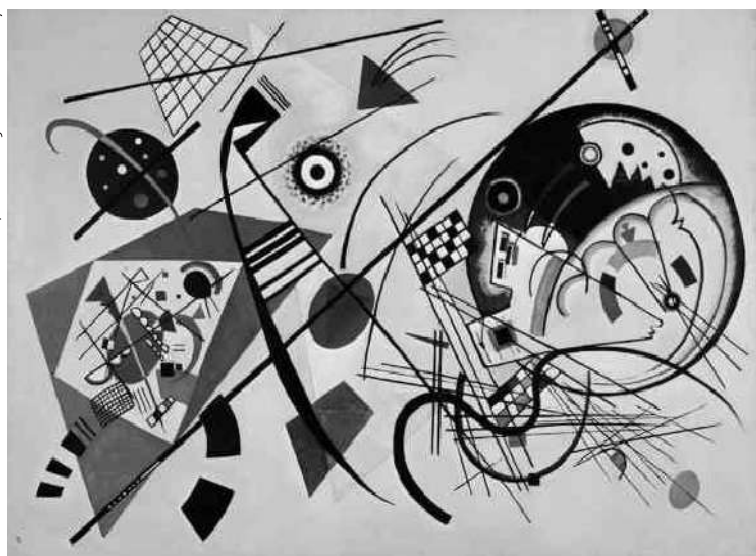
Kandinsky

Wassily Kandinsky (1866-1944) teve aulas de música e artes plásticas quando era criança, na Rússia, mas não se tornou um artista profissional até os 30 anos de idade. Deixou seu emprego como professor de Direito e mudou-se para a Alemanha para estudar Artes. Naquela época, as pessoas achavam que um desenho ou uma pintura deveria representar a realidade. Quanto mais realista, melhor.

Os pintores impressionistas começaram a pintar quadros que não pareciam exatamente reais. Kandinsky foi o primeiro artista a distanciar-se definitivamente do realismo: pintou os primeiros quadros totalmente abstratos, quadros que eram simplesmente cores, formas, linhas e texturas, porque para ele esses elementos tinham significado próprio.

Kandinsky era músico, além de pintor, e pensava nas cores como se fossem música. Os quadros simples eram como as melodias para ele. As pinturas complexas eram como as sinfonias. Ele chamava muitos de seus quadros de “improvisações”, o que significa uma música feita na hora, sem planejamento anterior.

Album/akg-images/Maurice Babey/Musee National d'Art Moderne, Sammlung Nina Kandinsky



Fonte: Kohl, M. F.; Solga, K. *Descobrimos grandes artistas: a prática da arte para crianças*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Reprodução, em escala de cinza, da obra
Linha transversal, 1923, de Wassily Kandinsky.
Óleo sobre tela, 141 cm × 202 cm.

Não basta, entretanto, apenas apresentar os artistas. É preciso saber ler suas obras, o que é conhecido em arte como nutrição estética.

Conhecer artistas e tomar suas obras como modelos permite novas perspectivas de ver e pensar as imagens e os códigos que nos cercam. De fato, nosso universo interior, tanto quanto a realidade que percebemos, são dominados pela imagem, que constrói nosso pensar e o que produzimos como seres pensantes.

Encontramos em Sandra Oliveira o seguinte comentário, importante para mostrar que é preciso ir além de uma observação ingênua em relação aos artistas e suas obras:

[...] as pessoas, de um modo geral, têm dificuldades para acessar as manifestações dos códigos estéticos, indiferentemente do sistema ao qual pertençam e independentemente de se tratarem de imagens artísticas ou estéticas. Uns, para encobrir o desconhecimento, alegam não gostar ou não ter interesse por tais produtos; outros simulam que a compreensão é tácita e evitam discuti-los; um terceiro grupo apela para interpretações baseadas em critérios extraestéticos, como os pautados estritamente pelas emoções e pelos sentimentos ou até mesmo pela valoração comercial. Em suma, o que se ouve e o que se vê pouco ou nada tem a ver com o que há para ver e ouvir.

Fonte: Oliveira, Sandra Regina R. e. *O problema da leitura de imagens*. Disponível em: <www.ceartudesc.br/Revista_Arte_Online/Volumes/artigosandra.htm>. Acesso em: jun. 2016.

Chamamos de nutrição estética a atividade planejada para provocar leituras que favoreçam o aprendizado da arte e a ampliação das redes de significado que o leitor possui sobre imagens e arte.

Assim se expressam Martins, Picosque e Guerra sobre a nutrição estética:

Seu foco principal está na percepção/análise e no conhecimento da produção artístico-estética, no entanto o centro não está na informação dada, mas na capacidade de atribuir sentido, construir conceitos, ampliá-los pelas ideias compartilhadas entre os parceiros, com o professor e, se for o caso, com os teóricos que também se debruçaram sobre essa obra, artista ou movimento.

O educador é um mediador entre a arte e o aprendiz, promovendo entre eles um encontro rico, instigante e sensível.

Fonte: Martins, M. C.; Picosque, G.; Guerra, M. T. T. *Didática de ensino de arte: Poetizar, fruir e conhecer arte*. São Paulo: FTD, 1998.

A leitura de imagens e obras de arte ocorre por meio da ação do leitor como decifrador do texto de um autor.

Desenvolvimento do projeto e suas etapas

1ª etapa

Propomos que uma das etapas do projeto proporcione a nutrição estética a partir dos autores sugeridos anteriormente. Segue-se uma sugestão de roteiro de trabalho, que pode ser usado para, por exemplo, um quadro de Mondrian.

1. Conversar com os estudantes sobre o pintor: discutir sobre quem foi ele, como pintava e outros dados biográficos.
2. Apresentar a obra e orientar os estudantes para que observem como o pintor usa as cores: que formas geométricas aparecem; como ele teria feito o traçado das linhas; que características têm as linhas utilizadas pelo pintor etc. Discutir as observações dos estudantes e produzir com eles um texto-síntese das observações feitas pela classe sobre a obra e o autor.
3. Em um espaço amplo, dividir a classe em grupos de aproximadamente 10 estudantes e pedir que cada grupo encontre uma forma de reproduzir parte do quadro usando apenas seus corpos e movimentos no espaço. Enquanto um grupo executa os movimentos ou encenação corporal, os demais observam, tentando descobrir que parte da obra foi reproduzida. Depois das apresentações de cada grupo, todos devem discutir:
 - como foram os movimentos;
 - quais os cuidados tomados para a representação das linhas retas;
 - como representaram o cruzamento de linhas;
 - como seria possível melhorar as representações etc.

Ao final, cada grupo desenha a parte do quadro que tentou reproduzir. Para isso, podem ser usados diferentes recursos e materiais. Nesse momento, seria interessante realizar um trabalho com o professor de Arte, a fim de que ele possa orientar sobre as técnicas de desenho e pintura e sobre o uso e significado das cores.

Depois dessas atividades de sensibilização para os pintores e suas obras, pode-se dar início à próxima etapa do projeto.

2ª etapa

Nessa nova etapa, discuta com os estudantes o que eles desejam saber sobre Matemática e Arte. A partir dessa discussão, da negociação (que deve ser mediada pelo professor) e dos recursos de que a escola dispõe, podem ser incluídas:

- pesquisas sobre autores e obras relacionados com Matemática, mais especificamente com Geometria;
- pesquisas sobre a história dos pintores e os contextos que influenciaram suas escolhas artísticas;
- análise do uso das cores em seus quadros;
- construção, pelos estudantes, de obras semelhantes.

A partir daí devem ser elaborados um roteiro de trabalho, um cronograma das ações e a divisão de responsabilidades entre os estudantes ou grupos de estudantes da classe.

3ª etapa

A ideia da próxima etapa do projeto é avançar para os objetivos relacionados mais estritamente ao conteúdo específico. Para isso, a proposta é que os estudantes criem seus quadros usando retas e circunferências ou apenas uma dessas figuras, mas agora dentro de um sistema cartesiano delimitado pelo professor, como x de -10 a 10 e y de -10 a 10 , para que a posterior representação dos quadros no computador seja de tamanho adequado para a impressão.

A criação e a pintura da obra de cada estudante devem ser feitas nesse plano cartesiano. Depois disso, devem ser determinadas as equações de cada reta e a circunferência nesse sistema.

4ª etapa

A seguir, usando o programa Winplot, as equações das retas e circunferências devem ser lançadas no computador a fim de que os estudantes produzam um esboço parecido com os quadros que criaram. Eventuais erros causados por equações de reta ou circunferência incorretas ou por falhas na digitação podem ser corrigidos pelos estudantes.

Os estudantes podem utilizar um editor de imagens para colorir o desenho, conforme sugerido na 3ª, 4ª e 5ª etapas da seção **Projeto**, obtendo assim uma imagem informatizada de sua criação.

5ª etapa

O produto deste projeto é a criação de trabalhos de arte pelos estudantes, com eventual envolvimento da disciplina de Arte da escola. Seria bastante oportuno programar uma exposição das obras e a elaboração de um relatório final. O professor de Língua Portuguesa pode orientar sobre a forma mais adequada de redação do relatório, que poderá conter os passos da pesquisa realizada, com comentários dos estudantes, descrição das aprendizagens feitas, das dificuldades encontradas e de como elas foram enfrentadas ou resolvidas.

Esse projeto permite ainda o envolvimento da comunidade da escola (professores de História, Arte e Língua Portuguesa) e de fora dela, como amigos e familiares que tenham informações ou conhecimentos que possam ampliar a aprendizagem dos estudantes.

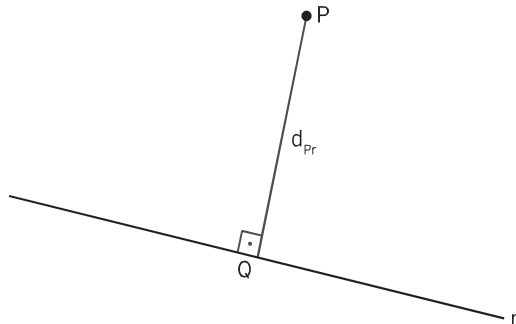
Sugestões de conteúdos complementares

Texto

Distância de um ponto a uma reta

Sejam uma reta r e um ponto $P(x_p, y_p)$.

Imagens: Zapit



Se P não pertence à reta, d_{Pr} é a medida do segmento PQ , com Q ponto da reta r e $\overline{PQ} \perp r$.

A distância de P a r será indicada por d_{Pr} .

É claro que:

$$d_{Pr} = 0 \Leftrightarrow P \in r$$

$$d_{Pr} > 0 \Leftrightarrow P \notin r$$

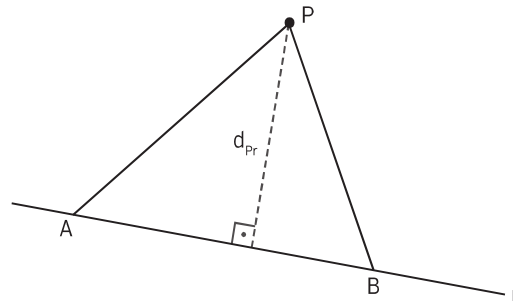
Para $P \notin r$, quaisquer que sejam os pontos distintos $A(x_A, y_A) \in r$ e $B(x_B, y_B) \in r$, existe o $\triangle PAB$, no qual:

$$A_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

Mas $A_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} \cdot d_{AB} \cdot d_{Pr}$. Então:

$$\frac{1}{2} \cdot d_{AB} \cdot d_{Pr} = \frac{1}{2} \cdot |D| \Rightarrow d_{Pr} = \frac{|D|}{d_{AB}}$$

Equação de r



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x - (x_A - x_B)y + x_A y_B - x_B y_A = 0$$

Fazendo $a = y_A - y_B$, $b = x_B - x_A$ e $c = x_A y_B - x_B y_A$, vem $ax + by + c = 0$.

Cálculo de d_{AB}

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \Rightarrow d_{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Cálculo de D

$$D = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D = (y_A - y_B)x_P - (x_A - x_B)y_P + x_A y_B - x_B y_A \Rightarrow D = ax_P + by_P + c$$

Como $d_{Pr} = \frac{|D|}{d_{AB}}$, vem:

$$d_{Pr} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A fórmula foi deduzida supondo-se $P \notin r$, mas ela é válida também no caso contrário, pois, se $P \in r$, então $ax_p + by_p + c = 0$ e $d_{pr} = 0$.

Portanto:

A distância de um ponto $P(x_p, y_p)$ a uma reta $r: ax + by + c = 0$ é dada por:

$$d_{pr} = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemplo:

A distância de $P(-2, 6)$ a $r: 3x + 4y - 1 = 0$ é dada por:

$$d_{pr} = \frac{|3(-2) + 4 \cdot 6 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow d_{pr} = \frac{17}{5}$$

Jogos

No volume do 3º ano desta coleção, três jogos foram incluídos como material complementar: *Capturando pontos*, *Encontre o par* e *Para recordar funções*. Consideramos que os jogos criam situações que exigem soluções originais e rápidas. Nesse processo, o planejamento, a busca por melhores jogadas e a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente propiciam o surgimento de novas ideias, a aquisição de novos conhecimentos, bem como o desenvolvimento de habilidades e atitudes. Investigação, tentativa e erro, levantamento e checagem de hipóteses são algumas das habilidades de raciocínio lógico que estão envolvidas no processo de jogar.

Sugestões de utilização:

- Realizar o mesmo jogo algumas vezes, em dias diferentes, para que os estudantes tenham tempo para aprender a Matemática com o jogo.
- Deixar que os estudantes leiam, interpretem e discutam as regras do jogo.
- Propor aos estudantes que produzam algum registro escrito após o jogo ou que resolvam problemas a partir do jogo.
- Propor aos estudantes que, em grupos, após realizar alguns dos jogos sugeridos na obra, criem seus próprios jogos envolvendo conceitos aprendidos.

Veja, a seguir, os objetivos e as regras de cada um dos jogos.

Orientações para o jogo *Capturando pontos*

Esse jogo tem como objetivos fazer com que os estudantes desenvolvam estimativa e cálculo mental, ampliem a compreensão das propriedades da circunferência, apropriem-se de sua equação e representem pontos no plano cartesiano tendo como base um intervalo dado. Sugerimos, a seguir, algumas explorações para esse jogo durante o desenvolvimento da unidade 4, *Estudo analítico da circunferência*.

1ª proposta

Distribua uma folha de papel quadriculado para cada estudante e peça à turma que leia as regras do jogo. Deixe que os estudantes joguem e observe-os. Após jogarem pelo menos uma partida, analise algumas questões como:

- a) Simone diz para João a equação $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$. João marca a circunferência e diz que Simone fez 5 pontos, mas 3 deles pertencem à circunferência. Pergunta-se: quais os possíveis pontos, atingidos por Simone, que pertencem à circunferência?
- b) Quantos pontos eu posso capturar se a circunferência possuir raio 2? E raio 3?
- c) Se eu tiver uma circunferência de raio 3 e centro $C(1, 4)$, quais pontos posso atingir?

2ª proposta

Deixe que os estudantes joguem novamente. Peça que, em duplas, escrevam uma lista de sugestões para vencer o jogo. Coloque uma das listas na lousa ou retroprojetor e discuta-a com os estudantes, completando essa lista com o auxílio dos demais grupos. Proponha que eles joguem mais uma vez, agora usando as sugestões discutidas. Ao final, eles podem dizer qual sugestão é melhor e por que, qual ajuda menos etc.

3ª proposta

Peça aos estudantes que elaborem, em duplas, três exercícios para serem resolvidos com o jogo e depois os troquem com outras duplas. Ao final, anote na lousa o que aprenderam com o jogo. Peça a eles que registrem no caderno.

Capturando pontos

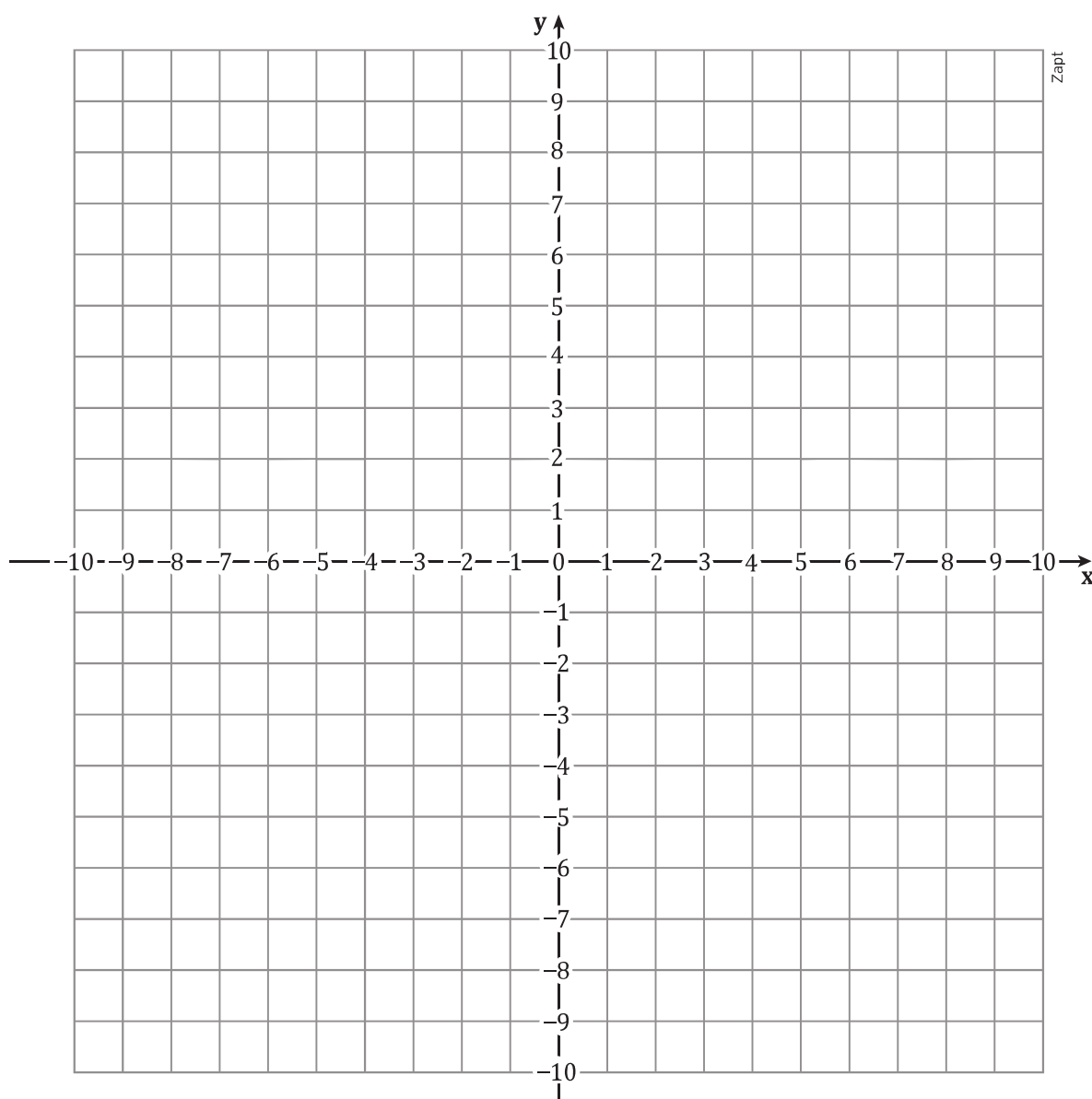
Número de participantes: 2

Material necessário: uma moeda, lápis, compasso e um tabuleiro (veja modelo abaixo) feito com papel quadriculado para cada jogador.

Regras:

- Cada jogador marca em seu tabuleiro 10 pontos sem que o seu adversário veja. Os 10 pontos podem ficar em qualquer posição desde que dentro dos limites do tabuleiro, ou seja, pontos (x, y) com $-10 \leq x \leq 10$ e $-10 \leq y \leq 10$.
- Decide-se quem começa, e os participantes jogam alternadamente.
- Na sua vez, o jogador lança a moeda e diz a equação de uma circunferência da seguinte forma: " $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, em que r é 1 se a moeda tiver caído em cara e r é 2 se a moeda tiver caído em coroa". Os valores do centro (a, b) são escolhidos pelo jogador.
- O adversário traça então a circunferência correspondente em seu tabuleiro e anuncia quantos de seus pontos o outro jogador capturou.
- Os pontos serão capturados quando estiverem no interior da circunferência ou pertencerem a ela.
- Vence o jogo quem conseguir capturar primeiro os 10 pontos do oponente.

Tabuleiro



Orientações para o jogo *Encontre o par*

É um jogo que busca aprimorar no estudante a compreensão das relações trigonométricas e desenvolver o cálculo rápido das razões trigonométricas dos arcos fundamentais, a resolução de problemas simples e estimativa de valores. Possibilita a leitura e a interpretação de textos que envolvem conceitos de Geometria plana e Trigonometria (explorados no capítulo 11, *Funções trigonométricas*) e permite, ainda, ampliações e explorações como as sugeridas a seguir.

1ª proposta

Peça aos estudantes que, em grupos, leiam as regras e analisem as cartas, fazendo uma lista sobre o que é preciso saber para jogar bem *Encontre o par*. Sugira que conversem sobre possíveis dúvidas, analisem as cartas que acharem mais complexas etc. Conduza uma conversa sobre esses aspectos e, se necessário, faça um painel revisando: área de triângulo; relações trigonométricas no triângulo retângulo; valores de seno, cosseno e tangente dos arcos 0° , 15° e 30° . Combine com eles como vão confeccionar as cartas para jogar.

2ª proposta

Enquanto os estudantes jogam em grupos, circule pela sala de aula para ver como estão jogando, as dúvidas que têm, as estratégias que utilizam etc. Peça a eles que registrem as possíveis dificuldades observadas durante o jogo. Ao final de algumas jogadas, analise com a turma as anotações, conversem sobre as dificuldades e formas de superá-las e listem sugestões para jogar melhor na próxima vez. Avise aos estudantes que farão apenas mais uma jogada e precisam se preparar para ela usando as sugestões listadas.

3ª proposta

Produzir um texto sobre as aprendizagens realizadas durante o jogo.

Encontre o par

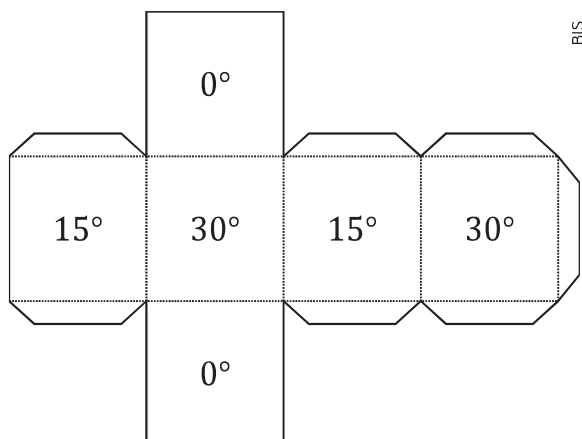
Número de participantes: 2 ou 3

Material necessário: uma cópia do baralho de cartas (ver páginas a seguir) e do dado a seguir, com os valores dos ângulos em graus (0° , 15° e 30°), papel e lápis para registrar os cálculos. Recortar as cartas e o dado das cópias, e montar o dado.

Regras:

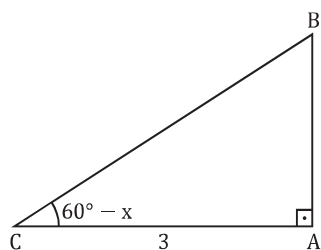
- As cartas são embaralhadas e colocadas no centro de uma mesa (ou carteira) com as faces voltadas para baixo.
- Os participantes decidem a ordem em que cada um vai jogar.
- Em cada jogada, cada um dos participantes retira duas cartas do monte e joga o dado duas vezes, anotando os valores obtidos.
- Cada jogador deve substituir os valores de x em suas cartas pelos valores dos ângulos obtidos no dado, escolhendo qual valor, entre os dois sorteados por ele, quer colocar em cada carta.
- Se o jogador, ao calcular o que se pede nas cartas, conseguir dois valores numericamente iguais, ele permanece com o par de cartas; caso contrário, ele devolve as cartas para um segundo monte sobre a mesa. Essas cartas não poderão mais ser utilizadas nas jogadas seguintes.
- Após cada jogador conferir os cálculos dos demais, uma nova jogada é feita.
- Quando acabarem as cartas do monte inicial, o jogo termina, e ganha o jogador que tiver o maior número de cartas.

Dado

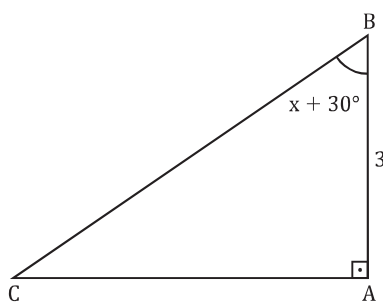


Baralho

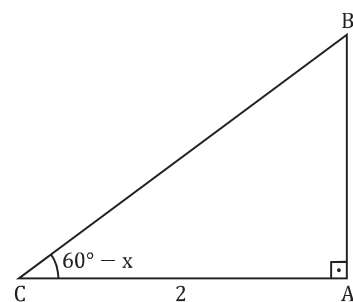
O valor de AB no triângulo retângulo ABC



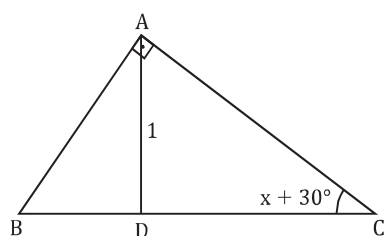
O valor de AC no triângulo retângulo ABC



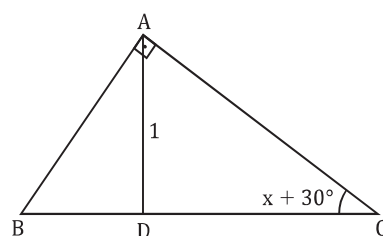
A área do triângulo retângulo ABC



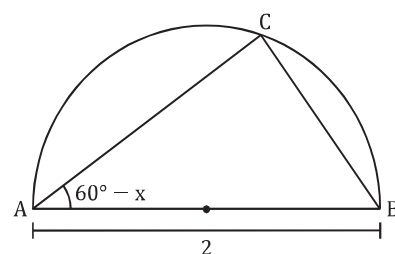
O valor de AB no triângulo retângulo ABC de altura AD = 1



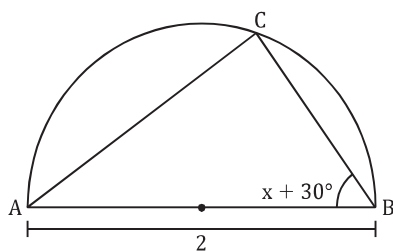
O valor de AC no triângulo retângulo ABC de altura AD = 1



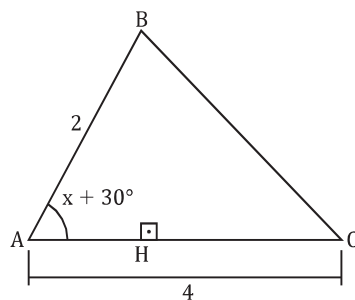
O valor de BC no triângulo ABC, sendo que \overline{AB} mede 2 e é um diâmetro do semicírculo



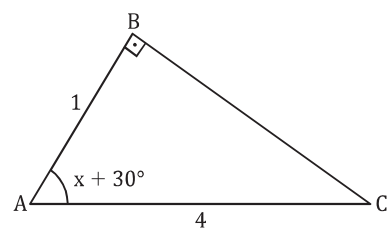
O valor de AC no triângulo ABC, sendo que \overline{AB} mede 2 e é um diâmetro do semicírculo



A altura BH do triângulo ABC



A área do triângulo ABC



O valor de $\sin 3x + \cos 3x$

O valor de $\sin (2x + 60^\circ)$

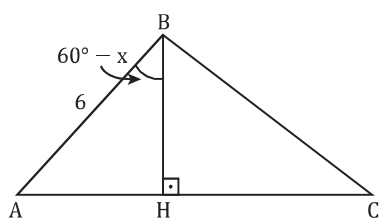
O valor de $2 \cos (45^\circ - 3x)$

O valor de
 $2 \operatorname{sen} (30 + 2x)$

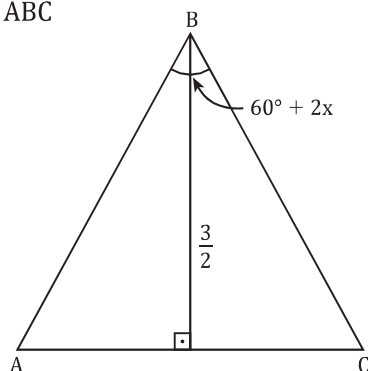
O valor de $\sqrt{3} - \operatorname{tg} 2x$

O valor de $3 \operatorname{tg} (60^\circ - x)$

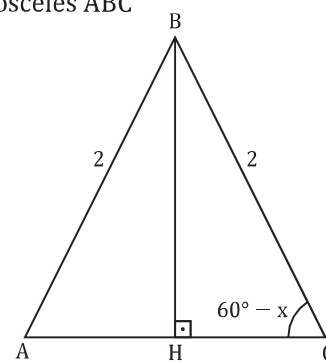
A altura BH do triângulo ABC



A base do triângulo isósceles ABC



A altura BH do triângulo isósceles ABC



Imagens: BIS

O valor da função
 $f(x) = 2\sqrt{3} \operatorname{sen}^2 3x$

O valor da função
 $f(x) = 2 \cos 2x$

O valor da função
 $f(x) = 2 \cos^2 3x$

O valor da função
 $f(x) = \operatorname{sen} (90^\circ - 2x)$

O valor da função
 $f(x) = 3 \cdot \operatorname{tg} 2x$

O valor da função
 $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos (x + 30^\circ)$

Orientações para o jogo *Para recordar funções*

O objetivo desse jogo é levar os estudantes a revisar as primeiras propriedades de funções polinomiais relativas a domínio, imagem, gráfico, raízes, crescimento, pontos de máximo e de mínimo. Veja sugestões de exploração que podem ser aplicadas durante o estudo do capítulo 12, *Taxa de variação de funções*.

1ª proposta

Peça aos estudantes que, em grupos de 3 ou 4, analisem as cartas do jogo e completem um quadro como este.

Funções	Classificação	Quanto à(s) raiz(raízes)	Corta o eixo x	Corta o eixo y	Características do gráfico
$y = 2x + 3$	Função de 1ª grau	Possui uma raiz.	$-\frac{3}{2}$	3	O gráfico é uma reta crescente.
$y = x^2 - x$	Função de 2ª grau	Possui duas raízes reais e diferentes.	$x = 0$ e $x = 1$	0	O gráfico é uma parábola com concavidade voltada para cima. Crescente: $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ Decrescente: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Ao final, analise o quadro com os estudantes.

2ª proposta

Em uma outra aula, os estudantes devem jogar e, se necessário, consultar o quadro da aula anterior. Ao final de uma partida, converse com eles sobre o jogo e as aprendizagens/revisões que ele permitiu.

3ª proposta

Comece uma outra aula pedindo que os estudantes joguem novamente e que, ao jogar, cada um deles registre as possíveis dificuldades ou dúvidas para a função que achou mais difícil relacionar com as tiras de propriedades. Ao final, peça aos grupos que socializem as anotações e conduza uma discussão sobre as funções, fazendo uma revisão bem interessante a partir do jogo.

Para recordar funções

Número de participantes: 3 ou 4

Material necessário: uma cópia das cartas de funções e das tiras de propriedades (ver páginas a seguir). As cartas e as tiras da cópia devem ser recortadas.

Regras:

- As cartas são embaralhadas e colocadas no centro de uma mesa (ou carteira) com as faces voltadas para baixo. As tiras de propriedades, também com as faces voltadas para baixo, formam outro monte no centro da mesa.
- Os participantes decidem a ordem em que cada um vai jogar.
- Em cada jogada, cada um dos participantes retira uma carta de funções do monte e cinco tiras de propriedades.
- A seguir, seleciona entre as tiras em sua mão aquelas com propriedades que sua função possui ou a que satisfaz e forma seu “banco”, colocando, enfileiradas à sua frente, a função e as propriedades selecionadas, de modo a ficarem visíveis aos demais jogadores, que devem conferir se o “banco” está correto para a função. As tiras com propriedades que não se relacionam com a função tirada permanecem em sua mão, podendo ser usadas nas próximas jogadas para as novas cartas de funções.

- A partir da segunda jogada, se o jogador não tiver nenhuma propriedade de sua função, ele poderá capturar dos “bancos” dos oponentes uma propriedade de cada um, a cada jogada, desde que a propriedade capturada seja de sua função. A captura pode ser bloqueada quando o jogador tiver em seu “banco” três ou mais propriedades de sua função, que, nesse caso, ficam definitivamente com o jogador, juntamente com a função a que se relacionam.
- A cada jogada, cada um retira dos montes uma nova função e cinco tiras de propriedades, que podem ser colocadas em seu “banco”, em quaisquer das funções que lá estão, ou ser usadas para a nova função escolhida.
- As funções não podem ser capturadas, apenas as tiras de propriedades.
- Quando terminar o monte das funções, encerra-se o jogo. Ganha quem tiver mais tiras de propriedades em seu “banco”.

Variação:

As cartas podem ser modificadas com outras expressões elaboradas pelos próprios estudantes, ou por funções que o professor deseja enfatizar.

Cartas de funções

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = -x + 4$$

$$y = -x - 4$$

$$y = x^2 + x$$

$$y = x^2 - x$$

$$y = -x^2 + x$$

$$y = -x^2 - x$$

$$y = 2^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = \log x$$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$y = x^3$$

$$y = -x^3$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = x^3 - x$$

$$y = -x^3 + x$$

$$y = x^3 + 1$$

$$y = x^3 - 1$$

Tiras de propriedades

Tem domínio \mathbb{R} .

Tem domínio \mathbb{R} .

Tem domínio \mathbb{R} .

Tem domínio \mathbb{R} .

Tem domínio $\mathbb{R} - \{0\}$.

Tem domínio $[0, +\infty[$.

Tem domínio $]0, +\infty[$.

É crescente em seu domínio.

É crescente em seu domínio.

É crescente em seu domínio.

É decrescente em seu domínio.

É decrescente em seu domínio.

É decrescente em seu domínio.

É decrescente em seu domínio.

É crescente e decrescente em intervalos de seu domínio.

É crescente e decrescente em intervalos de seu domínio.

É crescente e decrescente em intervalos de seu domínio.

Possui apenas pontos de máximo.

Possui apenas pontos de máximo.

Possui apenas pontos de mínimo.

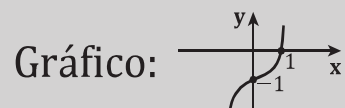
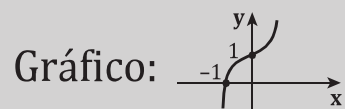
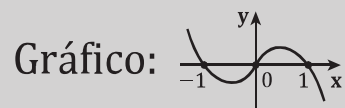
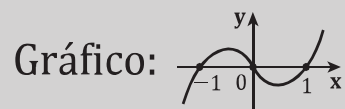
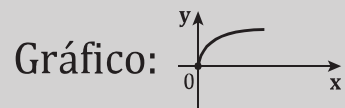
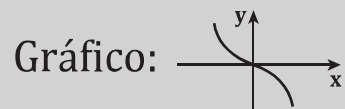
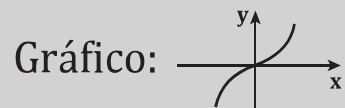
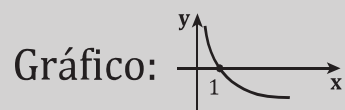
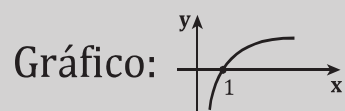
Possui apenas pontos de mínimo.

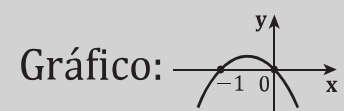
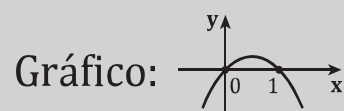
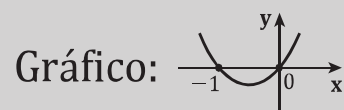
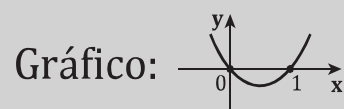
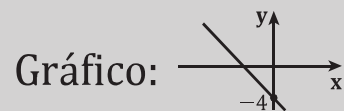
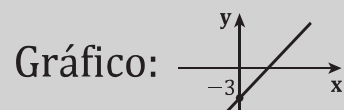
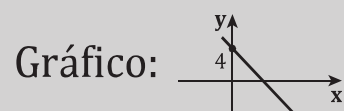
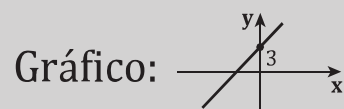
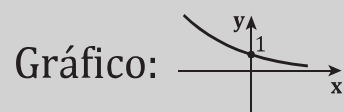
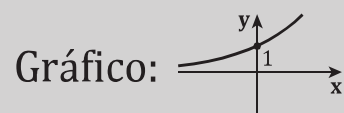
Possui pontos de máximo e de mínimo.

Possui pontos de máximo e de mínimo.

Não possui pontos de máximo nem de mínimo em seu domínio.

Não possui pontos de máximo nem de mínimo em seu domínio.





$$17. M = C \cdot (1 + i \cdot t)$$

$$1\,080 = 800 \cdot (1 + 0,025 \cdot t)$$

$$\frac{1\,080}{800} = 1 + 0,025 \cdot t$$

$$1,35 = 1 + 0,025 \cdot t$$

$$t = 14$$

14 meses ou 1 ano e 2 meses.

18. Pelas informações do enunciado, podemos escrever uma relação entre a quantidade de camisetas vendidas e o lucro obtido. Se x corresponde ao número de camisetas vendidas e y é o lucro obtido com essa venda, temos:

$$y = 8 \cdot x - 320$$

A partir dessa função, verificamos que o coeficiente linear é igual a -320 e o coeficiente angular é igual a 8 . Portanto, essa função é representada pelo gráfico da alternativa b .

19. Observando o gráfico, temos:

$$\begin{array}{c} x \quad N(x) \\ + 20 \left(\begin{array}{cc} 20 & 360 \\ 40 & 120 \end{array} \right) - 240 \end{array}$$

$$\frac{\Delta N(x)}{\Delta x} = \frac{-240}{20} = -12$$

$$N(x) - N(x_0) = m(x - x_0)$$

$$N(x) - 360 = -12(x - 20)$$

$$N(x) = -12x + 600$$

Se $R(x)$ é o valor arrecadado na venda de $N(x)$ ingressos, então:

$$R(x) = N(x) \cdot x =$$

$$= x(-12x + 600) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } -12x + 600 = 0 \Rightarrow x = 50$$

$$x_1 = \frac{0 + 50}{2} = 25$$

Logo, o valor do ingresso deve ser de R\$ 25,00.

$$20. 10\,000 = C(1 + 0,1 \cdot 1) \Rightarrow C = \frac{10\,000}{1,1}$$

$$J = M - C = 10\,000 - \frac{10\,000}{1,1} \Rightarrow J \approx \text{R\$ } 909,09$$

Alternativa d .

21. À vista: $0,9x$ (ou duas parcelas de $0,5x$).

No preço de tabela, há um acréscimo de $0,1x$.

Se a prazo não houvesse juros, as parcelas seriam $0,5x$ e $0,4x$.

Como $0,1x$ é 25% de $0,4x$, teremos uma taxa mensal de juros de 25%.

Alternativa e .

$$22. x \cdot i \cdot t = y \cdot 3i \cdot \left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow x = 1,5y$$

$$\text{Mas } x + y = 516$$

$$1,5y + y = 514$$

$$y = 206,4$$

$$x = 309,6$$

$$\text{Assim: } x - y = 309,6 - 206,4 = 103,2$$

Alternativa a .

$$23. M(x) = C + J = C + C \cdot i \cdot x =$$

$$= 5\,000 + 5\,000 \cdot \frac{3}{10} \cdot x$$

$M(x) = 5\,000 + 15x$, cujo gráfico é uma reta que passa pelo ponto $(0, 5\,000)$ e $M(x)$ cresce à medida que x cresce.

Alternativa a .

24. 2 anos e meio = 30 meses

$$a) M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M = 14\,000 \cdot (1 + 0,015)^{30}$$

$$M \approx 21\,883,12$$

Fábio recebeu R\$ 21 883,12.

$$b) 100\% - 13\% = 87\%$$

$$\frac{21\,883,12}{x} = \frac{100\%}{87\%}$$

$$x \approx 19\,038,32$$

Fábio receberá R\$ 19 038,32

$$25. M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$12\,825 = C \cdot (1 + 0,07)^{24}$$

$$C = 2\,528,41$$

O valor aplicado foi de R\$ 2 528,41.

$$26. M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$65\,400 = 60\,000 \cdot (1 + 0,022)^t$$

$$1,09 = 1,022^t$$

$$\log 1,09 = \log 1,022^t$$

$$\log 1,09 = t \cdot \log 1,022$$

$$t = 4 \text{ meses}$$

Ele terá esse montante daqui a 4 meses.

$$27. M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$36\,087 = 24\,000(1 + i)^8$$

$$1,503625 = (1 + i)^8$$

$$1,05230 = 1 + i$$

$$i = 0,05230 \Rightarrow i = 5,23\%$$

Com esta taxa ele vai receber mais do que o planejado. A taxa ideal seria de aproximadamente 5,24%.

$$28. M = C \cdot (1 + i)^t$$

$$M = 22\,000(1 - 0,045)^3$$

$$M \approx 19\,161,65$$

$$19\,161,65 \text{ ————— } 100\%$$

$$x \text{ ————— } 2\%$$

$$x = 383,23\%$$

$$19\,161,65 + 383,23 = 19\,544,88$$

Ele deve vendê-la por R\$ 19 544,88.

29. $702 - 390 = 312,00$ (valor inicial da dívida)

$$312,00 \text{ ————— } 100\%$$

$$390,00 \text{ ————— } x$$

$$x = 125\%$$

$$125\% - 100\% = 25\% \text{ (a.m.)}$$

A taxa mensal é de 25%.

$$30. M = C \cdot (1 + 0,02)^4$$

$$M = 1,0824 \cdot C$$

$$C \text{ ————— } 100\%$$

$$1,0824 C \text{ ————— } x$$

$$x = 108,24\%$$

Inflação acumulada de 8,24%.

31. A resolução de Pedro está correta.

$$32. P = \frac{80 - 58}{80} = 27,5\%$$

Alternativa e .

33. a) Oito salários mínimos: $8 \cdot 465,00 = 3\,720,00$

Para o plano de saúde: $\frac{54}{360} \cdot 3\,720 = 558,00$, que é o valor correspondente à faixa de 61 anos ou mais.

- b) $\left(\frac{372}{465}\right) = 0,8$, ou seja, o plano de saúde representa 80% de um salário mínimo.

Se x o número de salários mínimos ganhos, o custo $C(x)$ será $C(x) = \frac{0,8}{x}$.

34. Fibonacci:

$$\begin{cases} C = 1 & 2 = 1(1 + i)^5 \\ i = ? & 2 = (1 + i)^5 \\ t = 5 \text{ anos} & \sqrt[5]{2} - 1 = i \\ M = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 2 & 4 = 2(1 + i)^5 \\ i = ? & 2 = (1 + i)^5 \\ t = 5 \text{ anos} & i = \sqrt[5]{2} - 1 \\ M = 4 \end{cases}$$

$$M = ? \quad M = 1(1 + \sqrt[5]{2} - 1)^{100}$$

$$t = 100 \text{ anos} \quad M = (\sqrt[5]{2})^{100}$$

$$M = 220 \text{ denários}$$

Portanto, $2^{20} - 1$ denários é quanto ele ganharia além do denário inicial.

Tartaglia:

$$C = 2\,814$$

$$618 \cdot 9 = 5\,562$$

$$j = 618/\text{ano}$$

$$t = 9 \text{ anos}$$

$$i = ?$$

Juros simples	Juros compostos
$5\,562 - 2\,814 =$	$5\,562 =$
$= 2\,814 \cdot i \cdot 9 \Rightarrow$	$= 2\,814 (1 + i)^9 \Rightarrow$
$\Rightarrow i \approx 11\% \text{ a.a.}$	$\Rightarrow i \approx 8\% \text{ a.a.}$

Portanto, o mercador estava obtendo 11% a.a. de juros simples ou 8% a.a. de juros compostos sobre seu dinheiro.

Foco no raciocínio lógico (p. 23)

1. x garrafas — 1 caixa — R\$ 100,00

$$\text{Custo de 1 garrafa: } \frac{100}{x}$$

$$\text{Custo de 12 garrafas: } 12 \cdot \frac{100}{x}$$

$$\text{Preço da dúzia: } 12 \cdot \frac{100}{x} + 10$$

$$\text{Preço de 1 garrafa: } \left(\frac{\frac{1200}{x} + 10}{12} \right) = 100$$

$$(x - 4) \left(\frac{\frac{1200}{x} + 10}{12} \right) = 100$$

$$(x - 4) \left(\frac{1200 + 10x}{x} \right) = 1\,200$$

$$1\,200x - 4\,800 + 10x^2 - 40x = 1\,200x$$

$$10x^2 - 40x - 4\,800 = 0$$

$$x^2 - 4x - 480 = 0$$

$$\Delta = 16 + 1\,920 = 1\,936$$

$$x = \frac{4 \pm 44}{2}$$

$$x = -20 \text{ (não convém)} \text{ ou } x = 24$$

Portanto, havia 24 garrafas na caixa.

2. 1ª exercício — R\$ 1,00

2ª exercício — R\$ 2,00

3ª exercício — R\$ 4,00

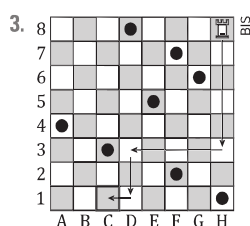
Ao final de 10 exercícios, o filho recebeu R\$ 120,00.

Acertos:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 127$$

$$\text{Erros: } 1 + 2 + 4 = 7$$

O filho acertou 7 exercícios.



Para que a torre chegue à casa C1, o número mínimo de movimentos será igual a 4.

Aprender a aprender (p. 24)

1. Respostas pessoais.

Exemplos:

- a) É toda função que pode ser escrita na forma $y = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}$.

$$\text{Exemplos: } y = 5x + 3$$

$$y = -2x + \sqrt{2}$$

- b) Coeficiente angular é uma constante que determina a tangente do ângulo de inclinação da reta (gráfico de função afim). Coeficiente linear é o valor que y assume quando $x = 0$.

$$y = 3x + 2; \text{ coeficiente angular} \rightarrow 3$$

$$\text{coeficiente linear} \rightarrow 2$$

$$y = -x + 1; \text{ coeficiente angular} \rightarrow -1$$

$$\text{coeficiente linear} \rightarrow 1$$

- c) É o valor que x assume quando $y = 0$.

$$y = 5x + 10$$

$$y = 3x - 1$$

$$0 = 5x + 10$$

$$0 = 3x - 1$$

$$x = -2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

- d) Gráficos de funções afim são sempre retas. O sinal da função muda em torno da raiz, quando houver.

$$2. -2x + 3 \geq 0$$

$$-2x \geq -3$$

$$2x \leq 3$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2} \right\} = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right]$$

$$3. a) 1\,200 + \frac{20}{100} \cdot (500 \cdot x) \leq 2\,000$$

$$\frac{20}{100} \cdot (500 \cdot x) \leq 800$$

$$100x \leq 800$$

$$x \leq 8$$

A importância máxima a ser cobrada é de R\$ 8,00.

- b) $500 \cdot 8,00 = 4\,000$ (arrecadação total)

$$1\,200 + \frac{20}{100} \cdot 4\,000 = 2\,000 \text{ (valor a ser pago para o conjunto)}$$

$$4\,000 - 2\,000 = 2\,000$$

Sobrarão R\$ 2 000,00 para outras despesas.

4. h e $h - 2$ são as alturas iniciais das velas **A** e **B**. Temos:

$$h_A(t) = \frac{0 - h}{5 - 0} = -\frac{h}{5} \cdot t + h$$

$$h_B(t) = \frac{0 - (h - 2)}{6 - 1} \cdot t + b = \frac{2 - h}{5} \cdot t + b$$

$$\text{Então: } h_B(6) = 0 \Rightarrow \frac{2 - h}{5} \cdot 6 + b = 0 \Rightarrow b = \frac{6h - 12}{5}$$

Para $t = 2$, as velas têm a mesma altura:

$$h_A(2) = h_B(2) \Rightarrow -\frac{2h}{5} + h = \frac{(2 - h)}{5} \cdot 2 + \frac{6h - 12}{5} \Rightarrow h = 8 \text{ cm}$$

Assim, temos 8 cm e 6 cm antes de serem acesas.

Cálculo rápido (p. 25)

$$1. a) \frac{50}{100} \cdot 400 = 200$$

$$\frac{25}{100} \cdot 400 = 100$$

$$75\% \text{ de } 400: 200 + 100 = 300$$

$$b) \frac{50}{100} \cdot 60 = 30$$

$$\frac{25}{100} \cdot 60 = 15$$

$$75\% \text{ de } 60: 30 + 15 = 45$$

$$c) \frac{50}{100} \cdot 1\,700 = 850$$

$$\frac{25}{100} \cdot 1\,700 = 425$$

$$75\% \text{ de } 1\,700: 850 + 425 = 1\,275$$

$$2. a) \frac{50}{100} \cdot 200 = 100$$

$$\frac{5}{100} \cdot 200 = 10$$

$$45\% \text{ de } 200: 100 - 10 = 90$$

$$b) \frac{10}{100} \cdot 356 = 35,6$$

$$20\% \text{ de } 356: 10\% + 10\% = 71,2$$

$$c) \frac{50}{100} \cdot 1\,380 = 690$$

$$\frac{10}{100} \cdot 1\,380 = 138$$

$$5\% \text{ de } 1\,380: 69$$

$$65\% = 50\% + 10\% + 5\% = 897$$

$$d) \frac{50}{100} \cdot 50 = 25$$

$$150\% = 100\% + 50\% = 75$$

- e) $37,5\% = \frac{75\%}{2} = \frac{(100\% - 25\%)}{2} = \left(\frac{100\%}{2} - \frac{25\%}{2}\right)$
 $\left(\frac{100\%}{2} - \frac{25\%}{2}\right)$ de 80: $40 - 10 = 30$
3. a) 100% ——— 15
 20% ——— x
 $x = 3$
 $15 + 3 = 18$
 Há 18 bombons no pacote.
 (Professor, este exercício pode ser resolvido de outras maneiras.)
- b) $R \rightarrow 50\% = 40Q$
 $S \rightarrow 45\% = 36Q$
 $P \rightarrow \frac{5}{8}$
 $1 \text{ ——— } 80$
 $\frac{5}{8} \text{ ——— } P$
 $P = 50$
 Paulo acertou 50 questões e se saiu melhor.
- c) 100% ——— 454 g
 15% ——— x
 $x = 68,1 \text{ g}$ (em cada pacote)
 $3 \text{ pacotes} \rightarrow 3 \cdot 68,1 \text{ g} = 204,3 \text{ g}$
 Pagaria 204,3 g sem levar.
4. a) $\frac{10}{100} \cdot x = 20$
 $x = 200$
- b) $\frac{60}{100} \cdot y = 12$
 $y = 20$
5. a) $\frac{4}{10} = 0,4$
 $\frac{4}{100} = 0,04$
 $\frac{4}{1000} = 0,004$
- b) $\frac{0,04}{10} = 0,004$
 $\frac{0,04}{100} = 0,0004$
 $\frac{0,04}{1000} = 0,00004$
- c) $\frac{64}{10} = 6,4$
 $\frac{64}{100} = 0,64$
 $\frac{64}{1000} = 0,064$
- d) $\frac{1,01}{10} = 0,101$
 $\frac{1,01}{100} = 0,0101$
 $\frac{1,01}{1000} = 0,00101$
- e) $\frac{130}{10} = 13$
 $\frac{130}{100} = 1,3$
 $\frac{130}{1000} = 0,13$
6. a) $4 \cdot 10 = 40$
 $4 \cdot 100 = 400$
 $4 \cdot 1000 = 4000$
- b) $0,04 \cdot 10 = 0,4$
 $0,04 \cdot 100 = 4$
 $0,04 \cdot 1000 = 40$
- c) $64 \cdot 10 = 640$
 $64 \cdot 100 = 6400$
 $64 \cdot 1000 = 64000$
- c) $\frac{25}{100} \cdot z = 4$
 $z = 16$
- d) $\frac{80}{100} \cdot w = 120$
 $w = 150$
- f) $\frac{10,2}{10} = 1,02$
 $\frac{10,2}{100} = 0,102$
 $\frac{10,2}{1000} = 0,0102$
- g) $\frac{0,4}{10} = 0,04$
 $\frac{0,4}{100} = 0,004$
 $\frac{0,4}{1000} = 0,0004$
- h) $\frac{102}{10} = 10,2$
 $\frac{102}{100} = 1,02$
 $\frac{102}{1000} = 0,102$
- i) $\frac{6,4}{10} = 0,64$
 $\frac{6,4}{100} = 0,064$
 $\frac{6,4}{1000} = 0,0064$

- d) $1,01 \cdot 10 = 10,1$
 $1,01 \cdot 100 = 101$
 $1,01 \cdot 1000 = 1010$
- e) $130 \cdot 10 = 1300$
 $130 \cdot 100 = 13000$
 $130 \cdot 1000 = 130000$
- f) $10,2 \cdot 10 = 102$
 $10,2 \cdot 100 = 1020$
 $10,2 \cdot 1000 = 10200$
- g) $0,4 \cdot 10 = 4$
 $0,4 \cdot 100 = 40$
 $0,4 \cdot 1000 = 400$
- h) $102 \cdot 10 = 1020$
 $102 \cdot 100 = 10200$
 $102 \cdot 1000 = 102000$
- i) $6,4 \cdot 10 = 64$
 $6,4 \cdot 100 = 640$
 $6,4 \cdot 1000 = 6400$

7. a) $1,22 \cdot 1,27 = \frac{12,2}{10} \cdot 1,27 = \frac{15,494}{10} = 1,5494$
 b) $12,2 \cdot 1,27 = 12,2 \cdot 10 \cdot 1,27 = 15,494 \cdot 10 = 154,94$
 c) $0,122 \cdot 1,27 = \frac{12,2}{100} \cdot 1,27 = \frac{15,494}{100} = 0,15494$
 d) $12,2 \cdot 12,7 = 12,2 \cdot 10 \cdot 1,27 \cdot 100 = 15,494 \cdot 1000 = 15494$
 e) $0,122 \cdot 12,7 = \frac{12,2}{100} \cdot 1,27 \cdot 100 = 15,494$
 f) $12,2 \cdot 12,7 = 12,2 \cdot 1,27 \cdot 10 = 15,494 \cdot 10 = 154,94$

8. a) $0,2 \cdot 3 = \frac{2}{10} \cdot 3 = 0,6$
 b) $0,2 \cdot 0,3 = \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0,06$
 c) $0,2 \cdot 0,2 = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0,04$
 d) $0,02 \cdot 2 = \frac{2}{100} \cdot 2 = 0,04$

CAPÍTULO 2

Fazer e aprender (p. 31)

- Respostas pessoais.
- a) Discreta. c) Contínua. e) Contínua.
 b) Discreta. d) Discreta.
- a) Sobre os meios de transportes de carga no país.
 b) Matriz de transporte de cargas no Brasil.
 c) $58\% - 33\% = 25\%$
 d) $29314 \text{ — } 25\%$
 $x \text{ — } 32\%$
 $x = 37521,92 \text{ km}$
 e) Resposta pessoal.
- a) $1622 + 604 + 330 + 313 + 344 + 123 + 27 = 3363$ (3 363 milhões de internautas)
 b) 35% de 204 milhões de pessoas é o mesmo que 71,4 milhões de pessoas; 71,4 milhões de pessoas, no total de 3 363 milhões, corresponde a 2,12%, ou seja, em novembro de 2015, os brasileiros internautas correspondiam a aproximadamente 2% dos internautas no mundo.
- a) Consiste em uma estimativa do número médio de filhos que uma mulher tem ao longo da vida.
 b) Em 1960 e, provavelmente, após 2010, segundo a projeção.
 c) Aproximadamente 5 filhos.
 d) Resposta pessoal.
- Alternativa c, pois é a única alternativa que envolve o grupo D, cujo número de filhos não está especificado. Logo, não podemos tirar conclusões sobre esse grupo.
- Plano A $\rightarrow 100 + 5 + 14 + 92 + 40 + 27 = 278 \text{ kWh}$
 Plano B $\rightarrow 50 + 5 + 92 + 40 + 27 = 214 \text{ kWh}$
 Plano C $\rightarrow 50 + 14 + 92 + 40 + 27 = 223 \text{ kWh}$
 Alternativa e.

8. Como o crescimento de janeiro a abril foi linear e em fevereiro o lucro foi de 174 mil reais, em janeiro o lucro foi de $174 - k$, em março o lucro foi de $174 + k$ e, em abril, o lucro foi de $174 + 2k$. De acordo com o enunciado, de abril a junho há uma queda nos lucros de 15 mil reais ao mês; então, se em maio o lucro foi de 183 mil reais, em abril o lucro foi de 198 mil reais. Assim, temos: $174 + 2k = 198 \Rightarrow k = 12$. Portanto, o lucro em janeiro foi de 162.

Alternativa b.

9. a) Incorreto. O crescimento da emissão de dióxido de carbono não foi constante; por exemplo, de 1960 a 1970 o crescimento foi de 5,4 bilhões de toneladas e, de 1970 a 1980, o crescimento foi de 4,6 bilhões de toneladas.
b) Incorreto. Os anos 90 tiveram um crescimento da emissão de dióxido de carbono de aproximadamente 16%.
c) Incorreto. O menor valor de emissão de dióxido de carbono da primeira década do século XXI foi apresentado no ano de 2005.
d) Incorreto. O crescimento percentual no período considerado foi de aproximadamente 50%.
e) Correto.

Alternativa e.

Foco na leitura (p. 34)

A população brasileira em 2003 era de 177 milhões de habitantes. A produção de grãos era de aproximadamente:

3 milhões de toneladas de feijão

5 milhões de toneladas de trigo

10 milhões de toneladas de arroz

3 milhões de toneladas de feijão

50 milhões de toneladas de soja

45 milhões de toneladas de milho

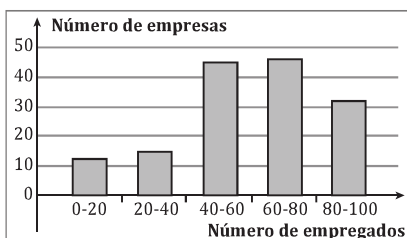
Em um total de 113 milhões de toneladas

Por habitante são:

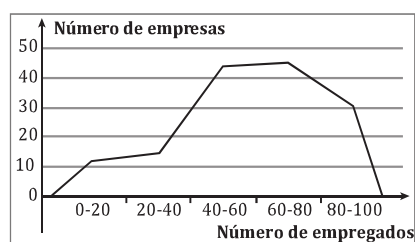
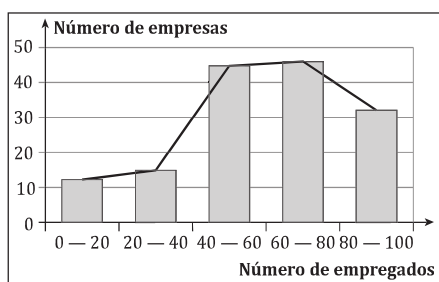
$113\,000\,000\,000 : 177\,000\,000 \approx 638$ (638 kg por pessoa)

Fazer e aprender (p. 37)

10. Histograma



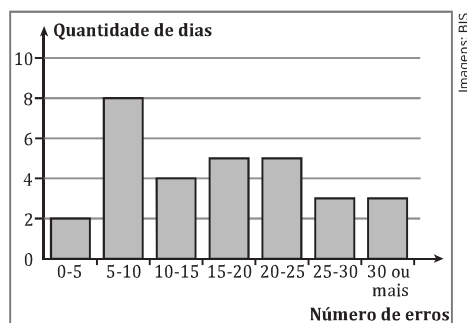
Polígono de frequência



11. a) e b)

Quantidade de erros	Número de dias	Fr (%)
0-5	2	$\frac{2}{30} \cdot 100 = 6,66$
5-10	8	$\frac{8}{30} \cdot 100 = 26,67$
10-15	4	$\frac{4}{30} \cdot 100 = 13,33$
15-20	5	$\frac{5}{30} \cdot 100 = 16,67$
20-25	5	$\frac{5}{30} \cdot 100 = 16,67$
25-30	3	$\frac{3}{30} \cdot 100 = 10$
30 ou mais	3	$\frac{3}{30} \cdot 100 = 10$

c)



Fazer e aprender (p. 40)

12. Média aritmética:

$$\bar{X} = \frac{15 \cdot 3 + 25 \cdot 10 + 35 \cdot 12 + 45 \cdot 5 + 55 \cdot 1 + 65 \cdot 1}{32} = \frac{1060}{32} \approx 33,1$$

Média ≈ 33 anos

Moda:

Classe modal: 30-40

$$\frac{30 + 40}{2} = 35 \therefore 35 \text{ anos é a moda das idades dos funcionários.}$$

Mediana:

A mediana dos 32 valores é a média das idades que ocupam as posições 16 e 17 quando os dados são colocados em ordem crescente. Essas posições acontecem na classe 30-40, cujo ponto médio é 35 anos. Então, a mediana das idades é 35 anos.

13. a) Até 3 salários.

$$b) \bar{X} = \frac{67,1 \cdot 3 + 22,4 \cdot 5 + 7,7 \cdot 11 + 2,8 \cdot 15}{100} = 4,4$$

c) Até 3 salários.

$$14. a) \bar{X} = \frac{2 \cdot 0,2 + 6 \cdot 0,15 + 10 \cdot 0,05 + 14 \cdot 0,1}{100\%} + \frac{18 \cdot 0,05 + 22 \cdot 0 + 26 \cdot 0,3 + 30 \cdot 0,1 + 34 \cdot 0,05}{100\%} = \frac{16,6}{1}$$

$$\bar{X} \approx 16,6 \text{ anos}$$

$$b) 5\% + 30\% + 10\% + 5\% = 50\%$$

15. V V F V F

I. (V) Soma total: 200

II. (V) $35\% \cdot 200 = 70$

III. (F) $12,5\% \cdot 200 = 25$

IV. (V) $9 + 13 + 23 = 45$

V. (F) $87,5\% \cdot 200 = 175$

16. $18 + 16 + 2 = 36$ (36 alunos aprovados)

50 alunos — 100%

36 alunos — x

$x = 72\%$

Alternativa e.

17. O item c.

$$\frac{25 \cdot x + 5 \cdot 6}{30} = 7 \Rightarrow x = 7,2$$

18. $\bar{x} = \frac{60 + 52,5 + 105 + 135 + 90 + 30 + 67,5 + 60}{100} \Rightarrow \bar{x} = 6$

19. Moda \rightarrow até 4 salários
Salário mediano \rightarrow até 4 salários

20. I. $\frac{0 + 1 + 2 + 3 + x}{5} = 24$
 $x = 114$

Alternativa d.

II. As alternativas a e e são absurdas, porque, se o maior número é 24 e os outros são menores, a média não pode ser 24. Se o maior dos números é 120 e os outros são números distintos, a soma deles é maior que 120 e a média será maior que 24.

21. $\bar{x} = \frac{4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 6}{10} = 3$

Me = 3

Mo = 1

Alternativa b.

22. a)

Salário (em reais)	Frequência (nº de empregados)
4 700 – 5 100	20
5 100 – 5 500	110
5 500 – 5 900	170
5 900 – 6 300	120
6 300 – 6 700	30
Total	450

- b) 130 entrevistados.

- c) Média:

$$\bar{x} = \frac{4900 \cdot 20 + 5300 \cdot 110 + 5700 \cdot 170 + 6100 \cdot 120 + 6500 \cdot 30}{450} = \frac{2577000}{450} \approx 5727$$

A média dos salários da empresa é R\$ 5 727,00.

Moda:

Classe modal: 3

$$\frac{5500 + 5900}{2} = 5700$$

Logo, R\$ 5 700,00 é a moda dos salários dessa empresa.

Mediana:

A mediana dos 450 valores é a média das idades nas posições 225 e 226, dos dados em ordem crescente, que acontecem na classe 5 500 – 5 900, cujo ponto médio é 5 700. Então, a mediana dos salários é R\$ 5 700,00.

23. a) $\bar{x} = \frac{48 + 45 + 45 + 98 + 45 + 46 + 78 + 48 + 45}{14} + \frac{48 + 85 + 53 + 73 + 28}{14} = \frac{785}{14} \approx 56,1$

Média ≈ 56

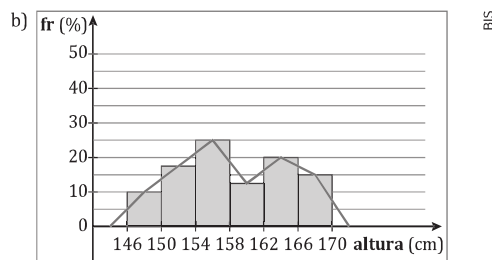
Moda: 45

Mediana: 48

- b) Resposta possível: Essa turma não foi bem. A média está abaixo do mínimo exigido para a aprovação. Apenas 4 estudantes seriam aprovados (Daniel, Gina, Luísa e Neusa).

24. a)

Altura (cm)	Ponto médio	F	Fr (%)
146 – 150	148	4	10
150 – 154	152	7	17,5
154 – 158	156	10	25
158 – 162	160	5	12,5
162 – 166	164	8	20
166 – 170	168	6	15



- c) Até 1,62 m: $4 + 7 + 10 + 5 = 26$ (26 estudantes)
Até 1,70 m: todos os estudantes.

- d) Média:

$$\bar{x} = \frac{148 \cdot 4 + 152 \cdot 7 + 156 \cdot 10 + 160 \cdot 5 + 164 \cdot 8 + 168 \cdot 6}{40} = \frac{6336}{40}$$

$$\bar{x} = 158,4$$

Moda:

Classe modal: 154 – 158.

O ponto médio da classe modal é a moda das alturas. Portanto, 156 cm é a moda das alturas.

Mediana:

A mediana das 40 alturas é a média das alturas nas posições 20 e 21, dos dados em ordem crescente, que acontecem na classe 154 – 158, cujo ponto médio é igual a 156 cm. Então, a mediana das alturas é 156 cm.

25. a) $\bar{x} = \frac{54 + 42 + 60 + 48 + 180}{5} = \frac{384}{5} \approx 76,8$

- b) Não; a maioria dos diretores, 4 entre 5, se responsabiliza por menos do que x funcionários. Todos os diretores discordarão da afirmação.

- c) Porque o valor de x difere bastante da quantidade de funcionários sob responsabilidade de qualquer um dos 5 diretores. A mudança deveria ser: distribuir o número de funcionários dos diretores A, B, C e D de modo a diminuir o número de funcionários do diretor E até esse valor se aproximar de \bar{x} .

Para complementar (p. 42)

1. a) Verdadeira.

- b) Falsa. B é a mediana e A é a média. Além disso, a mediana não sofre influência de valores extremos. Já a média sofre influência de todos os dados.

- c) Falsa. C é a moda.

- d) Falsa.

Fazer e aprender (p. 46)

26. a) Atleta A:

$$\bar{x} = \frac{464 + 467 + 469 + 474 + 476}{5} = 470$$

Me = 469

Atleta B:

$$\bar{x} = \frac{467 + 469 + 472 + 473}{4} = 470,25$$

Me = 470,5

O coordenador deve escolher o atleta A, que possui média e mediana menores que as do atleta B.

- b) Resposta pessoal. O atleta B possui maior regularidade nos resultados e seu rendimento parece ter caído menos que o do atleta A, porém ele nunca atingiu a marca de 464 décimos de segundo do atleta A.

- c) Não, pois o desempenho de um atleta depende de diversos fatores, como suas condições física e psicológica.

27. a) 12 s b) 6 s

- c) Sim, porque, embora o atleta A tenha melhor desempenho, ele é menos “constante” em seus resultados.

28. a) Estudante A: $\bar{x} = \frac{10 + 10 + 10 + 10}{4} = 10$

Estudante B: $\bar{x} = \frac{8 + 12 + 8 + 12}{4} = 10$

Estudante C: $\bar{x} = \frac{0 + 8 + 12 + 20}{4} = 10$

Estudante D: $\bar{x} = \frac{0 + 0 + 20 + 20}{4} = 10$

- b) Amplitude

Estudante A: 0

Estudante B: 4

Estudante C: 20

Estudante D: 20

Variação

$$\text{Estudante A: } V = \frac{4 \cdot (10 - 10)^2}{4} = 0$$

$$\text{Estudante B: } V = \frac{2 \cdot (8 - 10)^2 + 2 \cdot (12 - 10)^2}{4} = 4$$

$$\text{Estudante C: } V = \frac{(0 - 10)^2 + (8 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (20 - 10)^2}{4} = 52$$

$$\text{Estudante D: } V = \frac{2 \cdot (0 - 10)^2 + 2 \cdot (20 - 10)^2}{4} = 100$$

Desvio padrão

$$\text{Estudante A: } DP = \sqrt{V} = 0$$

$$\text{Estudante B: } DP = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Estudante C: } DP = \sqrt{52} = 7,21$$

$$\text{Estudante D: } DP = \sqrt{100} = 10$$

- c) Resposta possível: O estudante **A** possui maior regularidade nas notas e o estudante **D** é o mais irregular, apesar de todos apresentarem a mesma média.

29. Resposta pessoal.

$$30. a) \bar{X} = \frac{4 + 4 + 6 + 6}{4} = 5$$

$$V = \frac{2 \cdot (4 - 5)^2 + 2 \cdot (6 - 5)^2}{4} = 1$$

$$DP = \sqrt{V} = 1$$

$$b) \bar{X} = \frac{3 + 3 + 7 + 7}{4} = 5$$

$$V = \frac{2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (7 - 5)^2}{4} = 4$$

$$DP = \sqrt{V} = 2$$

$$31. \bar{X} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{12} = 5$$

$$V = \frac{2 \cdot (2 - 5)^2 + 2 \cdot (3 - 5)^2 + 2 \cdot (4 - 5)^2}{12} +$$

$$+ \frac{2 \cdot (6 - 5)^2 + 2 \cdot (7 - 5)^2 + 2 \cdot (8 - 5)^2}{12}$$

$$V = 4,66 \Rightarrow DP = \sqrt{V} = 2,16$$

$$32. a) \bar{X} = \frac{2 + 6 + 10 + 10 + 14 + 16 + 18 + 20}{8} = 12$$

$$V = \frac{(2 - 12)^2 + (6 - 12)^2 + 2 \cdot (10 - 12)^2}{8} +$$

$$+ \frac{(14 - 12)^2 + (16 - 12)^2 + (18 - 12)^2 + (20 - 12)^2}{8}$$

$$V = 33 \Rightarrow DP = \sqrt{V} = 5,74$$

- b) Que as notas dos 10 estudantes são mais próximas da média, são mais regulares.

- c) Resposta pessoal.

Exemplo:

meninas $\rightarrow 2; 6; 10; 10; 14; 16; 18; 20$

meninos $\rightarrow 8; 8; 8; 8; 10; 10; 10; 10; 10$

33. Moças:

$$\bar{X} = \frac{1,63 + 1,64 + 1,63 + 1,63 + 1,65 + 1,71 + 1,57 + 1,65 + 1,52}{9} = 1,63$$

$$V = \frac{(3 \cdot (1,63 - 1,63)^2 + (1,64 - 1,63)^2 + 2 \cdot (1,65 - 1,63)^2 + (1,71 - 1,63)^2 + (1,57 - 1,63)^2 + (1,52 - 1,63)^2)}{9}$$

$$V = 0,0025$$

$$DP = \sqrt{V} = 0,05$$

Rapazes:

$$\bar{X} = \frac{2 \cdot 1,83 + 1,79 + 1,84 + 1,75 + 1,77 + 1,70 + 1,74 + 3 \cdot 1,72 + 1,90 + 1,82}{13} = 1,77$$

$$V = \frac{2 \cdot (1,83 - 1,77)^2 + (1,79 - 1,77)^2 + (1,84 - 1,77)^2 + (1,75 - 1,77)^2 + (1,77 - 1,77)^2 + (1,70 - 1,77)^2 + (1,74 - 1,77)^2 + 3 \cdot (1,72 - 1,77)^2 + (1,90 - 1,77)^2 + (1,82 - 1,77)^2}{13}$$

$$V = 0,0029$$

$$DP = 0,05$$

As moças têm altura de $(1,63 \pm 0,05)$ m e os rapazes, $(1,77 \pm 0,05)$ m, em média.

34. a) Maridos:

$$\bar{X} = \frac{83 + 74 + 66 + 64 + 92 + 56 + 77 + 60 + 79 + 65}{10} = 71,6$$

$$V = \frac{(83 - 71,6)^2 + (74 - 71,6)^2 + (66 - 71,6)^2 + (64 - 71,6)^2 + (92 - 71,6)^2 + (56 - 71,6)^2 + (77 - 71,6)^2 + (60 - 71,6)^2 + (79 - 71,6)^2 + (65 - 71,6)^2}{10}$$

$$V = 114,64$$

$$DP = \sqrt{V} = 10,7$$

$$\bar{X}_{\text{maridos}} \approx 72; S_{\text{maridos}} \approx 11$$

Esposas:

$$\bar{X} = \frac{60 + 57 + 71 + 49 + 62 + 58 + 57 + 65 + 65}{10}$$

$$\bar{X} = 59,8$$

$$V = \frac{(60 - 59,8)^2 + (57 - 59,8)^2 + (71 - 59,8)^2 + (49 - 59,8)^2 + (62 - 59,8)^2 + (58 - 59,8)^2 + (57 - 59,8)^2 + (65 - 59,8)^2 + (65 - 59,8)^2}{10}$$

$$V = 35,36$$

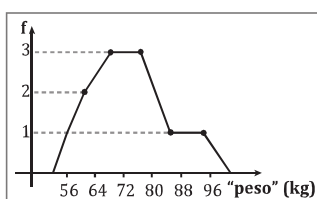
$$DP = \sqrt{V} = 5,94$$

$$\bar{X}_{\text{esposas}} \approx 60; S_{\text{esposas}} \approx 6$$

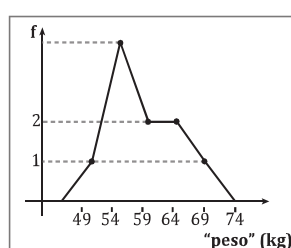
A maior dispersão ocorre na distribuição dos "pesos" dos maridos.

- b) Resposta possível:

Maridos - "peso" (kg)	F
56 - 64	2
64 - 72	3
72 - 80	3
80 - 88	1
88 - 96	1



Esposas - "peso" (kg)	f
49 - 54	1
54 - 59	4
59 - 64	2
64 - 69	2
69 - 74	1



- c) O das esposas, pois há menor dispersão em relação à média.

35. a)

"Peso" (kg)	f
32 + 36	1
36 + 40	4
40 + 44	10
44 + 48	7
48 + 52	2

$$b) \bar{x} = \frac{1 \cdot 34 + 4 \cdot 38 + 10 \cdot 42 + 7 \cdot 46 + 2 \cdot 50}{24} \Rightarrow \bar{x} = 42,83$$

$$V = \frac{(34 - 42,8)^2 + 4 \cdot (38 - 42,8)^2 + 10 \cdot (42 - 42,8)^2 + 7 \cdot (46 - 42,8)^2 + 2 \cdot (50 - 42,8)^2}{24} \Rightarrow V = 14,64$$

$$\bar{x} \approx 42; V \approx 15$$

$$c) DP = \sqrt{V} \Rightarrow DP \approx 4$$

36. Sejam as idades: $x, x + y, x + 2y, x + 3y$ e $x + 4y$.

01) Verdadeira. A diferença de idades consecutivas era a mesma.

02) Verdadeira.

$$\frac{x + x + y + x + 2y + x + 3y + x + 4y}{5} = x + 2y$$

04) Falsa. Se a razão é ímpar, os elementos se alternam em par e ímpar.

08) Verdadeira.

$$DP = \sqrt{\frac{(x + 4 - x)^2 + (x + 4 - x - 2)^2 + (x + 4 - x - 4)^2 + (x + 4 - x - 6)^2 + (x + 4 - x - 8)^2}{5}} \Rightarrow DP = \sqrt{\frac{40}{5}} = 2\sqrt{4}$$

16) Verdadeira. Seja x a dezena da sua data de nascimento, note que: $1999 - (1900 + x) = 8x \Rightarrow x = 11$, que é primo.

32) Falsa. Não é possível formar uma P.A. de cinco termos com os números primos menores que 21.

37. Ao aumentar a nota de cada estudante em 1,0 ponto, a média da turma aumenta em 1,0 ponto, pois:

$$\text{média inicial} = \frac{\text{total de pontos inicial}}{\text{número de estudantes}}$$

$$\text{média final} = \frac{\text{total de pontos inicial} + 1 \cdot \text{número de estudantes}}{\text{número de estudantes}}$$

$$\text{média final} = \frac{\text{total de pontos inicial}}{\text{número de estudantes}} + \frac{\text{número de estudantes}}{\text{número de estudantes}}$$

$$\text{média final} = \text{média inicial} + 1$$

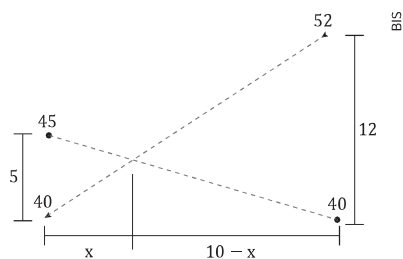
O desvio padrão mede a variação das notas em relação à média. Como a nota de cada estudante aumentou em 1 ponto, assim como a média, podemos afirmar que o desvio padrão não foi alterado.

Alternativa c.

38. a) A interseção das duas curvas ocorre entre 2030 e 2040. Nesse período, a taxa de crescimento da população de 60 anos ou mais é de 1,2 milhão de habitantes $[(52 - 40)/10 = 1,2]$ por ano. Se x é o número de anos decorridos a partir de 2030, a população nessa faixa etária, em milhões, é dada por $P_1(x) = 40 + 1,2x$. Por outro lado, a população com até 17 anos decresce a uma taxa de 0,5 milhão de habitantes por ano nesse período $[(45 - 40)/10 = 0,5]$. Logo, a população nessa faixa etária, em milhões, corresponde a $P_2(x) = 45 - 0,5x$. Igualando essas duas funções, obtemos $40 + 1,2x = 45 - 0,5x$, de modo que $1,7x = 5$. Assim, $x = 5/1,7 = 2,94$. Adicionando esse resultado a 2030, obtemos 2032,94.

Resposta: A população com 60 anos ou mais ultrapassará a que tem 17 anos ou menos em 2032.

O ponto de interseção também pode ser obtido por semelhança de triângulos, como mostra a figura abaixo.



Pela figura, temos:

$$\frac{x}{5} = \frac{10 - x}{12} \Rightarrow 50 - 5x = 12x \Rightarrow 17x = 50 \Rightarrow x = \frac{50}{17} \approx 2,94.$$

b) Em 2040, a população brasileira atingirá 219 milhões de habitantes $(127 + 52 + 40 = 219)$. Já em 2050, a população será de apenas 215 milhões de habitantes. Assim, haverá uma redução de 4 milhões de habitantes $(219 - 215 = 4)$, o que corresponde a uma variação negativa de: $4/219 \approx 0,018$ ou 1,8%.

Resposta: O IBGE prevê uma redução de 1,8% da população entre 2040 e 2050.

Outro modo de chegar à mesma resposta: Em 2040, a população brasileira atingirá 219 milhões de habitantes $(127 + 52 + 40 = 219)$. Já em 2050, a população será de apenas 215 milhões de habitantes. Assim, em 2050, a população corresponderá a aproximadamente 98,2% da população $((215/219) \approx 0,982 = 98,2\%)$ de 2040. Logo, entre 2040 e 2050, haverá uma redução de: $100\% - 98,2\% = 1,8\%$.

$$39. x = \frac{20}{100} \cdot 360 = 72$$

Portanto, $x = 72^\circ$.

Alternativa d.

Cálculo rápido (p. 48)

$$1. a) \frac{23}{100} = 0,23$$

$$b) \frac{35}{100} = 0,35$$

$$2. a) \frac{350}{100} = 350\%$$

$$b) \frac{57}{100} = 57\%$$

$$3. a) x \cdot 50 = 5 \Rightarrow x = 10\%$$

$$b) x \cdot 1000 = 10 \Rightarrow x = 1\%$$

$$c) x \cdot 400 = 4 \Rightarrow x = 1\%$$

$$4. \left(\frac{10}{100}\right) \cdot \left(\frac{10}{100}\right) = 1\%$$

Alternativa a.

$$5. a) \frac{30}{100} \cdot 900 = 270$$

$$b) \frac{25}{100} \cdot 60 = 15$$

$$c) \frac{15}{100} \cdot 1200 = 180$$

$$c) \frac{3}{1000} = 0,003$$

$$d) \frac{125}{1000} = 0,125$$

$$c) \frac{103}{100} = 103\%$$

$$d) \frac{3}{100} = 3\%$$

$$d) x \cdot 80 = 20 \Rightarrow x = 25\%$$

$$e) x \cdot 150 = 30 \Rightarrow x = 20\%$$

$$d) \frac{15}{1000} \cdot 2000 = 30$$

$$e) \frac{12}{100} \cdot 300 = 36$$

$$f) \frac{105}{1000} \cdot 600 = 63$$

Foco na tecnologia – Calculadora (p. 49)

$$1. \bar{x} = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26 + 28 + 30}{15} \Rightarrow \bar{x} = 16$$

2. a) 14 114 famílias.

b)

Nº de filhos	Nº de famílias	fr (%)	f _{ac} (%)
0	5 419	38,4	38,4
1	3 548	25,2	63,6
2	3 117	22,1	85,6
3	1 324	9,4	95,0
4	425	3,0	98,0
5	158	1,1	99,1
6 ou mais	123	0,9	100

$$c) \bar{x} = \frac{5419 \cdot 0 + 3548 \cdot 1 + 3117 \cdot 2 + 1324 \cdot 3 + 425 \cdot 4 + 158 \cdot 5 + 123 \cdot 6}{14114} = 1,2$$

$$\bar{x} \approx 1$$

$$d) V = \frac{5419 \cdot (0 - 1,2)^2 + 3548 \cdot (1 - 1,2)^2 + 3117 \cdot (2 - 1,2)^2 + 1324 \cdot (3 - 1,2)^2 + 425 \cdot (4 - 1,2)^2 + 158 \cdot (5 - 1,2)^2 + 123 \cdot (6 - 1,2)^2}{14114} \Rightarrow V = 1,6$$

$$DP = \sqrt{V} = 1,26$$

Aprender a aprender (p. 50)

1. Resposta pessoal.

Exemplo de resposta:

Função do 2º grau: $y = ax^2 + bx + c$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Raízes: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Se $\Delta > 0$, a função possui duas raízes reais e distintas.

Se $\Delta = 0$, a função possui uma raiz real.

Se $\Delta < 0$, a função não tem raiz real.

Concavidade:

Se $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

Se $a < 0$, a concavidade da parábola é voltada para baixo.

$$\text{Vértice: } V\left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Exemplo de função do 2º grau:

$$y = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Raízes: $\Delta = 25 - 24 = 1$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 2$$

$$\text{Vértice: } x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{5}{2}$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1}{4}$$

Como $a > 0$, a concavidade da parábola é para cima.

2. $y = ax^2 + bx + c$

$$x = -1, y = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$$

$$x = 3, y = 0 \Rightarrow 9a + 3b + c = 0$$

$$x = 0, y = 3 \Rightarrow c = 3$$

$$a - b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b = -3 \\ 9a + 3b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = 2$$

$$y = -x^2 + 2x + 3$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}, y_v = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$V(1, 4)$$

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - y - y + 4 = 0$$

$$y = 2x + 2$$

$$f(x) = 2x + 2$$

$$b)]-\infty, -1[: g(x) < 0$$

$$]-1, 3[: g(x) > 0$$

$$]3, +\infty[: g(x) < 0$$

$$\text{Para } x = -1 \text{ ou } x = 3: g(x) = 0$$

$$c) f(x) \geq 0, \text{ quando } x \geq -1$$

3. Para $x = 0$ e $x = 10$, temos: $f(x) = 0$

Para $x_v = 5$, temos: $f(x_v) = y_v = 6$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(0, 0): a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$(10, 0): a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + 0 = 0$$

$$100a + 10b = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{10}$$

$$(5, 6): a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + 0 = 6 \Rightarrow 25a + 5b = 6$$

$$-\frac{25b}{10} + 5b = 6 \Rightarrow b = \frac{12}{5}$$

$$\therefore a = -\frac{12}{50}$$

$$f(x) = -\frac{6}{25}x^2 + \frac{12}{5}x$$

$$f(1, 5) = 3,06$$

$$3,06 - 0,30 = 2,76$$

A altura máxima para um veículo passar no túnel é de 2,76 m.

$$4. \begin{cases} x + y = 14 \Rightarrow y = 14 - x \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases}$$

$$x^2 + (14 - x)^2 = 10^2$$

$$x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100$$

$$2x^2 - 28x + 96 = 0$$

$$x^2 - 14x + 48 = 0$$

$$\Delta = 4$$

$$x = \frac{14 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = 8 \Rightarrow y = 6 \\ x = 6 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$

$A_T = 6 \cdot 8 = 48$
A área do retângulo é 48 u.a.

$$5. r = 3,5 \text{ cm}; \pi = 3,14$$

$$A_{\text{base}} = \pi \cdot 3,5^2 = 3,14 \cdot 12,25 \Rightarrow A_{\text{base}} = 38,465 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{superfície lateral}} = 2\pi rh = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,5 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 3,5)$$

$$A_{\text{superfície lateral}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 3,5 \cdot (3 \cdot 7) = 461,58$$

Logo, $A_{\text{superfície lateral}}$ é igual a 461,58 cm².

$$A_{\text{embalagem}} = 500,045 \text{ cm}^2$$

$$A_{1000 \text{ emb.}} = 500,045 \text{ cm}^2 \approx 50 \text{ m}^2$$

Para atender ao pedido serão necessários 50 m² de material.

$$6. f(0) = 2 \Rightarrow c = 2$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b + 2 = 3 \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$$

$$f(15) = 7 \Rightarrow 225a + 15b + 2 = 7 \Rightarrow 45a + 3b = 1 \quad (2)$$

$$\text{De (1) e (2), obtemos } a = -\frac{1}{21} \text{ e } b = \frac{22}{21}.$$

(01) Verdadeiro.

$$f(14) = -\frac{1}{21} \cdot 14^2 + \frac{22}{21} \cdot 14 + 2 = \frac{-196 + 308 + 42}{21} = \frac{154}{21}$$

$$f(8) = -\frac{1}{21} \cdot 8^2 + \frac{22}{21} \cdot 8 + 2 = \frac{-64 + 176 + 42}{21} = \frac{154}{21}$$

(02) Falso.

$$x_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_v = \frac{-\frac{22}{21}}{-\frac{1}{21}} \Rightarrow x_v = 11$$

(04) Verdadeiro.

$$y_v = f(11) \Rightarrow y_v = \left(-\frac{1}{21}\right) \cdot 11^2 + \left(\frac{22}{21}\right) \cdot 11 + 2$$

$$y_v = \frac{-121 + 242 + 42}{21} = \frac{165}{21} \approx 7,86$$

(08) Falso.

O lucro oscilou entre 2 milhões e 7,86 milhões de reais.

(16) Verdadeiro.

Como $a < 0$, a concavidade da parábola é para baixo.

$$\text{Soma: } 01 + 04 + 16 = 21$$

Mundo plural (p. 51)

1. e 2. Respostas de acordo com as pesquisas realizadas pelos estudantes.

CAPÍTULO 3

Fazer e aprender (p. 55)

1. a) Evento pouco provável.
b) Evento muito provável.
c) Evento certo.
d) Evento impossível.

2. Resposta pessoal.

Exemplos:

- a) Ela ter ido ao show com um(a) amigo(a).
- b) Ela dirigir um F-1 no show.
- c) Ela vai ouvir músicas de que gosta.
- d) Ela vai ouvir 3 vezes a mesma música.

$$3. \text{ a) } \frac{1}{12} \quad \text{ b) } \frac{1}{2} \quad \text{ c) } 0 \quad \text{ d) } 1$$

Resposta pessoal.

Exemplos:

- número primo? $\frac{5}{12}$
- um número maior que 7? $\frac{5}{12}$

$$4. \text{ a) } \frac{1}{4} = 25\% \quad \text{ b) } \frac{1}{13} \approx 8\% \quad \text{ c) } \frac{1}{2} = 50\% \quad \text{ d) } \frac{9}{13} \approx 70\%$$

5. Respostas pessoais.

Exemplos:

- a) Sair um número par.
- b) Sair um número menor que 3.
- c) Sair um número maior que 2.
- d) Saírem dois números pares em dois lançamentos.
- e) Sair um número maior que 6.
- f) Sair um número maior ou igual a 6.
- g) Sair um número menor que 6.
- h) Sair um número maior ou igual a 1.

Foco na leitura (p. 56)

A) Se x é o número de bolas pretas, o espaço amostral tem $(6 + x)$ bolas, então a probabilidade de uma bola retirada ser vermelha é:

$$p = \frac{6}{6 + x} = \frac{3}{5} \Rightarrow x = 4$$

Logo, são 4 as bolas pretas na urna.

B) a) A: com defeito

$$P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

B: sem defeito

$$P(B) = \frac{4}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$$

$$b) P(B \cap B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{25} = \frac{64}{100} = 64\%$$

$$c) P(A \cap A) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 4\%$$

C) Como se trata de experimento repetido e de forma independente, é preciso aplicar a lei binominal das probabilidades.

$$P(\text{sobreviver 20 anos}) = P(A) = 0,6$$

$$P(\text{não sobreviver 20 anos}) = P(\text{não A}) = 0,4$$

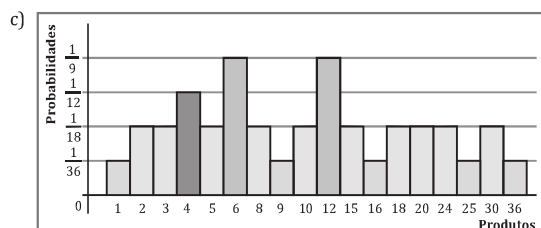
$$\left(\frac{5}{4}\right) \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^1 = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot 0,1296 \cdot 0,4 = 0,2592 \approx 26\%$$

Fazer e aprender (p. 59)

6. a)

x	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$$b) \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx 5,6\%$$



Menor probabilidade: 1, 9, 16, 25 e 36.

Maior probabilidade: 6 e 12.

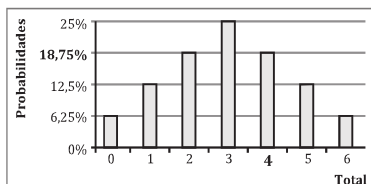
7. a)

1º jogador	2º jogador	Total
0	0	0
0	1	1
1	0	1
0	2	2
1	1	2
2	0	2
0	3	3
1	2	3
2	1	3
3	0	3
1	3	4
2	2	4
3	1	4
2	3	5
3	2	5
3	3	6

b)

Evento	Probabilidade
0	$\frac{1}{16} = 6,25\%$
1	$\frac{1}{8} = 12,5\%$
2	$\frac{3}{16} = 18,75\%$
3	$\frac{1}{4} = 25\%$
4	$\frac{3}{16} = 18,75\%$
5	$\frac{1}{8} = 12,5\%$
6	$\frac{1}{16} = 6,25\%$

c)



8. a)

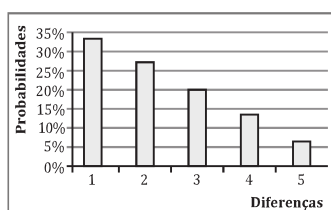
—	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

b) $\frac{4}{15} \approx 26,7\%$

c) 1

d)

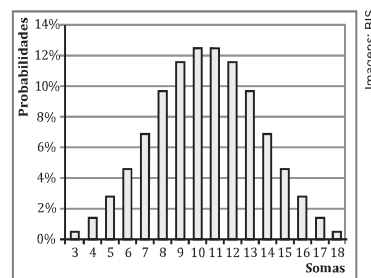
Diferença	Probabilidade
1	$\frac{1}{3} \approx 33,3\%$
2	$\frac{4}{15} \approx 26,7\%$
3	$\frac{1}{5} \approx 20\%$
4	$\frac{2}{15} \approx 13,3\%$
5	$\frac{1}{15} \approx 6,7\%$



9. a) 16

b)

Soma	Probabilidade
3	$\frac{1}{216} \approx 0,5\%$
4	$\frac{1}{72} \approx 1,4\%$
5	$\frac{1}{36} \approx 2,8\%$
6	$\frac{5}{108} \approx 4,6\%$
7	$\frac{5}{72} \approx 6,9\%$
8	$\frac{7}{72} \approx 9,7\%$
9	$\frac{25}{216} \approx 11,6\%$
10	$\frac{1}{8} \approx 12,5\%$
11	$\frac{1}{8} \approx 12,5\%$
12	$\frac{25}{216} \approx 11,6\%$
13	$\frac{7}{72} \approx 9,7\%$
14	$\frac{5}{72} \approx 6,9\%$
15	$\frac{5}{108} \approx 4,6\%$
16	$\frac{1}{36} \approx 2,8\%$
17	$\frac{1}{72} \approx 1,4\%$
18	$\frac{1}{216} \approx 0,5\%$



c) O jogador A, porque a probabilidade de ocorrerem somas favoráveis a ele é de 57,9%.

d) Resposta pessoal.

Fazer e aprender (p. 63)

10. a)

Idade	Nº de pessoas	Fr
0-9	1 569 000	15%
10-19	1 778 200	17%
20-29	1 663 140	15,9%
30-39	1 349 340	12,9%
40-49	1 171 520	11,2%
50-59	1 161 060	11,1%
60-69	920 480	8,8%
≥ 70	847 260	8,1%
Total	10 460 000	100%

b) $12,9\% \cdot 80\,000 = 10\,320$, ou seja, 10 320 pessoas entre 30-39 anos.
 $47,9\% \cdot 80\,000 = 38\,320$, ou seja, 38 320 pessoas com menos de 30 anos.

11. a) Pagode: 10%

Tecno: 13%

b) $45\% \cdot 24\,h = 10,8\,h = 10\,h\,48\,min$

12. a) $25\% + 20\% - 5\% = 40\%$ (lesões no joelho ou no pescoço)
 $0,4 \cdot 200 = 80$ (total de nadadores com lesões no joelho ou no pescoço).
 b) Considere:
 A: "nadador teve dor no ombro"
 B: "nadador teve dor na coluna"
 Como os eventos são independentes, a probabilidade é:
 $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,2 \cdot 0,5 = 10\%$
 A probabilidade é de 10%.
13. Rafael pode escolher entre: Rural, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A probabilidade será: $P = \frac{3}{4}$
 Alternativa e.
14. Número de anos com taxa superior a 9,3%: 6
 Número de anos analisados: 10
 $P = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
 Alternativa a.

Fazer e aprender (p. 68)

15. a) $\bar{X} = \frac{15 \cdot 38 + 16 \cdot 31 + 17 \cdot 18 + 18 \cdot 10 + 19 \cdot 3}{100}$
 $\bar{X} = 16$
 A média aritmética das idades é 16.
 b) $V = \frac{38 \cdot (15 - 16)^2 + 31 \cdot (16 - 16)^2 + 18 \cdot (17 - 16)^2 + 10 \cdot (18 - 16)^2 + 3 \cdot (19 - 16)^2}{100}$
 $V = 1,23$; $DP = \sqrt{V} \Rightarrow DP = 1,1$
 O desvio padrão é 1,1.
16. $\bar{X} = 45$
 $DP = 15$
 Zona de normalidade:
 $]45 - 1DP, 45 + 1DP[$ ou $]30, 60[\rightarrow 68\%$ da distribuição
 $] \bar{X} - 2DP, \bar{X} + 2DP[=]45 - 2 \cdot 15, 45 + 2 \cdot 15[=]15, 75[\rightarrow 96\%$ da distribuição
 $\frac{96 - 68}{2} = \frac{28}{2} = 14$
 $]60, 75[\rightarrow 14\%$ da distribuição
 A probabilidade é de 14%.
17. a) $\bar{X} = \frac{3 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 59 \cdot 2 + 75 \cdot 3 + 68 \cdot 4 + 31 \cdot 5 + 22 \cdot 6}{300} + \frac{15 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 9 + 1 \cdot 10}{300}$
 $\bar{X} = 3,72$
 $\bar{X} \approx 4$
 Quatro lâmpadas são jogadas fora, aproximadamente.
 b) $V = \frac{3 \cdot (0 - 4)^2 + 16 \cdot (1 - 4)^2 + 59 \cdot (2 - 4)^2 + 75 \cdot (3 - 4)^2 + 68 \cdot (4 - 4)^2 + 31 \cdot (5 - 4)^2 + 22 \cdot (6 - 4)^2 + 15 \cdot (7 - 4)^2 + 7 \cdot (8 - 4)^2 + 3 \cdot (9 - 4)^2 + 1 \cdot (10 - 4)^2}{300}$
 $V = 3,26$
 $DP = 1,807$
 O desvio padrão é de aproximadamente 1,81 lâmpada.
- c) Utilizando a curva de Gauss:
 $P[\bar{X} - DP, \bar{X} + DP] \approx 68\%$
 A probabilidade é de aproximadamente 68% pela curva de Gauss.
- d) Resposta pessoal.
18. a) $\bar{X} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1}{30} = 3$
 ou
 $\bar{X} = 0 \cdot 0,033 + 1 \cdot 0,133 + 2 \cdot 0,167 + 3 \cdot 0,233 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,067 + 7 \cdot 0,033 + 8 \cdot 0,033 = 3$
 $\bar{X} = 3$

Nº de filhos	Nº de casais	fr	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$fr_i(x_i - \bar{x})^2$
0	1	0,033	-3	9	0,300
1	4	0,133	-2	4	0,533
2	5	0,167	-1	1	0,167
3	7	0,233	0	0	0,000
4	6	0,200	1	1	0,200
5	3	0,100	2	4	0,400
6	2	0,067	3	9	0,600
7	1	0,033	4	16	0,533
8	1	0,033	5	25	0,833
Total	30	0,999			

$$DP^2 = 3,567 \Rightarrow DP = 1,889 \text{ ou } DP = 2$$

A média aritmética é 3 e o desvio padrão é 2.

b) Para calcular a probabilidade pedida, fazemos:

$$] \bar{X} - DP, \bar{X} + DP[=]3 - 2, 3 + 2[=]1, 5[$$

$$0,167 + 0,233 + 0,200 = 0,6 = 60\%$$

c) Para calcular as probabilidades pedidas, fazemos:

$$P(\text{mais de 5 filhos}) = 0,067 + 0,033 + 0,033 = 0,133 = 13,3\%$$

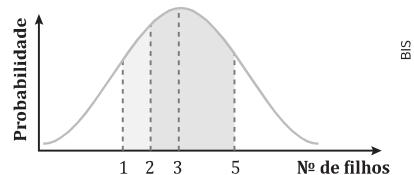
$$P(\text{menos de 3 filhos}) = 0,033 + 0,133 + 0,167 = 0,333 = 33,3\%$$

d) Respondemos ao que se pede fazendo:

$$P(\text{mais de 4 filhos}) = 0,1 + 0,067 + 0,033 + 0,033 = 0,233 = 23,3\%$$

$$P(\text{menos de 4 filhos}) = 0,033 + 0,133 + 0,167 + 0,233 = 0,566 = 56,6\%$$

Assim, vemos que é mais provável nessa amostra um casal ter menos de 4 filhos.



19. Na primeira, pois há menor concentração dos dados em torno da média.

20. a) 45, pois é o ponto central da distribuição (ponto médio).

b) O intervalo $]30, 60[$ parece corresponder ao intervalo $] \bar{X} - 2DP, \bar{X} + 2DP[$ com 69% da distribuição. Desse modo, temos $]45 - 2 \cdot 7,5, 45 + 2 \cdot 7,5[$, ou seja, o desvio padrão parece ser 7,5.

Foco no raciocínio lógico (p. 70)

1.

Cores	Destinos	Nº de ocupantes
Amarelo		2x
Vermelho		x
Branco		$\frac{x}{3}$

Estudando as possibilidades

I. Norte: x

$$\text{Sul: } 2x \rightarrow 2x = x + 25 \Rightarrow x = 25$$

Mas 25 não é divisível por 3.

II. Norte: $\frac{x}{3}$

$$\text{Sul: } x \rightarrow x = \frac{x}{3} + 25 \Rightarrow \Rightarrow \frac{2x}{3} = 25 \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 25}{2} \notin \mathbb{N}$$

III. Norte: $\frac{x}{3}$

$$\text{Sul: } 2x \rightarrow 2x = \frac{x}{3} + 25 \Rightarrow \Rightarrow \frac{5x}{3} = 25 \Rightarrow x = 15$$

Desse modo:

Cores	Destinos	Nº de ocupantes
Amarelo	Sul	30
Vermelho	Leste	15
Branco	Norte	5

O amarelo ia para a Zona Sul com 30 ocupantes, o vermelho ia para a Zona Leste com 15 ocupantes e o branco ia para a Zona Norte com 5 ocupantes.

Cálculo rápido (p. 70)

1. Grandezas inversamente proporcionais

$$6\,000\text{ L} \longrightarrow 10\%$$

$$x \longrightarrow 20\%$$

$$x = 3\,000\text{ L}$$

Evaporaram 3 000 L de água.

2. $36\,000 \longrightarrow 100\%$

$$9\,000 \longrightarrow x$$

$$x = 25\%$$

3. $600 \longrightarrow 100\%$

$$180 \longrightarrow x$$

$$x = 30\%$$

4. $1\,200 \longrightarrow 100\%$

$$x \longrightarrow 6\%$$

$$x = 72$$

Perdeu R\$ 72,00.

5. 15% para almoço: R\$ 75,00

5% para farmácia: R\$ 25,00

x para mãe: R\$ 100,00

$$a) 500 - 75 - 25 - 100 = 300$$

Sobram R\$ 300,00.

$$b) 500 \longrightarrow 100\%$$

$$100 \longrightarrow x$$

$$x = 20\%$$

Ele dá para a mãe 20% do dinheiro.

- c) Não, pois, após destinar 15% do salário para o almoço, 5% para a farmácia e 20% para a mãe, vão sobrar 60% do salário.

Aprender a aprender (p. 71)

1. (Professor, este exercício pode ser resolvido de outras maneiras.)

$$a) D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -1; y = \frac{D_y}{D} = 1; z = \frac{D_z}{D} = -1$$

$$\{-1, 1, -1\}$$

$$b) \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 6 \\ -x - y + z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$2z = 2 \Rightarrow z = 1$$

$$\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ -x - y = 1 \end{cases} \xrightarrow{(\cdot 2)} \begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ -2x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$2y = 6 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{Então, } x = -4.$$

$$\{-4, 3, 1\}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ -2x + y = 3 \end{cases} \xrightarrow{(\cdot 2)} \begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ -4x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$-x = 2 \Rightarrow x = -2$$

$$\text{Então, } y = -1.$$

$$\{-2, -1\}$$

$$d) D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -40 \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -11 & -3 \end{vmatrix} = -40$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -11 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 40 \quad D_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -11 \end{vmatrix} = -80$$

$$x = \frac{D_x}{D} = -1; y = \frac{D_y}{D} = 1; z = \frac{D_z}{D} = 2$$

$$\{-1, 1, 2\}$$

$$2. a) \begin{cases} 5x + 3y - 11z = 13 \\ 4x - 5y + 4z = 18 \end{cases}$$

$$9x - 2y - 7z = 31 \neq 9x - 2y - 7z = 25$$

Sistema impossível.

$$b) \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x - 5y + 6z = 9 \end{cases}$$

$$2x - 3y + 5z = 11 \text{ é igual à equação dada no sistema}$$

Sistema é possível e indeterminado.

$$3. D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & m \end{vmatrix} \neq 0$$

$$m \neq \frac{13}{2}$$

4. a) O cálculo de Cleonice está correto.

$$b) \begin{cases} x + y = 125 \\ x - y = 25 \end{cases} \Rightarrow x = 75 \text{ e } y = 50$$

5. a) Clarice: x; Ivo: y; Ester: z

$$x + y + z = 100\,000$$

$$1,15x + 1,2y = 59\,000$$

$$\begin{cases} 1,15x + 0,6z + a \cdot 0,59z = 93\,000 \\ 1,2y + 0,6z + a \cdot 0,5z = 106\,000 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 1,15x - 1,2y = -13\,000 \\ 1,15x + 1,2y = 59\,000 \end{cases}$$

$$2,3x = 46\,000 \Rightarrow x = \text{R\$ } 20\,000,00$$

Substituindo x em $1,15x + 1,2y = 59\,000$, temos: $y = 30\,000$

Clarice tinha R\$ 20 000,00, Ivo tinha R\$ 30 000,00 e Ester R\$ 50 000,00.

$$b) 1,15 \cdot 20\,000 + 0,6 \cdot 50\,000 + a \cdot 0,5 \cdot 50\,000 = 93\,000$$

$$a = 1,6 \text{ (160\%)}$$

Rendeu 60%.

6. x: cebolas grandes; y: cebolas pequenas.

$$a) \begin{cases} x + y = 40 \\ 200x + 25y = 1\,700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25x - 25y = -1\,000 \\ 200x + 25y = 1\,700 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \text{ e } y = 36$$

$$b) \frac{600}{25} = 24. \text{ Observe que } 600 \text{ g de cebolas pequenas equivalem a } 24 \text{ cebolas.}$$

$$A = 24 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 2^2 \Rightarrow A = 384\pi \text{ cm}^2$$

Ou seja, o menor desperdício ocorre com as cebolas grandes.

7. SPI:

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{2} = \frac{5}{b} \Rightarrow a = 4 \text{ e } b = 10$$

$$a + b = 14$$

Alternativa d.

$$8. \begin{cases} x + y + z = 8\,000 \\ 0,3x + 0,2y + 0,5z = 2\,580 \\ 1,5x + y + z = 9\,000 \end{cases}$$

$$\text{Ou seja: } x = 2\,000, y = 3\,400 \text{ e } z = 2\,600.$$

O rendimento obtido é dado por:

$$R = 0,4 \cdot 2\,000 + 0,3 \cdot 3\,400 + 1 \cdot 2\,600 = 4\,820,00 \Rightarrow R = \text{R\$ } 4\,820,00$$

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 74)

1. O desconto inicial é de 20%.

Logo, o produto que custava R\$ 50,00 passará a custar R\$ 10,00 ($0,20 \cdot 50,00 = 10,00$).

Portanto, o cliente pagará R\$ 40,00.

Se o cliente possuir o cartão fidelidade, seria aplicado um desconto extra de 10% sobre esse valor, que seria de R\$ 4,00 ($0,10 \cdot 40,00 = 4,00$).

O cliente economizaria mais R\$ 4,00.

Alternativa e.

2. A carta da mesa é $\frac{6}{8}$ e temos que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\% = 0,75$.

Assim, há três possibilidades de pares, com as cartas: $\frac{3}{4}$, 75% e 0,75.

Alternativa e.

3. 46,6% de 557 milhões de tep é o mesmo que:

$$0,466 \cdot 557 \text{ milhões de tep} = 259,562 \text{ milhões de tep}$$

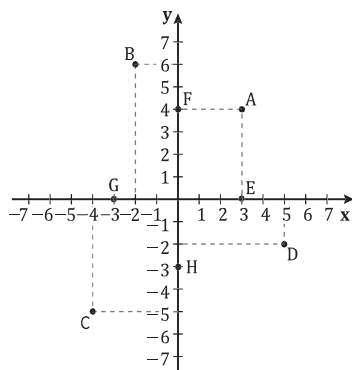
Alternativa d.

UNIDADE 2

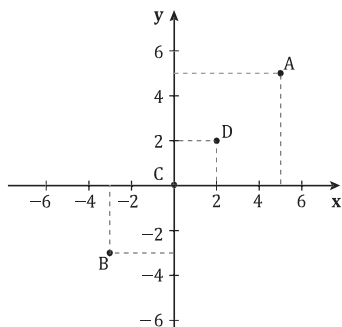
CAPÍTULO 4

Fazer e aprender (p. 79)

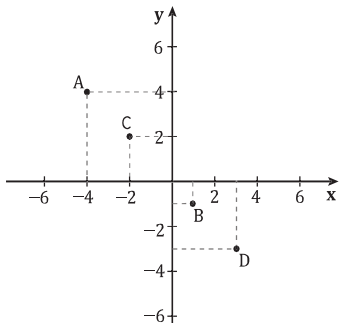
1.



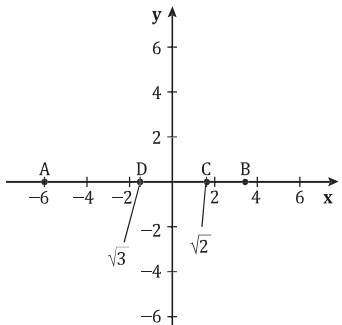
2. a)



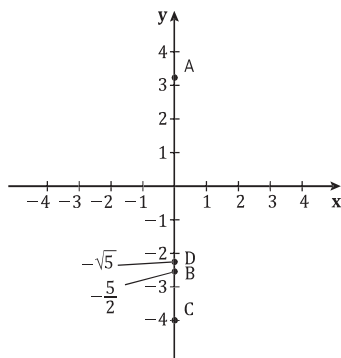
b)



c)



d)



Imagens: BIS

3. a) Para que os pontos **A**, **B**, **C** e **D** pertençam a uma mesma reta paralela ao eixo **y**, eles devem possuir a mesma abscissa; portanto:

$$x_B = x_C = x_D = -3$$
- b) Para que os pontos **A**, **B**, **C** e **D** pertençam a uma mesma reta paralela ao eixo **x**, eles devem possuir a mesma ordenada; portanto:

$$y_B = y_C = y_D = -5$$
4. No 2º quadrante, $x < 0$ e $y > 0$. No 4º quadrante, $x > 0$ e $y < 0$.
5. a) Se **M** pertence ao eixo **y**, sua abscissa é igual a zero, logo $m = 0$.
b) Se **M** pertence ao 1º quadrante, sua abscissa deve ser positiva, logo $m > 0$.
c) Se **M** pertence ao 2º quadrante, sua abscissa é negativa, logo $m < 0$.
d) Se **M** pertence à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes, sua abscissa é igual à sua ordenada, logo $m = 5$.
e) Se **M** pertence à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes, sua abscissa é o oposto da ordenada, então $m = -5$.
f) Se **M** pertence ao 3º quadrante, suas coordenadas são negativas. Como a ordenada de **M** é positiva (5), esse ponto jamais pertencerá ao 3º quadrante, logo $\nexists m$.
6. a) Se **N** pertence ao eixo **x**, sua ordenada é igual a zero, logo $n = 0$.
b) Se **N** pertence ao 2º quadrante, sua ordenada é positiva, logo $n > 0$.
c) Se **N** pertence ao 3º quadrante, sua ordenada é negativa, logo $n < 0$.
d) Se **N** pertence à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes, sua abscissa é igual à sua ordenada, logo $n = -2$.
e) Se **N** pertence à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes, sua abscissa é o oposto da ordenada, então $n = 2$.
f) Se **N** pertence ao 1º quadrante, suas coordenadas são positivas. Como a abscissa de **N** é negativa (-2), esse ponto jamais pertencerá ao 1º quadrante, logo $\nexists n$.

Fazer e aprender (p. 82)

7. a) $x_M = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$ $y_M = \frac{3+5}{2} = 4$

$$M = \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$$
- b) $x_M = \frac{7+1}{2} = 4$ $y_M = \frac{0+(-4)}{2} = -2$

$$M = (4, -2)$$
- c) $x_M = \frac{0+(-3)}{2} = -\frac{3}{2}$ $y_M = \frac{0+2}{2} = 1$

$$M = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$
8. a) Para $P(-3, 2)$:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow 5 = \frac{-3 + (x_Q)}{2} \Rightarrow 10 = -3 + x_Q \Rightarrow x_Q = 13$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + (y_Q)}{2} \Rightarrow 8 = 2 + y_Q \Rightarrow y_Q = 6$$

$$Q(13, 6)$$
- b) Para $P(0, 0)$:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow 5 = \frac{0 + (x_Q)}{2} \Rightarrow 10 = 0 + x_Q \Rightarrow x_Q = 10$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow 4 = \frac{0 + (y_Q)}{2} \Rightarrow 8 = 0 + y_Q \Rightarrow y_Q = 8$$

$$Q(10, 8)$$
9. $A(2, 10); B(8, -2)$

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{2+8}{2} = 5 \\ y_M &= \frac{10-2}{2} = 4 \end{aligned} \right\} M(5, 4) \text{ é ponto médio de } \overline{AB}$$

$$\left. \begin{aligned} x_N &= \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} \\ y_N &= \frac{10+4}{2} = 7 \end{aligned} \right\} N\left(\frac{7}{2}, 7\right) \text{ é ponto médio de } \overline{AM}$$

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \frac{5+8}{2} = \frac{13}{2} \\ y_P &= \frac{4-2}{2} = 1 \end{aligned} \right\} P\left(\frac{13}{2}, 1\right) \text{ é ponto médio de } \overline{MB}$$

10. A(1, -3); B(3, -5); C(-5, 7)

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{1+3}{2} = 2 \\ y_M &= \frac{-3-5}{2} = -4 \end{aligned} \right\} M(2, -4)$$

$$\left. \begin{aligned} x_N &= \frac{3-5}{2} = -1 \\ y_N &= \frac{-5+7}{2} = 1 \end{aligned} \right\} N(-1, 1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \frac{1-5}{2} = -2 \\ y_P &= \frac{-3+7}{2} = 2 \end{aligned} \right\} P(-2, 2)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1: x_{G_1} &= \frac{1+3-5}{3} = \frac{-1}{3} \\ y_{G_1} &= \frac{2-5+7}{3} = \frac{-1}{3} \end{aligned} \right\} G_1\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

$$\left. \begin{aligned} G_2: x_{G_2} &= \frac{2-1-2}{3} = \frac{-1}{3} \\ y_{G_2} &= \frac{-4+1+2}{3} = \frac{-1}{3} \end{aligned} \right\} G_2\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

11. M(-1, 3); N(1, 6); P(3, 5)

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_A + x_B = -2 \quad (I)$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_A + y_B = 6 \quad (II)$$

$$x_N = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_B + x_C = 2 \quad (III)$$

$$y_N = \frac{y_B + y_C}{2} \Rightarrow y_B + y_C = 12 \quad (IV)$$

$$x_P = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_A + x_C = 16 \quad (V)$$

$$y_P = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_A + y_C = 10 \quad (VI)$$

$$\begin{aligned} (I) + (III) &\Rightarrow x_A + x_B = -2 \\ &\quad x_B + x_C = 2 \\ &\quad x_A + x_C + 2x_B = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Em (V)} &\Rightarrow 6 + 2x_B = 0 \\ &\quad x_B = -3 \end{aligned}$$

$$\text{Em (I)} \Rightarrow x_A + x_B = -2 \Rightarrow x_A = 1$$

$$\text{Em (III)} \Rightarrow x_B + x_C = 2 \Rightarrow x_C = 5$$

$$\begin{aligned} (II) + (IV) &\Rightarrow y_A + y_B = 6 \\ &\quad y_B + y_C = 12 \\ &\quad y_A + y_C + 2y_B = 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Em (VI)} &\Rightarrow 10 + 2y_B = 18 \\ &\quad y_B = 4 \end{aligned}$$

$$\text{Em (II)} \Rightarrow y_A + y_B = 6 \Rightarrow y_A = 2$$

$$\text{Em (IV)} \Rightarrow y_B + y_C = 12 \Rightarrow y_C = 8$$

$$A(1, 2); B(-3, 4); C(5, 8)$$

12. A(2, -3)

$$B(-5, 1)$$

$$C(0, y_C)$$

$$G(x_G, 0)$$

$$x_G = \frac{2-5+0}{3} \Rightarrow x_G = -1$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow 0 = \frac{-3+1+y_C}{3} \Rightarrow -2+y_C=0 \Rightarrow y_C=2$$

$$G(-1, 0) \text{ e } C(0, 2).$$

13. $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow x_B + x_C = 12$

$$y_M = \frac{x_B + x_C}{2} \Rightarrow y_B + y_C = 14$$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G = \frac{0+12}{3} = 4$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G = \frac{-2+14}{3} = 4$$

$$G(4, 4)$$

$$14. x^2 = 5^2 + 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{29}$$

$$y^2 = 5^2 + 1^2 \Rightarrow y = \sqrt{26}$$

Assim,

$$P = 7 + 10 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$$

$$P = 17 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$$

Alternativa e.

Fazer e aprender (p. 85)

$$15. a) d_{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2} = 5$$

$$b) d_{BC} = \sqrt{(-3-3)^2 + (4+4)^2} = 10$$

$$c) d_{BD} = \sqrt{(-2-3)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{61}$$

$$d) d_{CE} = \sqrt{(10+3)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{218}$$

$$e) d_{DE} = \sqrt{(10+2)^2 + (-3-2)^2} = 13$$

$$f) d_{BE} = \sqrt{(10-3)^2 + (-3+4)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$16. a) d_{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

$$d_{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

Triângulo escaleno.

$$b) d_{AB} = \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{13}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{5}$$

Triângulo escaleno.

$$c) d_{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(0-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(0+1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2}$$

Triângulo isósceles.

$$17. a) AB = \sqrt{5}$$

$$BC = 5$$

$$AC = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} + 5 + 2\sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$$

$$b) AB = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{13} + \sqrt{5}$$

$$c) AB = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{2} = 2\sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$18. a) d_{AP} = \sqrt{(x_p - x_A)^2 + (y_p - y_A)^2}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{(x_p + 2)^2 + (0 - 1)^2}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{(x_p^2 + 4x_p + 4) + 1}$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{x_p^2 + 4x_p + 5}$$

$$10 = x_p^2 + 4x_p + 5$$

$$x_p^2 + 4x_p + 5 - 10 = 0$$

$$x_p^2 + 4x_p - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 16 - 4(-5) = 36$$

$$x_p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_{p_1} = 1$$

$$x_{p_1} = -5$$

$$P(-5, 0) \text{ ou } P(1, 0).$$

b) $P(0, y_p)$ e $A(-8, 13)$.

$$d_{AP} = \sqrt{(0 + 8)^2 + (y_p - 13)^2}$$

$$17 = \sqrt{64 + (y_p^2 - 26y_p + 169)}$$

$$(17)^2 = 64 + y_p^2 - 26y_p + 169$$

$$y_p^2 - 26y_p - 56 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 900$$

$$y_p = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y_{p_1} = 28$$

$$y_{p_2} = -2$$

$$P(0, 28) \text{ ou } P(0, -2).$$

c) $P(-y, y)$

$$d_{AP} = d_{BP}$$

$$\sqrt{(-y + 1)^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(-y - 5)^2 + (y + 7)^2}$$

$$(y^2 - 2y + 1) + (y^2 - 2y + 1) = (y^2 + 10y + 25) + (y^2 + 14y + 49)$$

$$-4y + 2 = 24y + 74$$

$$-28y = 72$$

$$y = -\frac{18}{7}$$

$$P\left(\frac{18}{7}, -\frac{18}{7}\right)$$

19. a) $d_{AB} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{32}$

$$d_{CD} = \sqrt{(-6 + 2)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{32}$$

Igual.

b) $d_{BC} = \sqrt{(-2 - 6)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{65}$

$$d_{AD} = \sqrt{(-6 - 2)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{65}$$

Igual.

c) $d_{AC} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (4 - 1)^2} = 5$

$$d_{BD} = \sqrt{(-6 - 6)^2 + (0 - 5)^2} = 13$$

$$AC = 5 \text{ e } BD = 13.$$

20. a) $A(4, 2)$

$$C(r, r)$$

$$d_{AC} = r$$

$$d_{AC}^2 = (4 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2$$

$$16 - 8r + r^2 + 4 - 4r + r^2 = r^2$$

$$r^2 - 12r + 20 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} S = 12 \\ P = 20 \end{array} \right\} r = 2 \text{ ou } r = 10$$

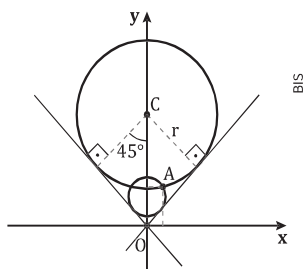
Portanto, o centro da circunferência é $(2, 2)$ ou $(10, 10)$.

b) $r = 2$ ou $r = 10$.

21. $A(1, 3)$

Seja C o centro da circunferência, C equidista das bissetrizes dos quadrantes e passa por $A(1, 3)$. Assim, C está sobre o eixo Oy .

$$C(0, y_c)$$



$$d_{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (y_c - 3)^2 = r^2$$

$$d_{AC}^2 = 1 + (y_c - 3)^2 = r^2$$

Mas $y_c = r\sqrt{2}$ (diagonal do quadrado), então:

$$1 + (r\sqrt{2} - 3)^2 = r^2$$

$$1 + 2r^2 - 6\sqrt{2}r + 9 = r^2$$

$$r^2 - 6\sqrt{2}r + 10 = 0$$

$$\Delta = 72 - 40 = 32$$

$$r = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{32}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = \frac{10\sqrt{32}}{2} = 5\sqrt{2} \\ r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{array} \right.$$

$$y = r\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 10 \text{ ou}$$

$$y = r\sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$$

Logo, os pontos procurados são $(0, 2)$ ou $(0, 10)$.

22. $d_{AC} = d_{AB} \Rightarrow \sqrt{(a - 0)^2 + (b - 3)^2} = \sqrt{(a - 4)^2 + (b - 0)^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^2 + b^2 - 6b + 9 = a^2 + 16 + b^2 \Rightarrow b = \frac{4a}{3} - \frac{7}{6}$

Alternativa b.

23. Para encontrarmos os pontos fixos do gráfico de f , fazemos:

$$x = x^2 + 8x + 6$$

$$x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$(a = 1, b = 7, c = 6)$$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$

$$\Delta = 49 - 24$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{7 + 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{-7 - 5}{2} = \frac{-12}{2} = -6 \end{array} \right.$$

Os pontos fixos são $A(-1, -1)$ e $B(-6, -6)$.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(-1 + 6)^2 + (-1 + 6)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}$$

Fazer e aprender (p. 88)

24. a) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 14$

b) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 12$

c) $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = |-26| = 26$

25. $A_T = 5 \cdot 8 = 40$

$$A_1 = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

$$A_2 = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$

$$A_3 = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$A_{\triangle ABC} = A_T - A_1 - A_2 - A_3 = 40 - 16 - \frac{15}{2} - \frac{5}{2} = 14$$

26. $A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-20| = 10$

$$\therefore A_{\text{par}} = 2 \cdot A_{\triangle ABC}$$

$$A_{\text{par}} = 2 \cdot 10$$

$$A_{\text{par}} = 20$$

27. a) $A_{\triangle ABC} = 4$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ x_c & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$8 = |4x_c - 10|$$

$$4x_c - 10 = 8 \Rightarrow x_c = \frac{9}{2}$$

$$4x_c - 10 = -8 \Rightarrow x_c = \frac{1}{2}$$

$$C\left(\frac{9}{2}, 0\right) \text{ ou } C\left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

b) $A_{\triangle ABC} = 4$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

$$8 = |-2y_c - 10|$$

$$-2y_c - 10 = 8 \Rightarrow y_c = -9$$

$$-2y_c - 10 = -8 \Rightarrow y_c = -1$$

$$C(0, -9) \text{ ou } C(0, -1).$$

c) $A_{\triangle ABC} = 4$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$8 = |2x - 10|$$

$$2x - 10 = 8 \Rightarrow x = 9$$

$$2x - 10 = -8 \Rightarrow x = 1$$

$$C(1, 1) \text{ ou } C(9, 9).$$

d) $A_{\triangle ABC} = 4$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -y & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$8 = |-6y - 10|$$

$$-6y - 10 = 8 \Rightarrow y = -3$$

$$-6y - 10 = -8 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

$$C(3, -3) \text{ ou } C\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

e) $A_{\triangle ABC} = 4$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2y_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$$

$$8 = |6y_c - 10|$$

$$6y_c - 10 = 8 \Rightarrow y_c = 3$$

$$6y_c - 10 = -8 \Rightarrow y_c = \frac{1}{3}$$

$$C(6, 3) \text{ ou } C\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

f) $A_{\triangle ABC} = 4$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

$$4 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ x_c & 2x_c - 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = 0$$

\therefore Os pontos estão alinhados: $A_{\triangle ABC} = 0$.

28. a) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14$

Os pontos não são colineares.

b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Os pontos são colineares.

29. a) $\begin{vmatrix} -12 & -13 & 1 \\ -2 & -5 & 1 \\ 3 & m & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 60 - 39 - 2m + 15 + 12m - 26 = 0 \Rightarrow m = -1$$

b) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -6 & 5 & 1 \\ m & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10 - 3m + 30 - 5m + 10 - 18 = 0 \Rightarrow m = 4$$

c) $\begin{vmatrix} -7 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ m & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -21 + 3m + 20 - 3m + 28 - 15 = 0 \Rightarrow 12 = 0$$

$\nexists m$

30. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 23 & -6 & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$-42 + 3x_p + 23y_p + 6x_p - 7y_p - 69 = 0$$

$$9x_p + 16y_p - 111 = 0$$

a) $y_p = 0$

$$9x_p = 111$$

$$x_p = \frac{111}{9} = \frac{37}{3}$$

$$P\left(\frac{37}{3}, 0\right)$$

b) $x_p = 0$

$$16y_p = 111$$

$$y_p = \frac{111}{16}$$

$$P\left(0, \frac{111}{16}\right)$$

c) $x_p = y_p$

$$9x_p + 16x_p - 111 = 0$$

$$25x_p = 111$$

$$x_p = \frac{111}{25}$$

$$P\left(\frac{111}{25}, \frac{111}{25}\right)$$

d) $x_p = -y_p$

$$9x_p - 16x_p - 111 = 0$$

$$-7x_p = 111$$

$$x_p = -\frac{111}{7}$$

$$P\left(-\frac{111}{7}, \frac{111}{7}\right)$$

e) $y_p = 2x_p$

$$9x_p + 32x_p - 111 = 0$$

$$41x_p = 111$$

$$x_p = \frac{111}{41}$$

$$y_p = \frac{222}{41}$$

$$P\left(\frac{111}{41}, \frac{222}{41}\right)$$

f) $x_p + y_p = 3 \Rightarrow y_p = 3 - x_p$

$$9x_p + 16(3 - x_p) - 111 = 0$$

$$9x_p + 48 - 16x_p - 111 = 0$$

$$-7x_p = 63$$

$$x_p = -9$$

$$y_p = 12$$

$$P(-9, 12)$$

$$31. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & -6 & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (I)$$

$$-6 + 3x_p - 2y_p + 6x_p - y_p + 6 = 0$$

$$9x_p - 3y_p = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ x_p & y_p & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (II)$$

$$4 + x_p - 2y_p - 4x_p - y_p + 2 = 0$$

$$-3x_p - 3y_p = -6$$

$$\begin{cases} 9x_p - 3y_p = 0 \\ -3x_p - 3y_p = -6 \end{cases}$$

$$12x_p = +6$$

$$x_p = +\frac{1}{2}, y_p = +\frac{3}{2}$$

$$P\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

32. Baricentro do triângulo: Ponto G: $x_G = \frac{4}{3}$ e $y_G = 3$
Distância do ponto G ao ponto A:

$$d = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + 3^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}$$

Alternativa b.

Foco no raciocínio lógico (p. 88)

1. Lâmpadas amarelas: 15 s
Lâmpadas vermelhas: 12 s
Lâmpadas verdes: 10 s
m.m.c. (15, 12, 10) = ?

$$\begin{array}{l|l} 15, 12, 10 & 2 \\ 15, 6, 5 & 2 \\ 15, 3, 5 & 3 \\ 5, 1, 5 & 5 \\ 1, 1, 1 & 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \text{ s} = 1 \text{ min} \end{array}$$

As lâmpadas piscam todas juntas às:

23 h 47 min
23 h 48 min
:
24 h

2. André B_A C_A
Bernardo B_B C_B
Cláudio B_C C_C

O...	anda na bicicleta do...	levando o chapéu do...
André	Bernardo	Cláudio
Bernardo	Cláudio	André
Cláudio	André	Bernardo

O Cláudio está andando na bicicleta do André.

3. Gasto de 200 calorias:
Telefone: + 20 minutos.
Supermercado: + 30 minutos.
Lavar roupas: + 10 minutos.
Total: + 60 minutos.
Alternativa b.

Aprender a aprender (p. 89)

1. a) $\sin 30^\circ = \frac{2}{x}$
 $\frac{1}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$
b) $\sin 60^\circ = \frac{9}{x}$
 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{x} \Rightarrow x = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$
 $\cos 60^\circ = \frac{y}{x}$
 $\frac{1}{2} = \frac{y}{6\sqrt{3}} \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$
 $x = 6\sqrt{3} \text{ cm e } y = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$

$$c) \sin 30^\circ = \frac{x}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 3$$

$$\cos 30^\circ = \frac{y}{6}$$

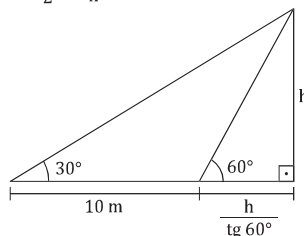
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 3\sqrt{3}$$

$$x = 3 \text{ cm e } y = 3\sqrt{3} \text{ cm.}$$

$$d) \cos 45^\circ = \frac{2}{x}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

2.



$$\tan 30^\circ = \frac{h}{10 + \frac{h}{\tan 60^\circ}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{10 + \frac{h}{\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{3} \left(10 + \frac{h}{\sqrt{3}} \right) = 3h \Rightarrow 10\sqrt{3} + h = 3h \Rightarrow 10\sqrt{3} = 2h \Rightarrow$$

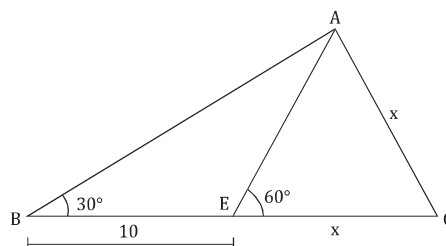
$$\Rightarrow h = 5\sqrt{3} \text{ m} \approx 9 \text{ m}$$

O helicóptero está a aproximadamente 9 metros de altura.

$$3. \tan 60^\circ = \frac{x}{50}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{50} \Rightarrow x = 50\sqrt{3} \text{ m} \Rightarrow x \approx 87 \text{ m}$$

4.



$\triangle ABE$ é isósceles: $BE = AE = 10$

$\triangle AEC$ é equilátero: $x = 10$

$$5. a) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

$$b) \cos \theta = \frac{b}{2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{b}{2} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{a}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a}{2} \Rightarrow a = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$6. A_{\Delta} = \frac{3 \cdot 4 \cdot \sin 45^\circ}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = 3\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$V_{\text{prisma}} = A_b \cdot h = 3\sqrt{2} \cdot 9 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 27\sqrt{2} \text{ cm}^3$$

Foco na tecnologia – Calculadora (p. 90)

$$1. A = \ell^2 = 0,4$$

$$\ell = \sqrt{0,4} \Rightarrow \ell \approx 0,6324 \text{ km}$$

O lado teria medida aproximadamente igual a 632 m.

$$2. 99\,999\,999 - x = 55\,264\,613$$

$$x = 44\,735\,386$$

Em 2016, a população do estado era de 44 735 386 habitantes.

Imagens: BIS

Cálculo rápido (p. 90)

1. a) $x_M = \frac{0+4}{2} = 2$
 $y_M = \frac{0+6}{2} = 3$
 $M(2, 3)$
- b) $x_M = \frac{4+0}{2} = 2$
 $y_M = \frac{10+0}{2} = 5$
 $M(2, 5)$
- c) $x_M = \frac{1+3}{2} = 2$
 $y_M = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$
 $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$
- d) $x_M = \frac{2+2}{2} = 2$
 $y_M = \frac{-3-1}{2} = -2$
 $M(2, -2)$
- e) $x_M = \frac{-2+4}{2} = 1$
 $y_M = \frac{-5+1}{2} = -2$
 $M(1, -2)$
- f) $x_M = \frac{5-3}{2} = 1$
 $y_M = \frac{3-3}{2} = 0$
 $M(1, 0)$

2. a) $d_{AB} = \sqrt{(4-4)^2 + (5-1)^2} = 4$
- b) $d_{AB} = \sqrt{(4-4)^2 + (-5-1)^2} = 6$
- c) $d_{AB} = \sqrt{(0-6)^2 + (2-2)^2} = 6$
- d) $d_{AB} = \sqrt{(-3-5)^2 + (2-2)^2} = 8$
- e) $d_{AB} = \sqrt{(-1+1)^2 + (3+4)^2} = 7$
- f) $d_{AB} = \sqrt{(6+2)^2 + (-3+3)^2} = 8$

3. a) A medida do lado \overline{BC} .

b) A área do triângulo ABC.

4. a) $(-1)^2 - (2)^2 = -3$ d) $\frac{9-1}{\sqrt{9}} = \frac{8}{3}$

b) $\frac{8+5}{8-5} = \frac{13}{3}$ e) $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = (-1+2)^2 = 1$

c) $\frac{1-4}{-2-1} = 1$

5. a) $3x - 2 = 22$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

b) $\frac{1}{2}x = 8 \Rightarrow x = 16$

c) $-x - 3 = -1$

$$-x = 2$$

$$x = -2$$

d) $-\frac{2}{3}x = 6$

$$-2x = 18$$

$$x = -9$$

e) $-2x + 4 = 8$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

f) $\frac{x-4}{2} = 2$

$$x-4 = 4$$

$$x = 8$$

Mundo plural (p. 91)

1. Resposta de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

CAPÍTULO 5

Fazer e aprender (p. 96)

$$1. a) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3 + 5x - 2y - x - 3y + 10 = 0$$

$$4x - 5y + 13 = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 + 6y + 4x + x + 2y - 24 = 0$$

$$5x + 8y - 22 = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4x - 2y = 0$$

$$2x + y = 0$$

$$d) \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 6 & -5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-30 + x + 6y + 5x - 6y - 6 = 0$$

$$6x - 36 = 0$$

$$x - 6 = 0$$

$$e) \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-10 - 2x - 6y + 2x - 5y - 12 = 0$$

$$-11y - 22 = 0$$

$$y + 2 = 0$$

2. a) Escolhendo dois pontos quaisquer que pertençam à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 + x + 2y - 2x - y - 2 = 0$$

$$x - y = 0$$

- b) Escolhendo dois pontos quaisquer que pertençam à bissetriz do 2º e do 4º quadrantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-x - y = 0$$

$$x + y = 0$$

- c) Escolhendo dois pontos quaisquer que pertençam ao eixo x:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2y - y = 0$$

$$y = 0$$

- d) Escolhendo dois pontos quaisquer que pertençam ao eixo y:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 2x = 0$$

$$x = 0$$

3. Coeficiente angular da reta r que passa pelos pontos $(0, 2)$ e $(2, 3)$:

$$m = \frac{3-2}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Assim, a equação reduzida da reta r será: $y = \frac{x}{2} + 2$

Multiplicando a equação por 2 temos:

$$x - 2y = -4$$

Alternativa a.

$$4. a) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$6 + 4x - y - 2x - 3y + 4 = 0$$

$$2x - 4y + 10 = 0$$

$$x - 2y + 5 = 0$$

b) M é ponto médio de \overline{AB} .

$$x_M = \frac{3-1}{2} = 1; y_M = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x + y - 7 = 0$$

$$5. r: x - y - 1 = 0$$

$$A(2, 4)$$

$$d_{PA} = \sqrt{17}$$

$$P \in r: x_P - y_P - 1 = 0$$

$$y_P = x_P - 1$$

$$(\sqrt{17})^2 = (x_P - 2)^2 + (x_P - 1 - 4)^2$$

$$17 = x_P^2 - 4x_P + 4 + x_P^2 - 10x_P + 25$$

$$17 = 2x_P^2 - 14x_P + 29$$

$$0 = 2x_P^2 - 14x_P + 12$$

$$0 = x_P^2 - 7x_P + 6$$

$$S = 7 \left\{ \begin{array}{l} x_P = 6 \text{ ou } x_P = 1 \\ P = 6 \end{array} \right.$$

$$\text{Para } x_P = 6: y_P = 5 \Rightarrow P(6, 5)$$

$$\text{Para } x_P = 1: y_P = 0 \Rightarrow P(1, 0)$$

$$6. r: x + 5y - 7 = 0$$

$$P \in r: d_{PA} - d_{PB}$$

$$A(-1, -3)$$

$$B(3, 5)$$

$$P \in r: x_P + 5y_P - 7 = 0$$

$$x_P = -5y_P + 7$$

$$d_{PA}^2 = (x_P + 1)^2 + (y_P + 3)^2$$

$$d_{PB}^2 = (x_P - 3)^2 + (y_P - 5)^2$$

$$(x_P + 1)^2 + (y_P + 3)^2 = (x_P - 3)^2 + (y_P - 5)^2$$

$$(-5y_P + 8)^2 + (y_P + 3)^2 = (-5y_P + 4)^2 + (y_P - 5)^2$$

$$25y_P^2 - 80y_P + 64 + y_P^2 + 6y_P + 9 = 25y_P^2 - 40y_P + 16 + y_P^2 - 10y_P + 25$$

$$-74y_P + 73 = -50y_P + 41$$

$$-24y_P = -32$$

$$y_P = \frac{32}{24}$$

$$y_P = \frac{4}{3}$$

$$x_P = -5 \cdot \frac{4}{3} + 7 \Rightarrow x_P = -\frac{20}{3} + \frac{21}{3} \Rightarrow x_P = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$7. 2x + 3y - 12 = 0$$

$$a) x = -1 \Rightarrow -2 + 3y - 12 = 0$$

$$y = \frac{14}{3}$$

$$\left(-1, \frac{14}{3}\right)$$

$$b) y = 6 \Rightarrow 2x + 18 - 12 = 0$$

$$x = -3$$

$$(-3, 6)$$

$$c) y = 0 \Rightarrow 2x - 12 = 0$$

$$x = 6$$

$$(6, 0)$$

$$d) x = 0 \Rightarrow 3y - 12 = 0$$

$$y = 4$$

$$(0, 4)$$

$$e) x = y \Rightarrow 2x + 3x - 12 = 0$$

$$x = \frac{12}{5}$$

$$\left(\frac{12}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$f) x = -y \Rightarrow 2x - 3x - 12 = 0$$

$$x = -12$$

$$(-12, 12)$$

8. A reta passa pelos pontos (0, 3) e (2, 0):

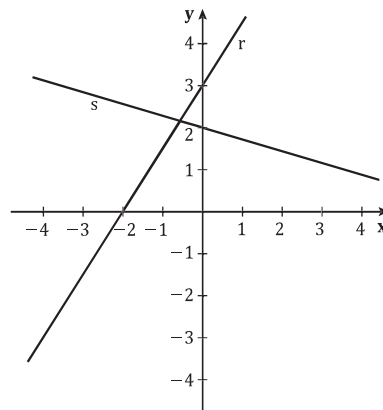
$$a \cdot 0 + b = 3 \Leftrightarrow b = 3$$

$$2 \cdot a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

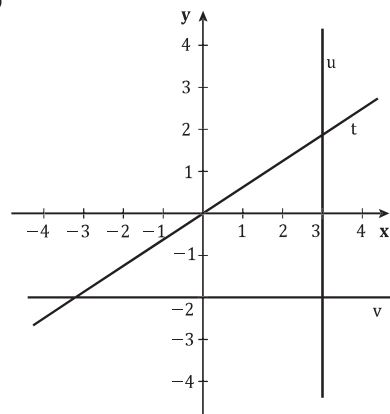
$$\text{Assim, a equação pedida é } y = -\frac{3}{2}x + 3$$

Alternativa b.

9. a)



b)



$$10. A_{\triangle ABC} = \frac{2}{3}$$

$$A(2, -3)$$

$$B(3, -2)$$

$$G \in r$$

$$r: 3x - y - 8 = 0$$

$$A = \frac{1}{2}|D| = \frac{3}{2} \Rightarrow |D| = 3 \Rightarrow D = 3$$

$$D = \begin{vmatrix} x_c & y_c & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -3x_c + 3y_c - 4 + 9 + 2x_c - 2y_c =$$

$$= -x_c + y_c + 5$$

$$-x_c + y_c + 5 = 3 \Rightarrow y_c = -2 + x_c$$

$$\text{ou } -x_c + y_c + 5 = -3 \Rightarrow y_c = -8 + x_c$$

$$G \in r$$

$$y = 3x - 8$$

$$G(x, 3x - 8)$$

$$x_G = \frac{2+3+x_c}{3} = \frac{5+x_c}{3} = x$$

$$y_G = \frac{-3-2+y_c}{3} = \frac{-5+y_c}{3} = 3x-8$$

Substituindo ① em ②, temos:

$$\frac{-5+y_c}{3} = 3 \cdot \left(\frac{5+x_c}{3}\right) - 8$$

$$-5 + y_c = 15 + 3x_c - 24$$

$$y_c = 3x_c - 4$$

Assim:

$$\begin{cases} y_c = -|2| + x_c & \text{ou} & \begin{cases} y_c = -8 + x_c \\ y_c = 3x_c - 4 \end{cases} \\ y_c = 3x_c - 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -2 + x_c &= 3x_c - 4 & -8 + x_c &= 3x_c - 4 \\ 2x_c &= 2 & 2x_c &= -4 \\ x_c &= 1 & x_c &= -2 \\ \therefore y_c &= -1 & \therefore y_c &= -10 \end{aligned}$$

C(1, -1) ou C(-2, -10).

Fazer e aprender (p. 99)

11. a) Uma reta que passa pelo ponto **P** e é paralela ao eixo **x** deverá ter todos os seus pontos com a mesma ordenada do ponto **P**, isto é, $y = -4 \Rightarrow y + 4 = 0$.

- b) Uma reta que passa pelo ponto **P** e é paralela ao eixo **y** deverá ter todos os pontos com a mesma abscissa do ponto **P**, isto é, $x = 6 \Rightarrow x - 6 = 0$.

12. A $\in r$, pois $2 \cdot (-1) + 3 \cdot \frac{8}{3} - 6 = 0$

$$B \notin r, \text{ pois } 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 6 \neq 0$$

$$C \in r, \text{ pois } 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 6 = 0$$

$$D \in r, \text{ pois } 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 - 6 = 0$$

$$E \notin r, \text{ pois } 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) - 6 \neq 0$$

13. a) $k^2 - 2k = 0$ e $k^2 - 4 \neq 0$

$$k(k-2) = 0; \quad k \neq \pm 2$$

$$k = 0 \text{ ou } k = 2$$

$$k = 0 \Rightarrow -4y - 2 = 0$$

$$2y + 1 = 0$$

- b) $k^2 - 2k \neq 0$ e $k^2 - 4 = 0$

$$k \neq 0 \text{ ou } k \neq 2; \quad k = \pm 2$$

$$k = -2 \Rightarrow 8x - 4 = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

- c) $k^2 - 2k = 0$ e $k^2 - 4 = 0$

$$k = 0 \text{ ou } k = 2; \quad k = \pm 2$$

$$k = 2$$

14. a) $\frac{4}{2} \neq \frac{1}{2} \rightarrow$ Concorrentes

$$b) \frac{3}{9} = \frac{-2}{-6} \neq \frac{-1}{2} \rightarrow$$
 Paralelas

$$c) \frac{1}{-3} = \frac{2}{-6} = \frac{-3}{9} \rightarrow$$
 Coincidentes

15.
$$\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 4x - y - 11 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot (-3)} \begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ -12x + 3y + 33 = 0 \end{cases}$$

$$-10x + 40 = 0$$

$$x = 4, y = 5$$

$$(4, 5)$$

16. $x + 2y - 5 = 0$ ①

$$2x - y = 0$$
 ②

$$3x + y + 5 = 0$$
 ③

De ① e ②, temos:

$$x + 4x - 5 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$\therefore (1, 2)$$

De ② e ③, temos:

$$3x + 2x + 5 = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -2$$

$$\therefore (-1, -2)$$

De ① e ③, temos:

$$-3x - 6y + 15 = 0$$

$$-3x + y + 5 = 0 \quad \oplus$$

$$-5y + 20 = 0 \Rightarrow y = 4$$

$$-3x - 24 + 15 = 0$$

$$x = -3$$

$$\therefore (-3, 4)$$

Temos, então, (1, 2), (-1, -2) e (-3, 4) como vértices do triângulo.

$$17. \begin{cases} 2x + y - 16 = 0 \\ 4x - 2y - 2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{cases} 2x + y - 16 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$4x - 17 = 0$$

$$x = \frac{17}{4}, y = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$$

Substituindo $x = \frac{17}{4}$ e $y = \frac{15}{2}$ em $2kx + (k-1)y + 3 = 0$, temos:

$$2k \cdot \frac{17}{4} + (k-1) \cdot \frac{15}{2} + 3 = 0$$

$$\frac{17k}{2} + \frac{15k}{2} - \frac{15}{2} + 3 = 0$$

$$16k = \frac{9}{2}$$

$$k = \frac{9}{32}$$

18. a) Se $\frac{m}{2} \neq \frac{3m}{m}$, então **r** e **s** são concorrentes.

$$m^2 \neq 6m$$

$$m^2 - 6m \neq 0$$

Se $m \neq 0$ ou $m \neq 6$, as retas são concorrentes.

$$\text{Se } m = 6 \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{18}{6} \neq \frac{0}{-4}, \text{ as retas são paralelas.}$$

- b) Se $\frac{m}{m-1} \neq \frac{-1}{2m}$, então **r** e **s** são concorrentes.

$$\text{Logo: } 2m^2 \neq -m + 1$$

$$2m^2 + m - 1 \neq 0$$

$$m \neq -1 \text{ ou } m \neq \frac{1}{2}, \text{ então } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ são concorrentes.}$$

$$\text{Se } m = -1, \text{ temos } \frac{-1}{-2} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{-1}{-4}, \text{ então } \mathbf{r} // \mathbf{s}.$$

$$\text{Se } m = \frac{1}{2}, \text{ temos } \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-1}{2}} = \frac{-1}{1} \neq \frac{-1}{-4}, \text{ então } \mathbf{r} // \mathbf{s}.$$

- c) Se $\frac{1}{m^2} \neq \frac{1}{1}$, então **r** e **s** são concorrentes.

$$\text{Logo: } m^2 \neq 1$$

$$m \neq \pm 1$$

Se $m \neq \pm 1$, então **r** e **s** são concorrentes.

$$\text{Se } m = 1, \text{ temos } \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1}, \text{ então } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ são coincidentes.}$$

$$\text{Se } m = -1, \text{ temos } \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1}, \text{ então } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ são coincidentes.}$$

$$19. \frac{1}{2} = \frac{-1}{p} = \frac{-2}{-q}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{p} \Rightarrow p = -2$$

$$\frac{1}{2} = \frac{-2}{-q} \Rightarrow q = 4$$

20. Como as diagonais de um retângulo se intersectam em seu ponto médio, temos que:

$$\mathbf{E} \text{ é ponto médio de } \overline{AC} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{-1+x_c}{2} \Rightarrow x_c = 4$$

$$\frac{9}{2} = \frac{7+y_c}{2} \Rightarrow y_c = 2$$

$$\mathbf{E} \text{ é ponto médio de } \overline{BD} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{1+x_d}{2} \Rightarrow x_d = 2$$

$$\frac{9}{2} = \frac{8+y_d}{2} \Rightarrow y_d = 1$$

A(-1, 7); B(1, 8); C(4, 2); D(2, 1)

Equação de \overline{AB} :

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-8 + 7x + y - 8x + y - 7 = 0$$

$$-x + 2y - 15 = 0$$

$$\overline{AB}: x - 2y + 15 = 0$$

Equação de \overline{BC} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$2 + 8x + 4y - 2x - y - 32 = 0$$

$$6x + 3y - 30 = 0$$

$$\overline{BC}: 2x + y - 10 = 0$$

Equação de \overline{CD} :

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4 + 2x + 2y - x - 4y - 4 = 0$$

$$\overline{CD}: x - 2y = 0$$

Equação de \overline{AD} :

$$\begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-1 + 7x + 2y - x + y - 14 = 0$$

$$6x + 3y - 15 = 0$$

$$\overline{AD}: 2x + y - 5 = 0$$

Fazer e aprender (p. 102)

21. $y = 2x + 13 \Rightarrow m = 2$

$$y = 4x - 11 \Rightarrow m = 4$$

A reta da equação $y = 4x - 11$ apresenta maior inclinação, pois $m = 4 = \tan \theta$ e, quanto maior $\tan \theta$, maior é θ para $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$.

22. $A(x_A, y_A) \quad y_A = -6x_A + 5$

$$B(x_A + 1, y_B) \quad y_B = -6(x_A + 1) + 5 \Rightarrow y_B = -6x_A - 1$$

$$C(x_A + 2, y_C) \quad y_C = -6(x_A + 2) + 5 \Rightarrow y_C = -6x_A - 7$$

$$D(x_A + 3, y_D) \quad y_D = -6(x_A + 3) + 5 \Rightarrow y_D = -6x_A - 13$$

As ordenadas desses pontos formam uma P.A. de razão -6 .

23. a) $m = \frac{5-1}{4-2} = 2$ c) $m = \frac{-4-(-4)}{-1-(-3)} = 0$

b) $m = \frac{7-2}{-3-1} = -\frac{5}{4}$

24. a) $m = \frac{-a}{b} = \frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ c) $m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{0} \Rightarrow \text{N/A}$

b) $m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$ d) $m = \frac{-a}{b} = \frac{0}{6} = 0$

25. a) $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$n = 5$$

$$y = \sqrt{3}x + 5$$

b) $m = \tan 45^\circ = 1$

$$n = -2$$

$$y = x - 2$$

c) $m = \tan 150^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

$$n = 1$$

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$$

d) $m = \tan 135^\circ = -1$

$$n = -3$$

$$y = -x - 3$$

e) $m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$n = 0$$

$$y = \sqrt{3}x$$

f) $m = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$n = -3$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$$

26. a) $b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow c = 2b - a$

O ponto $R(x_R, y_R)$ satisfaz a equação das duas retas:

$$ax_R + b = cx_R \Rightarrow x_R = -\frac{b}{2b-2a}$$

$$y_R = c \cdot x_R = (2b-a) \cdot \frac{b}{2b-2a}$$

$$R\left(-\frac{b}{2b-2a}, \frac{b \cdot (2b-a)}{2b-2a}\right)$$

O ponto P está nas retas $y = ax + b$ e $y = 0$.

$$y_P = 0 \text{ e } 0 = a \cdot x_P \Leftrightarrow x_P = -\frac{b}{a}$$

$$P\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$$

O ponto Q está nas retas $y = ax + b$ e $x = 0$.

$$x_Q = 0 \text{ e } y_Q = b, \text{ daí } Q(0, b).$$

b) A área do $\triangle OPQ$ vale 1. Assim:

$$\frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{-b}{a} \right) b = 1 \Rightarrow a = \frac{-b^2}{2}$$

Como $A_{\triangle OPR} = 2A_{\triangle ORQ}$, temos:

$$\frac{\overline{OP} \cdot R_y}{2} = 2 \frac{\overline{OQ} \cdot R_x}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{-b}{a} \right) \left(\frac{(2b-a) \cdot b}{2b-2a} \right) = b \left(\frac{b}{2b-2a} \right)$$

Simplificando a expressão, temos:

$$2b - a = -2a$$

$$a = -2b$$

Obtemos, então:

$$2b = \frac{b^2}{2} \Rightarrow b^2 - 4b = 0$$

$$b(b-4) = 0$$

$$b = 0$$

$$b = 4$$

(não procede)

Então:

$$a = -2 \cdot 4 = -8$$

$$c = 2b - a = 2 \cdot 4 - (-8) = 8 + 8 = 16$$

Portanto: $a = -8$, $b = 4$ e $c = 16$.

27. $m = \tan \widehat{OCB} = \tan 45^\circ = 1$

$$n = 6$$

$$y = x + 6$$

28. A: $\begin{cases} \frac{3x}{4} - y + 6 = 0 \\ \frac{3x}{4} - y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(4, 3)$

$$B(0, 0)$$

$$C: \begin{cases} -\frac{3x}{4} - y + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(8, 0)$$

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$$

$$AC = \sqrt{(4-8)^2 + (3-0)^2} = 5$$

$$BC = 8 - 0 = 8$$

$$\text{Assim: } 2p = 5 + 5 + 8 = 18$$

Alternativa a.

29. Se (a, b, c, d) é uma P.G. de razão -2 e $a + b + c + d = 5$:

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = 4a \\ d = -8a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = -4 \\ d = 8 \end{cases}$$

Equações das retas r_1 e r_2 :

$$y_1 = -x + 8 \text{ e } y_2 = 2x - 4$$

r_1 intersecta o eixo x no ponto de abscissa $-x + 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

r_2 intersecta o eixo x no ponto de abscissa $2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

As coordenadas de **P**, interseção de r_1 e r_2 , são:

$$\begin{cases} y_1 = -x + 8 \\ y_2 = 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow 2x + 4 = -x + 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Assim, a área do triângulo limitado pelas retas r_1 , r_2 e pela reta de equação $y = 0$ é igual a:

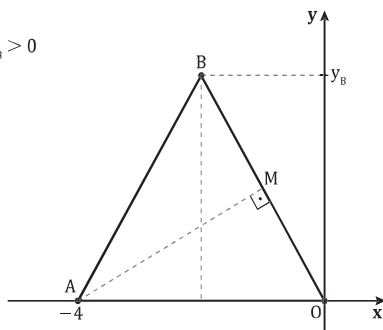
$$\frac{(8-2) \cdot 4}{2} = 12$$

Alternativa c.

30. O(0, 0)

A(-4, 0)

$B(x_B, y_B), y_B > 0$



Como $\triangle AOB$ é equilátero:

$$d_{OB} = 4$$

$$x_B^2 + y_B^2 = 16$$

$$y_B^2 = 16 - x_B^2$$

$$y_B = \sqrt{16 - x_B^2}, \text{ pois } y_B > 0$$

$$d_{AB} = 4$$

$$(x_B + 4)^2 + y_B^2 = 16$$

$$y_B^2 = 16 - (x_B + 4)^2$$

$$y_B = \sqrt{16 - (x_B + 4)^2}, \text{ pois } y_B > 0$$

$$y_B = \sqrt{-x_B^2 - 8x_B}$$

$$\sqrt{16 - x_B^2} = \sqrt{-x_B^2 - 8x_B}$$

$$16 - x_B^2 = -x_B^2 - 8x_B$$

$$x_B = -2 \Rightarrow y_B = \sqrt{16 - (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore B(-2, 2\sqrt{3})$$

Num triângulo equilátero, a altura é a mediana.

Seja $M(x_M, y_M)$ ponto médio de \overline{OB} :

$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{-2 + 0}{2} = -1 \\ y_M &= \frac{2\sqrt{3} + 0}{2} = \sqrt{3} \end{aligned} \right\} M(-1, \sqrt{3})$$

\overline{AM} é a reta suporte da altura:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{vmatrix} = -y - 4\sqrt{3} - \sqrt{3}x + 4y =$$

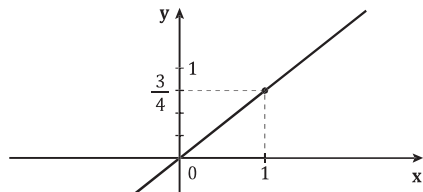
$$= -\sqrt{3}x + 3y - 4\sqrt{3} = 0$$

Portanto, $AM: \sqrt{3}x - 3y + 4\sqrt{3} = 0$ é a equação procurada.

31. a) $y = 75\% \cdot x$

$$y = \frac{75}{100}x$$

$$y = 0,75x$$



$$\text{b) } m = 0,75 = \tan \theta \\ \theta \approx 37^\circ$$

Fazer e aprender (p. 106)

32. a) $\frac{3}{6} = \frac{4}{8} \neq \frac{-2}{1} \Rightarrow r \nparallel s$

b) $(-y, y)$ r e s são concorrentes.

$$\text{c) } m_r = 0$$

$$m_s = 0$$

$$m_r = m_s = 0 \Rightarrow r \parallel s$$

33. a) $m_s = \frac{3}{4}$

$$y - 2 = \frac{3}{4}(x - 5)$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}$$

c) $m_s = 0$

$$y - 4 = 0(x - 5)$$

$$y = 4$$

b) $m_s = \frac{2}{3}$

$$y - 6 = \frac{2}{3}(x - 4)$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

d) $m_s = \frac{3-5}{-1-2} = \frac{2}{3}$

$$y + 6 = \frac{2}{3}(x - 3)$$

$$y = \frac{2}{3}x - 8$$

34. $m = \frac{2}{3}$

$$y + 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$$

$$m = \frac{-3}{2}$$

$$y + 3 = \frac{-3}{2}(x - 2)$$

$$y = -\frac{3}{2}x$$

35. $\frac{4}{6} = \frac{10}{k} \neq \frac{13}{11}$

$$4k = 60$$

$$k = 15$$

36. $\frac{1}{k} \neq \frac{k}{4}$

$$k^2 \neq 4$$

$$k \neq 2 \text{ e } k \neq -2$$

37. $m_s = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2 \Rightarrow m_r = 2$ (já que são paralelas) $\Rightarrow y - 1 = 2(x - 1)$

$$y - 1 = 2x - 2 \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

Alternativa d.

38. $\overrightarrow{AD}: y = -x + 6$

$$\overrightarrow{BC}: y = 5x - 36$$

$$\overrightarrow{CD}: y = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$$

$$A(4, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}: m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{2}$$

$$AB: y = \frac{1}{2}x + n$$

$$A \in AB: 2 = \frac{1}{2} \cdot 4 + n$$

$$0 = n$$

$$AB: y = \frac{1}{2}x$$

$$AB \cap BC = \{B\}$$

$$\frac{1}{2}x = 5x - 36$$

$$\frac{1}{2}x = 36$$

$$x = 8 \text{ e } y = 4$$

$$\therefore B(8, 4)$$

$$\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{CD} = \{C\}$$

$$5x - 36 = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$$

$$\frac{9x}{2} = \frac{81}{2}$$

$$x = 9$$

$$y = 5 \cdot 9 - 36$$

$$y = 9$$

$$\therefore C(9, 9)$$

$$\overrightarrow{AD} \cap \overrightarrow{CD} = \{D\}$$

$$-x + 6 = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}$$

$$x = 1 \text{ e } y = 5$$

$$\therefore D(1, 5)$$

Daí, temos que $B(8, 4)$, $C(9, 9)$ e $D(1, 5)$ são os vértices procurados.

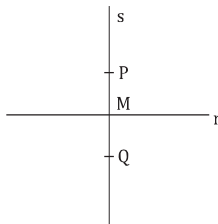
Fazer e aprender (p. 108)

39. a) $m_r = \frac{5}{7}; m_s = -\frac{7}{5}$
 $r \perp s$
 b) $m_r = -\frac{2}{3}; m_s = -\frac{2}{3}$
 r e s são paralelas.
 c) $m_r = \frac{3}{5}; m_s = \frac{5}{3}$
 r e s são concorrentes.
 d) $m_r = \frac{3}{5}; m_s = 0$
 $r \perp s$

40. a) $m_s = \frac{4}{5}; m_r = -\frac{5}{4}$
 $y - 3 = -\frac{5}{4}(x - 2)$
 $y = -\frac{5}{4}x + \frac{11}{2}$
 b) $m_s = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_r = 2$
 $y + 2 = 2(x - 3)$
 $y = 2x - 8$
 c) $m_s = \frac{3}{5} \Rightarrow m_r = 0$
 $y + 6 = 0(x - 5)$
 $y = -6$
 d) $m_s = 0 \Rightarrow m_r = \frac{3}{5}$
 $x = -2$

41. a) $m_r = \frac{1}{2} \Rightarrow m_s = -2$
 $y - 5 = -2(x + 2)$
 $y = -2x + 1$

M é ponto de interseção entre r e s :



$$\begin{cases} x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{5}, y = \frac{13}{5} \\ y = -2x + 1 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right)$$

b) Q é simétrico de P em relação a r .

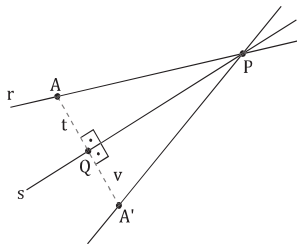
M é ponto médio de PQ .

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \Rightarrow \frac{-4}{5} = \frac{-2 + x_Q}{2} \Rightarrow x_Q = \frac{2}{5}$$

$$y_M = \frac{y_P + y_Q}{2} \Rightarrow \frac{13}{5} = \frac{5 + y_Q}{2} \Rightarrow y_Q = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$$

42. $r: 2x - y = 0$
 $s: x - y + 3 = 0$



$$\{P\} = r \cap s = \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$x = 3$$

$$2 \cdot 3 - y = 0$$

$$y = 6$$

$$P(3, 6)$$

Imagens: IBS

Sejam $A \in r$ e a projeção de A sobre s :

$$A(x, 2x) \Rightarrow A(2, 4) \neq P(3, 6)$$

$$m_s = 1$$

$$m_t = -1, t \perp s \text{ por } A$$

$$t: y = -x + n$$

$$4 = -2 + n$$

$$n = 6$$

$$t: y = -x + 6$$

$$t \cap s: y = -x + 6$$

$$y = -x + 3$$

$$2y = 9$$

$$y = \frac{9}{2} \text{ e } x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore Q\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

$$d_{AQ} = d_{QA'}$$

Q é ponto médio de AA' .

$$\frac{2 + x_{A'}}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_{A'} = 1$$

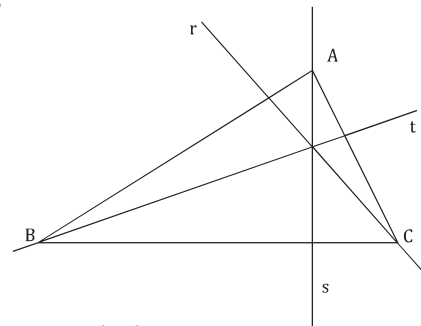
$$\frac{4 + y_{A'}}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow y_{A'} = 5$$

$$\therefore A'(1, 5)$$

$$\overrightarrow{A'P}: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 5x + 3y + 6 - 15 - 6x - y = 0$$

$A'P: x - 2y + 9 = 0$ é a equação procurada.

43.



$$m_{AB} = \frac{-4 - 3}{6 - 1(-1)} = -1 \Rightarrow m_r = 1$$

$$C \in r \Rightarrow y - 6 = 1(x - 8)$$

$$h_{AB} = y = x - 2$$

$$m_{BC} = \frac{6 - (-4)}{8 - 6} = 5 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{5}$$

$$C \in r \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{5}(x + 1)$$

$$h_{BC} = y = -\frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$$

$$m_{AC} = \frac{6 - 3}{8 - (-1)} = \frac{1}{3} \Rightarrow m_t = -3$$

$$B \in t \Rightarrow y + 4 = -3(x - 6)$$

$$h_{AC} = y = -3x + 14$$

44. $m_{AB} = \frac{3 - 6}{-1 - 3} = \frac{3}{4} \Rightarrow m_r = -\frac{4}{3}$

$$M \text{ é ponto médio de } \overline{AB} \Rightarrow x_M = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$y_M = \frac{6 + 3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$M\left(1, \frac{9}{2}\right) \in r \Rightarrow y - \frac{9}{2} = -\frac{4}{3}(x - 1)$$

$$m_{AB}: y = -\frac{4}{3}x + \frac{35}{6}$$

$$m_{BC} = \frac{-1 - 3}{2 - (-1)} = -\frac{4}{3}; m_s = \frac{3}{4}$$

$$N \text{ é ponto médio de } \overline{BC} \Rightarrow x_N = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_N = \frac{3 - 1}{2} = 1$$

$$N\left(\frac{1}{2}, 1\right) \in s \Rightarrow y - 1 = \frac{3}{4} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$m_{\overline{BC}}: y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}$$

$$45. m_r = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{e} \quad m_s = -\frac{1}{2}$$

Reta s:

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - 4 = -x + 1 \Rightarrow x + 2y - 5 = 0$$

Interseção com o eixo x: $x + 2 \cdot 0 = 5 \Rightarrow x = 5$. Logo: A(5, 0).

$$\text{Interseção com o eixo y: } 0 + 2 \cdot y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Assim, } A\left(\frac{5}{2}, 0\right).$$

Calculando a área do triângulo, temos:

$$A = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 2} = \frac{25}{4}$$

Alternativa c.

$$46. a) \text{ Para ser equilátero, } d(A, B) = d(B, C) = d(C, A)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(0 - 0)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d(B, C) = \sqrt{(0 - 0)^2 + (2a - 5)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 4a^2 - 20a + 25} = \sqrt{5a^2 - 20a + 25}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(a - 0)^2 + (2a - 0)^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5a^2}$$

Como $d(A, B) = d(A, C)$ e $d(A, B) = d(B, C)$, temos:

$$5 = \sqrt{5a^2}$$

$$25 = 5a^2$$

$$5 = a^2$$

$$a = \sqrt{5}$$

$$5 = \sqrt{5a^2 - 20a + 25}$$

$$25 = 5a^2 - 20a + 25$$

$$5a^2 - 20a = 0$$

$$5a(a - 4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } a = 4$$

Falsa.

$$b) \text{ Vamos calcular o coeficiente angular do segmento AC:}$$

$$A(0, 0); C(a, 2a)$$

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2a - 0}{a - 0} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\text{O coeficiente angular de } y = -\frac{1}{2}x + 20 \text{ é } m = -\frac{1}{2}$$

Para serem perpendiculares, o produto dos coeficientes angulares das retas deve ser -1 .

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Verdadeira.

$$c) A(0, 0); B(0, 5); C(2, 4)$$

Precisamos verificar se \overline{AC} é perpendicular a \overline{BC} .

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$$

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4 - 5}{2 - 0} = -\frac{1}{2}$$

$$m_{AC} \cdot m_{BC} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Verdadeira.

$$d) A(0, 0); B(0, 5); C(a, 2a), \text{ área} = 10$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ a & 2a & 1 \end{vmatrix} = -5a$$

$$A = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow \text{como } a > 0, \text{ temos que:}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 5a$$

$$10 = \frac{1}{2} \cdot 5a$$

$$5a = 20$$

$$a = 4$$

Portanto, C(4, 8).

Falsa.

$$e) \text{ Se ABCD é um losango, } AB = BC = CD = DA \text{ e o segmento AC é perpendicular ao segmento BD.}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2a - 0}{a - 0} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$m_{BD} = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{y - 5}{x - 0} = \frac{y - 5}{x} \quad \textcircled{I}$$

$$m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$$

$$2 \cdot m_{BD} = -1$$

$$m_{BD} = \frac{-1}{2} \quad \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \quad \frac{y - 5}{x} = \frac{-1}{2}$$

$$2y - 10 = -x$$

$$x = 10 - 2y \quad \textcircled{III}$$

Sabemos ainda que $AB = DA$.

$$d_{AB} = d_{DA}$$

$$\sqrt{(0 - 0)^2 + (5 - 0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

$$25 = x^2 + y^2 \quad \textcircled{IV}$$

Substituindo \textcircled{III} em \textcircled{IV} :

$$25 = x^2 + y^2$$

$$25 = (10 - 2y)^2 + y^2$$

$$25 = 100 - 40y + 4y^2 + y^2$$

$$5y^2 - 40y + 75 = 0$$

$$y^2 - 8y + 15 = 0$$

$$y_1 = 5 \text{ e } y_2 = 3$$

para $y = 5 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D(0, 5)$ (não convém, pois corresponde ao ponto B)

para $y = 3 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow D(4, 3)$

Verdadeira.

Fazer e aprender (p. 110)

$$47. a) \begin{cases} x + 4y - 11 = 0 & \cdot (-2) \\ 2x - y - 4 = 0 & \longrightarrow \end{cases} \begin{cases} -2x - 8y + 22 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$-9y + 18 = 0$$

$$y = 2, x = 3$$

$$P(3, 2)$$

O feixe terá equação $x = 3$ ou $y - 2 = m(x - 3)$.

$$b) x - y - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

Substituindo $m = 1$ em $y - 2 = m(x - 3)$, temos:

$$y - 2 = (x - 3)$$

$$x - y - 1 = 0$$

Sim.

$$c) x + y + c = 0 \Rightarrow m = -1$$

Substituindo $m = -1$ em $y - 2 = m(x - 3)$, temos:

$$y - 2 = -1(x - 3)$$

$$x + y - 5 = 0$$

$$x + y + c = 0$$

Logo, $c = -5$.

$$48. \text{ Feixe de retas } x = -4 \text{ ou } y + 5 = m(x + 4)$$

$$a) \cancel{A} m \Rightarrow x = -4$$

$$b) m = 0 \Rightarrow y + 5 = 0(x + 4)$$

$$y = -5$$

$$c) m = 1 \Rightarrow y + 5 = 1(x + 4)$$

$$y = x - 1$$

$$d) y + 5 = m(x + 4)$$

$$O(0, 0) \Rightarrow 5 = m \cdot 4$$

$$m = \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{5}{4}x$$

49. a) $\frac{m}{p} = \frac{-1}{-1} = \frac{2}{p-4}$

$1 = \frac{2}{p-4}$ e $\frac{m}{p} = 1$

$p-4=2$ $m=p$

$p=6$ $m=6$

$mx - y + 2 = 0$ ou $px - y + p - 4 = 0$

$m=6 \Rightarrow 6x - y + 2 = 0$

$p=6 \Rightarrow 6x - y + 2 = 0$

b) Feixe: $mx - y + 2 = 0$

O centro desse feixe é o ponto $(0, 2)$.

Reta do feixe perpendicular ao eixo x : $x = 0$

Interseção com a bissetriz dos quadrantes ímpares: $(0, 0)$

Feixe: $px - y + p - 4 = 0$

O centro desse feixe é o ponto $(-1, -4)$.

Reta do feixe perpendicular ao eixo x : $x = -1$

Interseção com a bissetriz dos quadrantes ímpares: $(-1, -1)$

50. a) $r: (a+1)^2x + (a^2-a)y - 4a^2 + a - 1 = 0$

Fazendo $a = 1$, temos a reta r_1 :

$4x - 4 = 0$

Fazendo $a = -1$, temos a reta r_2 :

$2y - 6 = 0$

As retas r_1 e r_2 concorrem no ponto P , cujas coordenadas (x, y) são obtidas do sistema:

$4x - 4 = 0$

$2y - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $y = 3 \therefore P(1, 3)$

Substituindo as coordenadas do ponto P em r , temos:

$(a+1)^2 \cdot 1 + (a^2-a) \cdot 3 - 4a^2 + a - 1 = 0$

$= a^2 + 2a + 1 + 3a^2 - 3a - 4a^2 + a - 1 = 0$

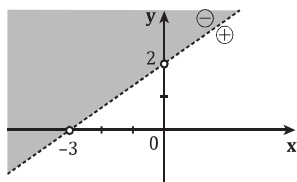
Então, para qualquer valor de a , podemos concluir que a reta r obtida passa pelo ponto $P(1, 3)$, cujas coordenadas não dependem do parâmetro a .

b) Como a reta s é paralela ao eixo y , a reta pedida deve ser paralela ao eixo x . Portanto, devemos ter $(a+1)^2 = 0$.

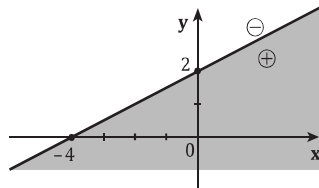
Logo, $a = -1$.

Fazer e aprender (p. 113)

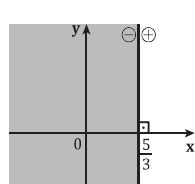
51. a)



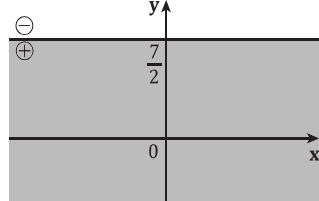
b)



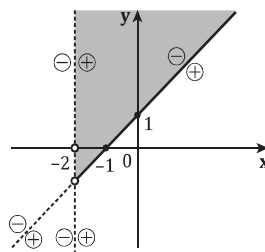
c)



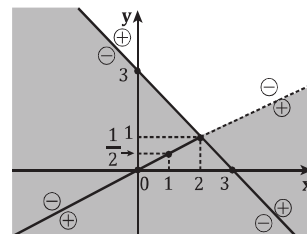
d)



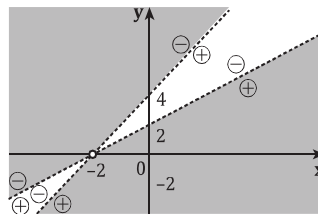
52. a)



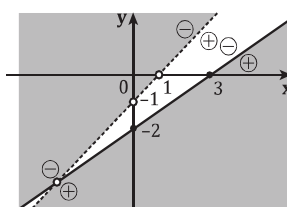
b)



53. a)



b)



Imagens: BIS

54. $3k + 2 \cdot 2 - 6 = 0$ e $3 \cdot (-1) + 2 \cdot 3k - 6 = 0$

$3k - 2 = 0$

$-3 + 6k - 6 = 0$

$k = \frac{2}{3}$

$k = \frac{3}{2}$

a) $\frac{2}{3} < k < \frac{3}{2}$

b) $k < \frac{2}{3}$ ou $k > \frac{3}{2}$

55. Do enunciado, os processos devem ser da forma:

Processo $P_1 \rightarrow 3x + y \leq 9$

Processo $P_2 \rightarrow 3x + 6y \leq 24$

Alternativa e.

Cálculo rápido (p. 115)

1. a) $4a^2 - 2ab + 2ab - b^2 = 4a^2 - b^2$

b) $9x^2 + 15x - 15x - 25 = 9x^2 - 25$

c) $4x^2 - 4xy + 4xy - 4y^2 = 4x^2 - 4y^2$

d) $u^2 - uv + uv - v^2 = u^2 - v^2$

2. a) $(x+7)(x+7) = x^2 + 7x + 7x + 49 = x^2 + 14x + 49$

b) $(x-7)(x-7) = x^2 - 7x - 7x + 49 = x^2 - 14x + 49$

c) $(a-3)(a-3) = a^2 - 3a - 3a + 9 = a^2 - 6a + 9$

d) $(5-y)(5-y) = 25 - 5y - 5y + y^2 = 25 - 10y + y^2$

e) $(-a-2)(-a-2) = a^2 + 2a + 2a + 4 = a^2 + 4a + 4$

f) $4(-x+3)(-x+3) = 4(x^2 - 3x - 3x + 9) = 4x^2 - 24x + 36$

3. a) $(1-10x)(1-10x) = 1 - 10x - 10x + 100x^2 = 1 - 20x + 100x^2$

b) $(5x-1)(x+3) = 5x^2 + 15x - x - 3 = 5x^2 + 14x - 3$

c) $(-6x)(-6x) = 36x^2$

d) $(x+6)(x-6) = x^2 - 6x + 6x - 36 = x^2 - 36$

e) $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

f) $4x(x+2)(x+2) = -4x(x^2 + 2x + 2x + 4) = -4x^3 - 16x^2 + 16x$

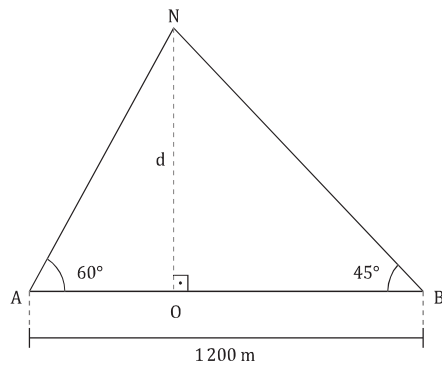
4. a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \oplus$
 $2x = 6$
 $x = 3, y = 1$
 $S = \{(3, 1)\}$
- b) $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ a - b = 0 \end{cases} \oplus$
 $3a = -3$
 $a = -1, b = -1$
 $S = \{(-1, -1)\}$
- c) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ \frac{3}{2}x - y = -6 \end{cases} \oplus$
 $2x = -6$
 $x = -3, y = \frac{3}{2}$
 $S = \left\{ \left(-3, \frac{3}{2} \right) \right\}$
- d) $\begin{cases} 2a - b = 5 \\ -3a - b = 15 \end{cases} \ominus$
 $5a = -10$
 $a = -2, b = -9$
 $S = \{(-2, -9)\}$
- e) $\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 4 \end{cases} \oplus$
 $2x = 20$
 $x = 10, y = 6$
 $S = \{(10, 6)\}$
- f) $\begin{cases} y = 3x \\ x - y = -6 \end{cases}$
 $x - 3x = -6$
 $x = 3, y = 9$
 $S = \{(3, 9)\}$
- g) $\begin{cases} x = 2y \\ x + y = 12 \end{cases}$
 $2y + y = 12$
 $y = 4, x = 8$
 $S = \{(8, 4)\}$
- h) $\begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \end{cases} \oplus$
 $2a = 2$
 $a = 1, b = 2$
 $S = \{(1, 2)\}$

Foco no raciocínio lógico (p. 116)

- Fazendo um diagrama de árvores, temos 16 possibilidades.
Alternativa c.
- A: 62 voltas em $(x - 26)$ segundos
B: 62 voltas em x segundos
Boxe: A $\rightarrow 15$ s
B $\rightarrow 10$ s
A: 62 voltas em $(x - 26 - 15)$ s
62 voltas em $(x - 41)$ s
B: 62 voltas em $(x - 10)$ s
A estava 31 s à frente de B, ou seja, ganhou $\frac{31 \text{ s}}{62 \text{ voltas}} = \frac{1}{2}$ s por volta.
- A sequência em cada linha é formada nas duas primeiras posições por "pintar de preto o complementar de uma figura em relação à outra" e na terceira posição "pintar de preto a interseção das duas figuras". A alternativa b tem pintada de preto a interseção do pentágono com o círculo.
Alternativa b.

Foco na tecnologia – Calculadora (p. 116)

1. a)



$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{d}{AO} \Rightarrow AO = \frac{d}{\operatorname{tg} 60^\circ}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{d}{OB} \Rightarrow OB = \frac{d}{\operatorname{tg} 45^\circ}$$

$$AO + OB = AB = 1200$$

$$\frac{d}{\operatorname{tg} 60^\circ} + \frac{d}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 1200$$

$$\frac{d}{\sqrt{3}} + \frac{d}{1} = 1200$$

$$\frac{d + \sqrt{3}d}{\sqrt{3}} = 1200$$

$$d = \frac{1200\sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})} \Rightarrow d \approx 760,8 \text{ m}$$

O navio está a aproximadamente 760,8 m da praia.

2. a) Sendo x o consumo total ($x > 50$), a tarifa será dada por:

$$T = 10 \cdot 1,52 + 10 \cdot 2,37 + 30 \cdot 5,92 + (x - 50) \cdot 6,52$$

$$T = 15,20 + 23,70 + 177,60 + 6,52x - 326,00$$

$$T = 6,52x - 109,50$$

b) Como $46 < 50$, só comparecem as primeiras três faixas de consumo:

$$T = 10 \cdot 1,52 + 10 \cdot 2,37 + 26 \cdot 5,92$$

$$T = 15,20 + 23,70 + 153,92$$

$$T = 192,82$$

$$\text{Valor médio: } \frac{192,82}{46} \Rightarrow \text{Valor médio} \approx \text{R\$ } 4,19$$

c) A tarifa paga é menor que R\$ 38,90. Assim, o consumo está na segunda faixa.

$$T = 10 \cdot 1,52 + (x - 10) \cdot 2,37 = 24,68$$

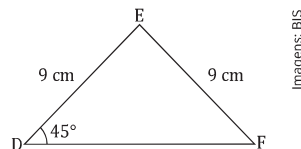
$$15,20 + 2,37x - 23,70 = 24,68$$

$$x = \frac{33,18}{2,37} = 14$$

O consumo foi de 14 m³.

Aprender a aprender (p. 116)

1. b)



c) As medidas dos lados congruentes do triângulo isósceles DEF; a informação de que ele é isósceles e a medida de um dos ângulos: $m(\hat{D}) = 45^\circ$.

d) Resposta pessoal.

e) Resolução 1 – Teorema de Pitágoras:

Se o triângulo é isósceles, ele tem os ângulos das bases iguais, então dois dos ângulos medem 45° e o outro 90° . Sendo DEF um triângulo retângulo em E, pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$[m(DF)]^2 = 9^2 + 9^2 = 162$$

$$m(DF) = \sqrt{162} \text{ cm} = 9\sqrt{2} \text{ cm}$$

Resolução 2 – Teorema dos Senos:

$$m(\hat{D}) + m(\hat{F}) + m(\hat{E}) = 180^\circ$$

$$45^\circ + 45^\circ + m(\hat{E}) = 180^\circ$$

$$m(\hat{E}) = 90^\circ$$

Pela lei dos senos:

$$\frac{m(\overline{FE})}{\sin \hat{D}} = \frac{m(\overline{DE})}{\sin \hat{F}} = \frac{m(\overline{DF})}{\sin \hat{E}}$$

$$\frac{9}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{9}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{m(\overline{DF})}{1}$$

Logo, $m(\overline{DF}) = 9\sqrt{2}$ cm

2. a) $\hat{A} = 30^\circ$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\sin 15^\circ} \Rightarrow a \approx 2,56$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow b = 5$$

b) $\hat{C} = 68^\circ$

$$\frac{b}{\sin 40^\circ} = \frac{b}{\sin 72^\circ} \Rightarrow b \approx 6,74$$

$$\frac{c}{\sin 68^\circ} = \frac{10}{\sin 72^\circ} \Rightarrow c \approx 9,79$$

c) $\frac{80}{\sin 50^\circ} = \frac{100}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \sin \hat{A} = 0,96 \Rightarrow \hat{A} \approx 74^\circ$

$$74^\circ + 50^\circ + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{C} \approx 56^\circ$$

$$\frac{c}{\sin 56^\circ} = \frac{80}{\sin 50^\circ} \Rightarrow c \approx 86$$

d) $\hat{C} = 50^\circ$

$$\frac{6}{\sin 50^\circ} = \frac{a}{\sin 100^\circ} \Rightarrow a \approx 7,64$$

3. $\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{16}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow x = \frac{16\sqrt{6}}{3} \approx 13,06$ m

4. a) $\frac{12}{\sin \alpha} = \frac{8}{\sin 20^\circ} \Rightarrow \sin \alpha = 0,5130 \Rightarrow \alpha \approx 31^\circ$

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos percebam e expliquem que:

• Se $\alpha \approx 31^\circ$ e um dos ângulos é 20° , β vale aproximadamente 129° e, portanto, como um dos ângulos é obtuso, o triângulo é obtusângulo. O problema tem excesso de dados porque a medida x e a medida do ângulo β não precisam ser calculadas, embora os dados apareçam no problema.

5. Calculamos a medida do lado \overline{ML} fazendo:

$$\frac{\overline{ML}}{\sin 30^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} \Rightarrow \overline{ML} = 8$$

Para calcularmos a medida de \overline{JL} temos:

$$\frac{\overline{JL}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{LN}}{\sin 90^\circ} = \frac{\overline{NJ}}{\sin 60^\circ}$$

Como o triângulo NLM tem dois ângulos de 30° , podemos concluir que ele é isósceles.

Logo, temos que $m(\overline{NL}) = m(\overline{LM}) = 8$

Então:

$$\frac{\overline{JL}}{\sin 30^\circ} = \frac{8}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \frac{\overline{JL}}{\frac{1}{2}} = 8 \Rightarrow \overline{JL} = 4$$

6. $\frac{100}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 35^\circ} \Rightarrow b \approx 66,23$ m

$$\frac{100}{\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sin 85^\circ} \Rightarrow a \approx 115$$
 m

A sede da fazenda fica localizada a 115 m do transformador e a estufa a 66,23 m do transformador.

7. $\hat{B} = 135^\circ$

$$\hat{A} = 45^\circ - \gamma$$

$$\frac{p}{\sin \gamma} = \frac{BD}{\sin (45^\circ - \gamma)}$$

$$BD = \frac{p \cdot (\sin 45^\circ \cdot \cos \gamma - \sin \gamma \cdot \cos 45^\circ)}{\sin \gamma}$$

$$BD = \frac{p \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \gamma - \sin \gamma \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\sin \gamma}$$

$$BD = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot p \cdot (\cos \gamma - \sin \gamma)}{\sin \gamma}$$

8. $\alpha = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$

Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{\sin 45^\circ}$$

$$AC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC = 4\sqrt{6}$$

Alternativa b.

9. $A_{\Delta} = \frac{4,5 \cdot 7 \cdot \sin 70^\circ}{2}$

$$A_{\Delta} = 14,8 \text{ cm}^2$$

10. $15 = \frac{4 \cdot 8 \cdot \sin \alpha}{2}$

$$\sin \alpha = 0,9375$$

Pela tabela trigonométrica $\rightarrow \alpha \approx 70^\circ$

11. $A_{\Delta BCD} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ}{2} \Rightarrow A_{\Delta BCD} = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$$A_{\Delta FCE} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ}{2} \Rightarrow A_{\Delta FCE} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{EFGD}} = A_{\Delta BCD} - A_{\Delta FCE}$$

$$A_{\text{EFGD}} = 6\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

12. a) $A_{\Delta} = \frac{6 \cdot x \cdot \sin 30^\circ}{2} \Rightarrow A_{\Delta} = 1,5x \text{ cm}^2$

b) $\frac{6}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow x \approx 4,4$ cm

13. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$

$$c^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$c = 14$$

$$\frac{14}{\sin 60^\circ} = \frac{16}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \sin \hat{A} = 0,9897$$

$$\hat{A} \approx 82^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{B} = 38^\circ$$

14. a) $9^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \hat{C}$

$$\cos \hat{C} = -\frac{1}{3}$$

$$\hat{C} \approx 110^\circ$$

$$5^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = 0,8518$$

$$\hat{A} = 32^\circ$$

$$\hat{B} + \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{B} = 38^\circ$$

b) $a^2 = 15^2 + 9^2 - 2 \cdot 15 \cdot 9 \cdot \cos 40^\circ$

$$a \approx 10$$

$$\frac{10}{\sin 40^\circ} = \frac{9}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \sin \hat{B} = 35^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{C} = 105^\circ$$

c) $10^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos \hat{C}$

$$\cos \hat{C} \approx 0,3125$$

$$\hat{C} \approx 108^\circ$$

$$\frac{10}{\sin 108^\circ} = \frac{8}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \hat{B} = 50^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{A} = 22^\circ$$

d) $c^2 = (7,5)^2 + 5,5^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 5,5 \cdot \cos 40^\circ$

$$c \approx 4,8$$

$$\frac{4,8}{\sin 40^\circ} = \frac{5,5}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \hat{A} \approx 48^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\hat{B} = 92^\circ$$

15. $\frac{9}{\sin 25^\circ} = \frac{21}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \hat{A} = 80^\circ$

$$\frac{d}{\sin 75^\circ} = \frac{9}{\sin 25^\circ} \Rightarrow d = 20,5$$
 m

$$D^2 = 21^2 + 9^2 - 2 \cdot 21 \cdot 9 \cdot \cos 105^\circ$$

$$D^2 = 619,83$$

$$D \approx 25$$
 m

As diagonais medem 20,5 m e 25 m.

16. $x^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ$
 $x = 2\sqrt{7} \text{ m}$

17. Utilizando a lei dos cossenos no triângulo BMN:

$$\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \beta \Rightarrow$$

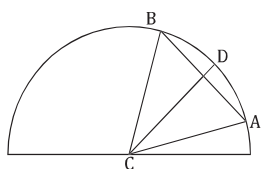
$$\Rightarrow \cos \beta = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4} \quad (\alpha + \beta = 180^\circ)$$

Ao se aplicar novamente o teorema dos cossenos, obtemos:

$$(DM)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \cos \alpha \Rightarrow DM = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Alternativa b.

18.



BIS

$$(AD)^2 = R^2 + R^2 - 2RR \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(AD)^2 = 2R^2 - R^2\sqrt{3} = R^2(2 - \sqrt{3})$$

$$(AD)^2 = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

Alternativa a.

19. No $\triangle TDF$, sendo α a medida do ângulo $D\hat{T}F$, temos:

$$\alpha + 115^\circ + 20^\circ = 180^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\frac{TD}{\sin 20^\circ} = \frac{50}{\sin 45^\circ}$$

$$TD = \frac{50}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 20^\circ$$

No $\triangle TDF$, sendo $TH = h$, temos:

$$\sin 45^\circ = \frac{h}{TD} \Rightarrow TD = \frac{h}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{h}{\sin 45^\circ} = \frac{50}{\sin 45^\circ} \cdot \sin 20^\circ$$

$$h = 50 \cdot \sin 20^\circ$$

CAPÍTULO 6

Fazer e aprender (p. 125)

1. Traçando a circunferência de centro em **O** (central) e raio 5. Os pontos que pertencem a essa circunferência ou ao seu interior e representam postos em que policiais podem se comunicar diretamente com a central.

- Os pontos da circunferência de centro em **O** e raio 5.
- Os pontos do círculo de centro em **O** e raio 5.

2. a) $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$
b) $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$
c) $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + (y - 6)^2 = 1,44$
d) $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 100$
e) $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 20$

$$f) (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2 \Rightarrow \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

3. a) $C(5, 2), r = 4$
b) $C(-4, -3), r = \sqrt{17}$
c) $C(0, -5), r = 3$
d) $C(5, 0), r = 2\sqrt{2}$
e) $C(0, 0), r = \sqrt{37}$
f) $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right), r = \frac{5}{13}$

4. L: $x^2 + (y - 6)^2 = 64$

$$a) y = 0 \Rightarrow x^2 + 36 = 64 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{7}$$

$$(2\sqrt{7}, 0) \text{ e } (-2\sqrt{7}, 0)$$

$$b) x = 0 \Rightarrow (y - 6)^2 = 64$$

$$(y - 6)^2 = \pm 8$$

$$y = 14 \text{ ou } y = -2$$

$$(0, -2) \text{ e } (0, 14)$$

$$c) y = 4 \Rightarrow x^2 + 4 = 64 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{15}$$

$$(2\sqrt{15}, 4) \text{ e } (-2\sqrt{15}, 4)$$

$$d) x = -4\sqrt{3} \Rightarrow 48 + (y - 6)^2 = 64$$

$$(y - 6)^2 = 16$$

$$y - 6 = \pm 4$$

$$y = 10 \text{ ou } y = 2$$

$$(-4\sqrt{3}, 10) \text{ e } (-4\sqrt{3}, 2)$$

$$e) x = 9 \Rightarrow 81 + (y - 6)^2 = 64$$

$$(y - 6)^2 = -17$$

$$\cancel{y} \in \mathbb{R}$$

Não há pontos de abscissa 9 em L.

$$f) x = y \Rightarrow x^2 + (x - 6)^2 = 64$$

$$2x^2 - 12x - 28 = 0$$

$$x^2 - 6x - 14 = 0$$

$$\Delta = 36 + 56 = 92$$

$$x = 3 \pm \sqrt{23}$$

$$(3 + \sqrt{23}, 3 + \sqrt{23}) \text{ e } (3 - \sqrt{23}, 3 - \sqrt{23})$$

$$g) x = -y \Rightarrow x^2 + (-x - 6)^2 = 64$$

$$2x^2 + 12x - 28 = 0$$

$$x^2 + 6x - 14 = 0$$

$$\Delta = 36 + 56 = 92$$

$$x = -3 \pm \sqrt{23}$$

$$(-3 + \sqrt{23}, 3 - \sqrt{23}) \text{ e } (-3 - \sqrt{23}, 3 + \sqrt{23})$$

$$5. a) C(0, 0), r = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

$$b) C(5, 0), r = 5 \Rightarrow (x - 5)^2 + y^2 = 25$$

$$c) C(5, 5), r = 5 \Rightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$$

$$d) C(-5, 0), r = 5 \Rightarrow (x + 5)^2 + y^2 = 25$$

$$e) C(-5, -5), r = 5 \Rightarrow (x + 5)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

6. Como a reta é a bissetriz do quadrante ímpar, a região hachurada é $\frac{1}{8}$ da circunferência. Dada a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 4$, $C(0, 0)$; $r = 2$.

$$\text{área} = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{1}{8} \cdot \pi \cdot 4 = \frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{A área é } \frac{\pi}{2}.$$

7. Raízes da parábola: $x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = 4$

Vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\text{Assim: } V(3, -1) \text{ e raio } \sqrt{2}$$

Então, a equação da circunferência é

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2.$$

Alternativa b.

8. a) $P(2, y_p) \Rightarrow x^2 + y^2 = 7$

$$2^2 + y_p^2 = 7 \Rightarrow y_p = \sqrt{3}$$

$$b) \text{ M é simétrico a P em relação ao eixo Oy; então: } M(-2, \sqrt{3})$$

$$\text{N é simétrico a M em relação ao eixo Ox; então: } N(-2, -\sqrt{3})$$

$$\text{Q é simétrico a P em relação ao eixo Ox; então: } Q(2, -\sqrt{3})$$

$$\text{As coordenadas são: } (-2, \sqrt{3}), (-2, -\sqrt{3}), (2, \sqrt{3}).$$

$$c) d_{MN} = \sqrt{(-2 + 2)^2 + (\sqrt{3} + \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$d_{MP} = \sqrt{(2 + 2)^2 + (\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 4$$

As medidas são $2\sqrt{3}$ e 4.

$$d) A_{\square} - A_{\square} = \pi r^2 - b \cdot h = 7\pi - 8\sqrt{3}$$

$$e) \text{ Diagonal} = \text{diâmetro} = 2 \cdot r$$

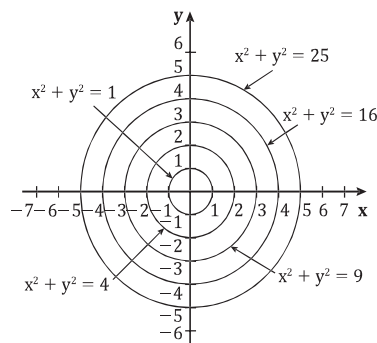
$$\text{Diagonal} = 2\sqrt{7}$$

9. Não, pois a cada x correspondem dois valores de y , ou seja, duas imagens.

10. a) Sim, pois para cada valor de x corresponde um único valor de y .

$$b) D = [-2, 2]$$

11.



$$12. a) A_T = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

$$A_1 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi$$

$$A_2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$$

$$A_3 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

$$A_4 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$$

$$A_5 = \pi \cdot 1^2 = 1\pi$$

$$A_T = 25\pi - 16\pi + 9\pi - 4\pi + 1\pi = 15\pi$$

$$b) C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$C_1 \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \Rightarrow C_1 \approx 31,40$$

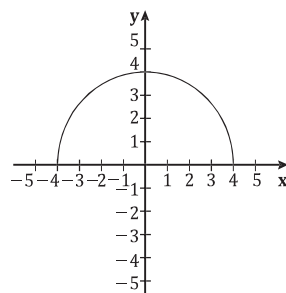
$$C_2 \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 4 \Rightarrow C_2 \approx 25,12$$

$$C_3 \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \Rightarrow C_3 \approx 18,84$$

$$C_4 \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 2 \Rightarrow C_4 \approx 12,56$$

$$C_5 \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 1 \Rightarrow C_5 \approx 6,28$$

13.



$$D = [-4, 4]$$

$$\text{Im} = [0, 4]$$

$$14. OA = 6$$

$$OC = 2$$

Raio da circunferência menor:

$$r = \frac{OC}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como $OA = 6$ e $r = 1$, determinamos as coordenadas do centro da circunferência:

$$x = 6 - 1 = 5$$

$$y = 1$$

Assim, a equação da circunferência menor é:

$$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Seja P o centro da circunferência maior:

$$d_{PO} = d_{PC}$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 2)^2}$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + (y - 2)^2$$

$$y^2 = x^2 - 4y + 4$$

$$4y = 4$$

$$y = 1$$

$\triangle POA$ é isósceles, portanto $x_P = 3$.

$$P(3, 1)$$

Raio da circunferência maior:

$$R = d_{PO} = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10}$$

Assim, a equação da circunferência maior é:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 10$$

$$15. a) r = d_{CA} = \sqrt{(-3 - 5)^2 + (2 + 1)^2} = \sqrt{73}$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 73$$

b) O centro da circunferência é o ponto médio de \overline{AB} :

$$x_c = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

$$y_c = \frac{4 + 3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$r = \frac{d_{AB}}{2} = \frac{\sqrt{(-3 + 1)^2 + (3 - 4)^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(x + 2)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

$$16. L: (x - 4)^2 + y^2 = 24$$

$$a) A(k, -2) \in L \Rightarrow (k - 4)^2 + (-2)^2 = 24$$

$$(k - 4)^2 = 20$$

$$k - 4 = \pm 2\sqrt{5}$$

$$k = 4 + 2\sqrt{5} \text{ ou } k = 4 - 2\sqrt{5}$$

$$b) B(1, n) \in L \Rightarrow (1 - 4)^2 + n^2 = 24$$

$$n^2 = 15$$

$$n = \pm\sqrt{15}$$

$$n = \sqrt{15} \text{ ou } n = -\sqrt{15}$$

$$c) D(m, 2\sqrt{2}) \notin L \Rightarrow (m - 4)^2 + (2\sqrt{2})^2 \neq 24$$

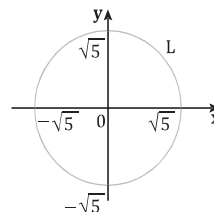
$$(m - 4)^2 \neq 16$$

$$m - 4 \neq \pm 4$$

$$m \neq 8 \text{ e } m \neq 0$$

Fazer e aprender (p. 128)

17. a)



Imagens: B/S

$$b) x^2 + y^2 = 5$$

$$B(-1, -2) \Rightarrow (-1)^2 + (-2)^2 = 5 \rightarrow \text{pertence}$$

$$C(2,5; 2,5) \Rightarrow (2,5)^2 + (2,5)^2 > 5 \rightarrow \text{exterior}$$

$$D(0; 2,5) \Rightarrow (0)^2 + (2,5)^2 > 5 \rightarrow \text{exterior}$$

$$E(-1,5; 1,5) \Rightarrow (-1,5)^2 + (1,5)^2 < 5 \rightarrow \text{interior}$$

$A \in L$; $B \in L$, C e D são exteriores a L ; e E é interior a L .

c) Resposta pessoal. Os estudantes podem indicar pontos diferentes, já que há mais de uma resposta possível.

18. (Professor: esta atividade pode ser resolvida de outras maneiras. Incentive os estudantes a encontrar ao menos duas formas de resolução.)

$$a) L: x^2 + y^2 + 4x - 8y - 16 = 0$$

$$A(3, 3) \Rightarrow 3^2 + 3^2 + 4 \cdot 3 - 8 \cdot 3 - 16 < 0 \rightarrow \text{interior a } L$$

$$B(1, -5) \Rightarrow 1^2 + (-5)^2 + 4 \cdot 1 - 8 \cdot (-5) - 16 > 0 \rightarrow \text{exterior a } L$$

$$C(-2, 10) \Rightarrow (-2)^2 + 10^2 + 4 \cdot (-2) - 8 \cdot 10 - 16 = 0 \rightarrow \text{pertence a } L$$

A é interior a L , B é exterior a L e C está na circunferência L .

$$b) L: x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$$

$$A(7, -3) \Rightarrow 7^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 7 - 16 = 0 \rightarrow \text{pertence a } L$$

$$B(3, -2) \Rightarrow 3^2 + (-2)^2 - 6 \cdot 3 - 16 < 0 \rightarrow \text{interior a } L$$

$$C(-10, 1) \Rightarrow (-10)^2 + 1^2 - 6 \cdot (-10) - 16 > 0 \rightarrow \text{exterior a } L$$

A está na circunferência L , B é interior a L e C é exterior a L .

$$19. a) L: x^2 + y^2 - 2x - 4y - 21 = 0$$

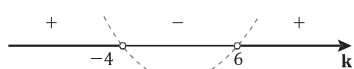
$$P(k, 3) \text{ é exterior a } L.$$

$$k^2 + 9 - 2k - 12 - 21 > 0$$

$$k^2 - 2k - 24 > 0$$

$$\Delta = 4 + 96 = 100$$

$$k = \frac{2 \pm 10}{2} \begin{cases} k = 6 \\ k = -4 \end{cases}$$



$$k < -4 \text{ ou } k > 6$$

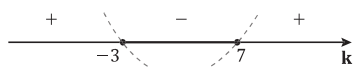
b) $Q(0, k)$ pertence ao círculo.

$$0^2 + k^2 - 0 - 4k - 21 \leq 0$$

$$k^2 - 4k - 21 \leq 0$$

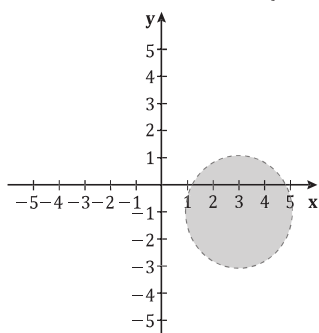
$$\Delta = 16 + 84 = 100$$

$$k = \frac{4 \pm 10}{2} \begin{cases} k = 7 \\ k = -3 \end{cases}$$

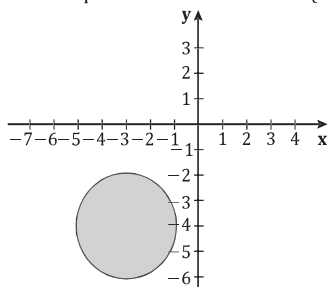


$$-3 \leq k \leq 7$$

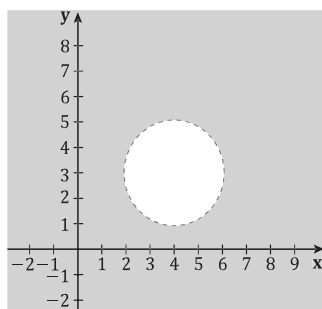
20. a) Pontos internos à circunferência de centro $(3, -1)$ e raio 2.



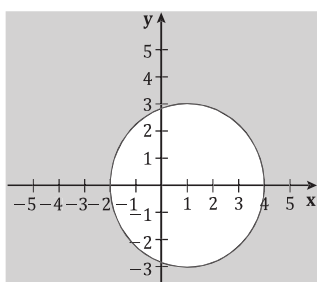
b) Pontos internos e pontos do círculo de centro $(-3, -4)$ e raio 2.



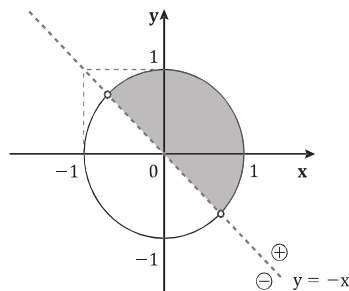
c) Pontos exteriores à circunferência de centro $(4, 3)$ e raio 2.



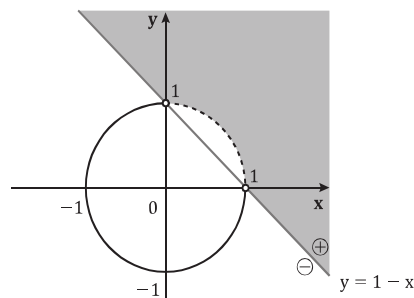
d) Pontos exteriores à circunferência de centro $(1, 0)$ e raio 3.



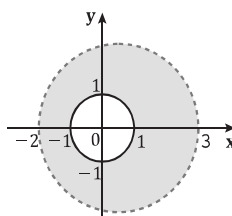
21. a)



b)



c)



Imagens: BLS

22. a) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

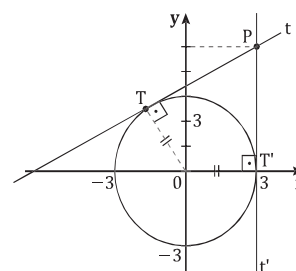
$$P(3, \sqrt{3})$$

$$3^2 + (\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 3 = 9 + 3 - 12 = 0$$

P pertence à circunferência.

b) $x^2 + y^2 = 9$

$$P(3, 5)$$



$$t': x = 3$$

$$t: y - 5 = m(x - 3)$$

$$mx - y - 3m + 5 = 0$$

$$d_{Ot'} = 3 = d_{Ot}$$

$$d_{Ot} = \frac{|m \cdot 0 - 0 - 3m + 5|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|-3m + 5|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{-3m + 5}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \\ \frac{-3m + 5}{\sqrt{m^2 + 1}} = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9m^2 - 30m + 25 = 9m^2 + 9 \Rightarrow -30m = -16 \Rightarrow m = \frac{8}{15}$$

Assim, as retas procuradas têm equação

$$t: y - 5 = \frac{8}{15}(x - 3) \text{ ou } t': x = 3.$$

23. Equação da circunferência: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25$
 Corte no eixo y : $(0 - 3)^2 + (y - 1)^2 = 25 \Leftrightarrow y = 5$ ou $y = -3$.
 Como $P(0, a)$ pertence ao eixo y , devemos ter $5 < a$ ou $a < -3$. Assim, P é externo à circunferência.

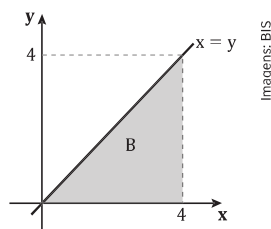
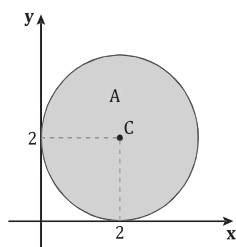
Alternativa d .

24. a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) = 4$$

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$C(2, 2); r = 2$$



Imagens: BIS

- b) Como o centro do círculo é o ponto médio do triângulo retângulo B e seu raio mede 2, a região $A \cap B$ é um semicírculo de raio 2. Logo, a sua área é igual a 2π .

25. $\begin{cases} x + y > 6 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$

Basta fazer a área do quarto de círculo de raio 6 menos a área do triângulo retângulo e isósceles de base e altura iguais a 6:

$$A = \frac{\pi 6^2}{4} - \frac{6 \cdot 6}{2} = 9\pi - 18 = 9(\pi - 2)$$

Alternativa c .

Fazer e aprender (p. 131)

26. $L: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$

$$C(3, -2), r = 5$$

$$d_{cp} = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 14|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4 < r$$

$\therefore L$ e p são secantes.

$$d_{cs} = \frac{|12 \cdot 3 - 5 \cdot (-2) + 19|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = 5 = r$$

$\therefore L$ e s são tangentes.

$$d_{cv} = \frac{|15 \cdot 3 + 8 \cdot (-2) + 73|}{\sqrt{15^2 + 8^2}} = 6 > r$$

$\therefore v$ é externa a L .

27. $L: x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ ou

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4^2$$

$$C(2, 0) \text{ e } r = 4$$

$$d_{cp} = \frac{|2 - 6|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 4 = r \therefore L \text{ e } p \text{ são tangentes.}$$

$$d_{cs} = \frac{|2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 4 = r \therefore L \text{ e } s \text{ são tangentes.}$$

$$d_{cv} = \frac{|0 - 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 4 = r \therefore L \text{ e } v \text{ são tangentes.}$$

$$d_{cw} = \frac{|0 + 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 4 = r \therefore L \text{ e } w \text{ são tangentes.}$$

28. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 - x \\ x^2 + (-2 - x)^2 - 4x - 12 = 0 \\ x^2 + 4 + 4x + x^2 - 4x - 12 = 0 \\ 2x^2 - 8 = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Para $x = 2$, temos $y = -4$.

Para $x = -2$, temos $y = 0$.

$(2, -4)$ e $(-2, 0)$.

$$b) \begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 12y + 25 = 0 \\ 2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x \end{cases}$$

$$x^2 + 4x^2 - 6x - 24x + 25 = 0$$

$$5x^2 - 30x + 25 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 20 = 16$$

$$x = \frac{6 \pm 4}{2}$$

Para $x = 5$, temos $y = 10$.

Para $x = 1$, temos $y = 2$.

$(1, 2)$ e $(5, 10)$.

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + y + 6 = 0 \Rightarrow y = -2x - 6 \end{cases}$$

$$x^2 + (-2x - 6)^2 = 4$$

$$x^2 + 4x^2 + 24x + 36 - 4 = 0$$

$$5x^2 + 24x + 32 = 0$$

$$\Delta = 576 - 640 < 0$$

Não há ponto de interseção, ou seja, L e s são disjuntas.

$$d) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \\ 3x + 4y + 12 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 3 \end{cases}$$

$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x - 3\right)^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{9}{2}x + 9 - 2x - 8 = 0$$

$$25x^2 + 40x + 16 = 0$$

$$\Delta = 1600 - 1600 = 0$$

$$x = \frac{-40 \pm 0}{50}$$

Para $x = -\frac{4}{5}$, temos $y = -\frac{12}{5}$.

$$\left(-\frac{4}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

29. $L: x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

$$(x - 5)^2 + y^2 = 9$$

$$C(5, 0), r = 3$$

$$s: y = mx \Rightarrow mx - y = 0$$

- a) Para ser tangente: $d_{cs} = r$

$$\frac{|5m - 0|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$|5m| = 3 \cdot \sqrt{m^2 + 1}$$

$$25m^2 = 9m^2 + 9$$

$$m = \frac{3}{4} \text{ ou } m = -\frac{3}{4}$$

- b) Para ser secante: $d_{cs} < r$

$$\frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} < 3$$

$$|5m| < 3 \cdot \sqrt{m^2 + 1}$$

$$25m^2 < 9m^2 + 9$$

$$16m^2 - 9 < 0$$

$$-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$$

- c) Para ser externa: $d_{cs} > r$

$$\frac{|5m|}{\sqrt{m^2 + 1}} > 3$$

$$|5m| > 3 \cdot \sqrt{m^2 + 1}$$

$$25m^2 > 9m^2 + 9$$

$$16m^2 - 9 > 0$$

$$m < -\frac{3}{4} \text{ ou } m > \frac{3}{4}$$

30. C(4, 12)

Os pontos onde **L** intersecta o eixo **x** possuem ordenada igual a zero ($y = 0$).

$$(x - 4)^2 + (0 - 12)^2 = 169$$

$$(x - 4)^2 = 25$$

$$x - 4 = 5 \quad \text{ou} \quad x - 4 = -5$$

$$x = 9 \quad \quad \quad x = -1$$

$$(4, 12); (9, 0); (-1, 0)$$

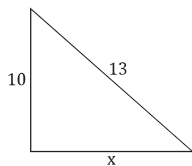
$$A_{\Delta} = \frac{|D|}{2}$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 12 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 108 = -120$$

$$A_{\Delta} = 60$$

31. C(2, 1), $r = 13$

$$d_{cs} = \frac{|5 \cdot 2 - 12 \cdot 1 + 132|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = 10$$

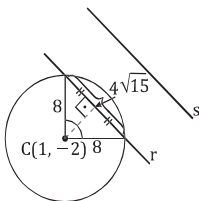


$$13^2 = 10^2 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{69}$$

$$\text{Corda} = 2x = 2\sqrt{69}$$

32. s: $3x - 4y = 0 \Rightarrow 4y = 3x \Rightarrow y = \frac{3x}{4}$

$$L: (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 64 \Rightarrow C(1, -2) \text{ e } r = 8$$



Imagens: BIS

$$d_{cr}^2 + (2\sqrt{15})^2 = 8^2, r // s$$

$$d_{cr}^2 = 64 - 60$$

$$d_{cr} = 2$$

$$r: y = \frac{3x}{4} + c \Rightarrow 3x - 4y + 4c = 0$$

$$d_{cr} = \frac{|3 \cdot 1 - 4(-2) + 4c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |11 + 4c| = 10 \begin{cases} 11 + 4c = 10 \Rightarrow c = \frac{-1}{4} \\ -11 - 4c = 10 \Rightarrow c = \frac{-21}{4} \end{cases}$$

Portanto, as equações procuradas são:

$$r: 3x - 4y - 1 = 0 \text{ ou } 3x - 4y - 21 = 0$$

33. Como a circunferência é tangente aos eixos, temos que o ponto (5, R) é o centro da circunferência.

O raio é a distância de (5, R) até (1, 2):

$$\sqrt{(5 - 1)^2 + (R - 2)^2} = R \Rightarrow 4R = 20 \Rightarrow R = 5$$

Alternativa c.

34. a) $m_r = \tan 135^\circ = -1$ e **r** passa pelo ponto A(-1, 2) \Rightarrow

$$\Rightarrow y - 2 = -1(x - (-1))$$

$$y = -x + 1$$

b) O coeficiente angular de **s** é 1, pois $m_r \cdot m_s = -1$ e ela passa pelo ponto B(3, 4) $\Rightarrow y - 4 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x + 1$

$$\mathbf{P} \text{ é a solução do sistema: } \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

Assim, temos P(0, 1).

c) O raio é dado pela distância do ponto C(2, 1) à reta (**s**) $x - y + 1 = 0$

$$R = \frac{|2 - 1 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Assim, a equação da circunferência será:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

Fazer e aprender (p. 133)

35. $L_1: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0 \Rightarrow C_1(1, 2), r_1 = 2$

$$L_2: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 11 = 0 \Rightarrow C_2(4, -2), r_2 = 3$$

$$L_3: x^2 + y^2 - 8x + 4y - 29 = 0 \Rightarrow C_3(4, -2), r_3 = 7$$

$$L_4: x^2 + y^2 - 8x + 4y + 19 = 0 \Rightarrow C_4(4, -2), r_4 = 1$$

$$L_5: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 16 \Rightarrow C_5(4, -2), r_5 = 4$$

$$L_6: x^2 + y^2 - 8x + 4y - 44 = 0 \Rightarrow C_6(4, -2), r_6 = 8$$

$$L_7: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 169 \Rightarrow C_7(1, 2), r_7 = 13$$

$$L_2 \text{ e } L_1: d_{C_1C_2} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = 5 = r_1 + r_2$$

L_1 e L_2 são tangentes externas.

$$L_3 \text{ e } L_1: d_{C_1C_3} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = 5 = |r_1 - r_3|$$

L_1 e L_3 são tangentes internas.

$$L_4 \text{ e } L_1: d_{C_1C_4} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = 5 > r_1 + r_4$$

L_1 e L_4 são disjuntas.

$$L_5 \text{ e } L_1: d_{C_1C_5} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |r_1 - r_5| < 5 < r_1 + r_5$$

L_1 e L_5 são secantes.

$$L_6 \text{ e } L_1: d_{C_1C_6} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-2 - 2)^2} = 5 < |r_1 - r_6|$$

L_1 e L_6 são disjuntas.

L_1 e L_7 são concêntricas.

36. a) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y - 15 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y + 11 = 0 \end{cases} \ominus$

$$10x - 6y - 26 = 0$$

$$x = \frac{6y + 26}{10} = \frac{3y + 13}{5}$$

$$\left(\frac{3y + 13}{5}\right)^2 + y^2 + 6 \cdot \left(\frac{3y + 13}{5}\right) + 2y - 15 = 0$$

$$17y^2 + 109y + 92 = 0$$

Para $y = -1$, temos $x = 2$.

Para $y = -\frac{92}{17}$, temos $x = -\frac{11}{17}$.

$$(2, -1) \text{ e } \left(-\frac{11}{17}, -\frac{92}{17}\right).$$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0 \end{cases} \ominus$

$$8x - 14y + 12 = 0$$

$$x = \frac{14y - 12}{8} = \frac{7y - 6}{4}$$

$$\left(\frac{7y - 6}{4}\right)^2 + y^2 + 2 \cdot \left(\frac{7y - 6}{4}\right) - 2y - 23 = 0$$

$$13y^2 - 12y - 76 = 0$$

Para $y = -2$, temos $x = -5$.

Para $y = \frac{38}{13}$, temos $x = \frac{47}{13}$.

$$(-5, -2) \text{ e } \left(\frac{47}{13}, \frac{38}{13}\right).$$

37. $L_1: x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \Rightarrow C_1(3, -2), r_1 = 3$

A circunferência **L**, de centro C(-2, 10) e raio r , tem equação:

$$(x + 2)^2 + (y - 10)^2 = r^2$$

L_1 e **L** devem ser tangentes. Então:

$$|r - r_1| = d_{CC_1}$$

$$|r - 3| = \sqrt{(3 + 2)^2 + (-2 - 10)^2} \Rightarrow |r - 3| = 13$$

Temos: $r = 16$ ou $r = -10$ (não convém)

Logo, **L** tem equação:

$$(x + 2)^2 + (y - 10)^2 = 256$$

ou

$$r + r_1 = d_{cc_1} \Rightarrow r + 3 = 13 \Rightarrow r = 10$$

Logo, **L** tem equação:

$$(x + 2)^2 + (y - 10)^2 = 100$$

38. A(1, -1)

$$L_1: x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$$

$$L_2: x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 12y - 35 = 0 \end{cases} \quad \ominus$$

$$8x - 14y + 12 = 0$$

$$y = \frac{8x + 12}{14} = \frac{4x + 6}{7}$$

$$x^2 + \left(\frac{4x + 6}{7}\right)^2 + 2x - 2\left(\frac{4x + 6}{7}\right) - 23 = 0$$

$$65x^2 + 90x - 1175 = 0$$

Para $x = -5$, temos $y = -2$.

$$\text{Para } x = \frac{47}{13}, \text{ temos } y = \frac{38}{13}.$$

$$A(1, -1); B\left(\frac{47}{13}, \frac{38}{13}\right); C(-5, -2).$$

$$\overline{AB} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{47}{13} & \frac{38}{13} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$51x - 34y - 85 = 0$$

$$m_{\overline{AB}} = \frac{51}{34}$$

$$m_{\text{mediatriz de } \overline{AB}} = -\frac{34}{51}$$

$$M\left(\frac{60}{26}, \frac{25}{26}\right) \rightarrow \text{ponto médio de } \overline{AB}$$

$$\text{Mediatriz de } \overline{AB}: y - \frac{25}{26} = -\frac{34}{51}\left(x - \frac{60}{26}\right)$$

$$\overline{BC} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{47}{13} & \frac{38}{13} & 1 \\ -5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - 7y + 6 = 0$$

$$m_{\overline{BC}} = \frac{4}{7}$$

$$m_{\text{mediatriz de } \overline{BC}} = -\frac{7}{4}$$

$$N\left(-\frac{18}{26}, \frac{12}{26}\right) \rightarrow \text{ponto médio de } \overline{BC}$$

$$\text{Mediatriz de } \overline{BC}: y - \frac{12}{26} = -\frac{7}{4}\left(x + \frac{18}{26}\right)$$

Resolvendo o sistema com as equações das mediatrizes:

$$x = -3, y = \frac{9}{2} \rightarrow \text{centro da circunferência } C\left(-3, \frac{9}{2}\right)$$

$$r = d_{ca} = \sqrt{(-3 - 1)^2 + \left(\frac{9}{2} + 1\right)^2} = \frac{\sqrt{185}}{2}$$

A equação pedida é:

$$(x + 3)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{185}{4}$$

ou:

$$x^2 + y^2 + 6x - 9y - 17 = 0$$

$$39. a) \begin{cases} x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0 \\ x^2 + y^2 - 10x - 10y = 0 \end{cases} \quad \ominus$$

$$16x + 12y - 40 = 0$$

$$x = \frac{40y - 12y}{16} = \frac{10 - 3y}{4}$$

$$\left(\frac{10 - 3y}{4}\right)^2 + y^2 - 10\left(\frac{10 - 3y}{4}\right) - 10y = 0$$

$$y^2 - 10y - 39 = 0$$

$$\text{Para } y = 13, \text{ temos } x = -\frac{29}{4}.$$

$$\text{Para } y = -3, \text{ temos } x = \frac{19}{4}.$$

$$P_1\left(-\frac{29}{4}, 13\right) \text{ e } P_2\left(\frac{19}{4}, -3\right).$$

$$m = \frac{13 - (-3)}{-\frac{29}{4} - \frac{19}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$y + 3 = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{19}{4}\right) \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}$$

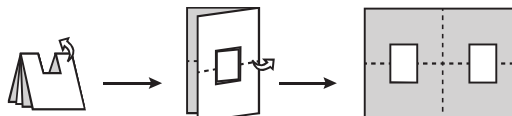
b) Determinando os pontos de interseção entre as circunferências através de um sistema e depois achando a equação determinada por esses pontos.

$$c) d_{P_1P_2} = \sqrt{\left(-\frac{29}{4} - \frac{19}{4}\right)^2 + (13 + 3)^2} = 20$$

O comprimento é 20.

Foco no raciocínio lógico (p. 135)

1. Observe a imagem:



Alternativa e.

$$2. a) V_{\text{cone}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \Rightarrow 60 = \frac{\pi \cdot (2)^2 \cdot h}{3} \Rightarrow h = \frac{45}{\pi} \text{ cm}$$

b) O tubo é formado pela parte cilíndrica e pela parte esférica.

$$V_{\text{tubo}} = \pi \cdot r^2 (h - r) + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi \cdot r^3}{3} \right)$$

$$V_{\text{tubo}} = \pi \cdot (1)^2 \left(\frac{45}{\pi} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi \cdot (1)^3}{3} \right)$$

$$V_{\text{tubo}} = 45 - \pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow V_{\text{tubo}} = \frac{135 - \pi}{3} \text{ mL}$$

3. Seja x o número de passageiros e y o número de voos:

A companhia **A** transporta semanalmente: $0,7 \cdot x \cdot y$ pessoas.

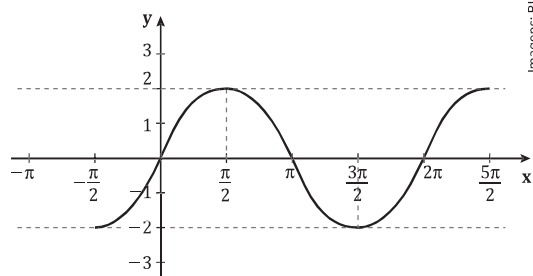
A companhia **B** possui o dobro da capacidade dos aviões da companhia **A**:

$$0,4 \cdot 2 \cdot x \cdot y = 0,8 \cdot x \cdot y$$

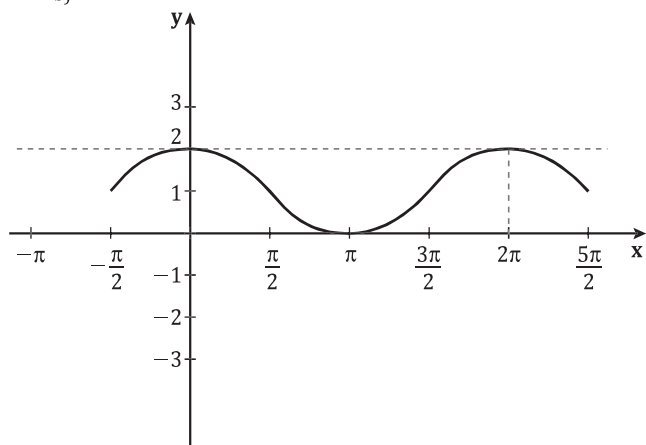
Assim, como $0,7 \cdot x \cdot y < 0,8 \cdot x \cdot y$, temos que o melhor argumento é o da alternativa **d**.

Aprender a aprender (p. 136)

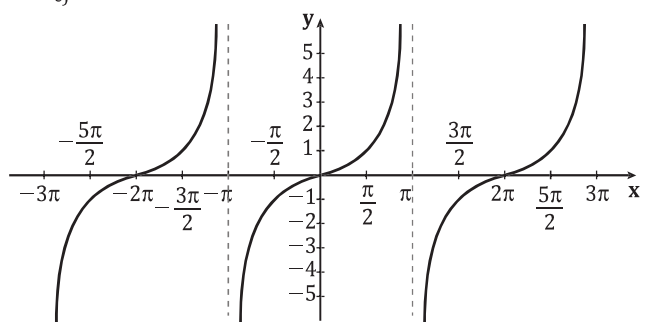
1. a)



b)



c)



Imagens: BIS

2. $\sin 75^\circ = \sin (30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ$

$$\sin 75^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos (30^\circ + 45^\circ)$$

$$\cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{6 + 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} + 2}{6 - 2} =$$

$$= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}$$

3. Para a situação descrita, temos:

$$\operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

Portanto,

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = -1$$

Cálculo rápido (p. 136)

1. a) $x^2 + x + \frac{1}{4}$

b) $y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}$

c) $9 + 6a + a^2$

d) $\frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} + 1$

e) $a^4 - 2a^2y + y^2$

f) $36 - 12y + y$

2. a) $x^2 + 6x + 9 - x^2 - 7x = -x + 9$

b) $4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 + 8 = x^2 - 4x + 9$

c) $y^2 + 4y + 4 - y^2 - 8y - 16 + 4y + 12 = 0$

d) $16z^2 - 24z + 9 - 24z - 9 = 16z^2 - 48z$

3. a) $x^2 + 16x + 64$

b) $x^2 - 16x + 64$

c) $x^2 - 64$

d) $4x^2 - 36x + 81$

e) $4x^2 + 36x + 81$

f) $4x^2 - 81$

g) $p^2 + 2pq + q^2$

h) $p^2 - 2pq + q^2$

i) $p^2 - q^2$

4. a) $4x - 6$

b) $3x^2 - 12x - 2x + 8 = 3x^2 - 14x + 8$

c) $2x + 2$

d) $6x + 2$

e) $4x - 4$

f) $5x^2 + 15x - x - 3 = 5x^2 + 14x - 3$

g) $2x$

h) 12

i) $x^2 - 36$

5. a) $4x - 6$

b) $3x^2 - 4x - 6x + 8 = 3x^2 - 10x + 8$

c) $x^2 - 4x + 4 + 3x - 4 = x^2 - x$

d) $x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 24x + 16 = 10x^2 - 28x + 20$

e) $-5a - 13b$

f) $6a^2 + 9ab - 24ab - 36b^2 = 6a^2 - 15ab - 36b^2$

g) $a^2 - 8ab + 16b^2 - 6a - 9b$

h) $a^2 - 6a - 8ab - 9b + 16b^2$

6. a) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

7. a) $\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

b) $\sqrt{44} = \sqrt{4 \cdot 11} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

c) $\sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$

d) $\sqrt{108} = 3\sqrt{12}$; certa, mas poderia ser $6\sqrt{3}$

e) $\sqrt{279} = \sqrt{9 \cdot 31} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{31} = 3\sqrt{31}$

f) $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$; certa

8. a) $C(3, 4), r = 5$

b) $C(-6, 1), r = 7$

c) $C(0, 0), r = \sqrt{3}$

d) $C\left(-\frac{1}{5}, 0\right), r = 1$

CAPÍTULO 7

Fazer e aprender (p. 145)

1. a) Focos da elipse $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$, temos:

$$d_{F_1F_2} = 2c = 3 - (-3) = 6 \Rightarrow c = 3$$

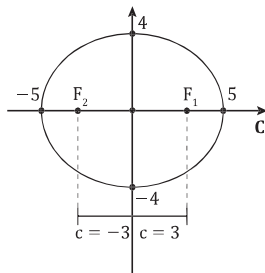
O eixo menor tem comprimento 8, logo, $\overline{B_1B_2} = 8 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$.

$\overline{A_1A_2}$ está sobre o eixo x , a equação da elipse será $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{Temos } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5$$

A elipse tem equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, substituindo os valores, temos:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



- b) Focos da elipse $F_1(8, 0)$ e $F_2(-8, 0)$, logo, temos:

$$d_{F_1F_2} = 2c = 8 - (-8) = 16 \Rightarrow c = 8$$

$\overline{A_1A_2}$ está sobre o eixo x , a equação da elipse será

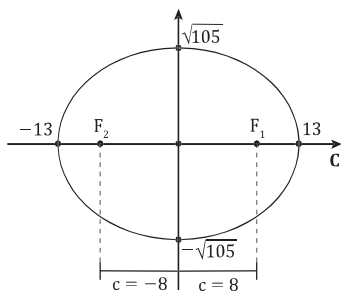
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

O eixo maior tem comprimento 26, logo, $\overline{A_1A_2} = 26 \Rightarrow 2a = 26 \Rightarrow a = 13$

$$\text{Temos } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 169 = b^2 + 64 \Rightarrow b^2 = 105 \Rightarrow b = \sqrt{105}$$

A elipse tem equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, substituindo os valores, temos:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{105} = 1$$



- c) Eixo maior da elipse de extremos $A_1(0, 5)$ e $A_2(0, -5)$, logo, temos:

$$d_{A_1A_2} = 2a = 5 - (-5) = 10 \Rightarrow a = 5$$

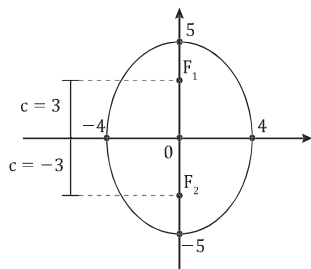
$\overline{A_1A_2}$ está sobre o eixo y , a equação da elipse será $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

O eixo de menor de comprimento 8, logo, $\overline{B_1B_2} = 8 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$$\text{Temos } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

a elipse tem equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, substituindo os valores, temos:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$



- d) Eixo menor da elipse de extremos $B_1(6, 0)$ e $B_2(-6, 0)$, logo, temos:

$$d_{B_1B_2} = 2b = 6 - (-6) = 12 \Rightarrow b = 6$$

$\overline{A_1A_2}$ está sobre o eixo y .

$$\text{A equação da elipse será } \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\text{excentricidade da elipse } 0,8, \text{ logo, } \frac{c}{a} = 0,8 \Rightarrow c = 0,8 \cdot a$$

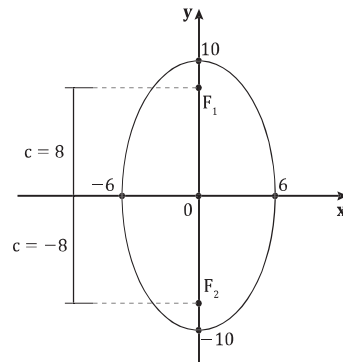
$$\text{Temos } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 36 + (0,8 \cdot a)^2 \Rightarrow a^2 - \frac{16}{25}a^2 = 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9}{25}a^2 = 36 \Rightarrow a^2 = \frac{36 \cdot 25}{9} \Rightarrow a = \frac{6 \cdot 5}{3} \Rightarrow a = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = 0,8 \cdot a \Rightarrow c = 8$$

A elipse tem equação $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, substituindo os valores, temos:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$



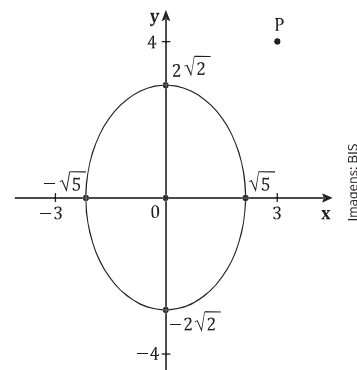
2. Não, o ponto $P(3, 4)$ é exterior à elipse, reduzindo a equação

$$8x^2 + 5y^2 = 40 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

Como $\overline{A_1A_2}$ está sobre o eixo y , obteremos as variáveis a e b pela equação

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

$$a^2 = 8, b^2 = 5 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}, b = \sqrt{5} \Rightarrow a \approx 2,82, b \approx 2,23$$



3. Eixo maior $2a$, eixo menor $2b$, $2a = 3 \cdot 2b \Rightarrow a = 3b$

$$\frac{x^2}{(3b)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(\sqrt{6})^2}{(3b)^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{6}{9b^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6+9}{9b^2} = 1 \Rightarrow 15 = 9b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{15}{9} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

Como $a = 3b \Rightarrow a = 3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{15}$ para $\overline{A_1A_2}$ sobre o eixo x .

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(3b)^2} = 1 \Rightarrow \frac{(\sqrt{6})^2}{b^2} + \frac{1^2}{(3b)^2} = 1 \Rightarrow \frac{6}{b^2} + \frac{1}{9b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{54+1}{9b^2} = 1 \Rightarrow 55 = 9b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{55}{9} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{55}}{3}$$

Como $a = 3b \Rightarrow a = 3 \cdot \frac{\sqrt{55}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{55}$ para $\overline{A_1A_2}$ sobre o eixo y .

Temos:

$$\frac{x^2}{(3b)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(3 \cdot \frac{\sqrt{15}}{3})^2} + \frac{y^2}{(\frac{\sqrt{15}}{3})^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{15} + \frac{9y^2}{15} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{15} + \frac{3y^2}{5} = 1$$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(3b)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{\sqrt{55}}{3})^2} + \frac{y^2}{(3 \cdot \frac{\sqrt{55}}{3})^2} = 1 \Rightarrow \frac{9x^2}{55} + \frac{y^2}{55} = 1$$

4. Focos da elipse $F_1(3, 0)$ e $F_2(-3, 0)$, logo, temos:

$$d_{F_1F_2} = 2c = 3 - (-3) = 6 \Rightarrow c = 3$$

$\overline{A_1A_2}$ está sobre o eixo x , logo, a equação da elipse será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + 9$$

A elipse passa pelo ponto $P\left(\frac{5}{2}, 2\sqrt{3}\right)$.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2}{a^2} + \frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4a^2} + \frac{12}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{25b^2 + 48(b^2 + 9)}{4(b^2 + 9)b^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25b^2 + 48b^2 + 432 = 4b^4 + 36b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 37b^2 + 432 = 4b^4 - 37b^2 - 432 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = b^2, 4d^2 - 37d - 432 = 0 \Rightarrow d^2 - \frac{37}{4}d - 108 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{-\left(-\frac{37}{4}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{37}{4}\right)^2 - 4 \cdot (-108)}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{\frac{37}{4} \pm \sqrt{\frac{1369 + 64 \cdot 108}{16}}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{\frac{37}{4} \pm \sqrt{\frac{8281}{16}}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = \frac{\frac{37}{4} \pm \frac{91}{4}}{2} \Rightarrow d = \frac{37 \pm 91}{8} \Rightarrow d = + \frac{128}{8}$$

$$\text{ou } d = -\frac{54}{8} \text{ (não convém, } d > 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a^2 = b^2 + 9 \Rightarrow a^2 = 16 + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{Assim, temos: } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

5. A distância entre dois postes equivale a $2a$. Temos:

$$\frac{c}{a} = 0,943 \Rightarrow c = 0,943a$$

$$a^2 = 5^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 25 + (0,943a)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 25 + 0,889a^2 \Rightarrow 0,111a^2 = 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{25}{0,111}} \Rightarrow a = \frac{5}{0,333...} = 15$$

A distância pedida é $2a = 2 \cdot 15 \text{ m} = 30 \text{ m}$.

Alternativa b .

6. Devemos ter:

$$\frac{x^2}{4} + (x + b)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + x^2 + 2xb + b^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 8xb + 4b^2 - 4 = 0$$

$$\Delta = -16b^2 + 80$$

Para que a reta seja tangente, $\Delta = 0$

$$-16b^2 + 80 = 0$$

$$b^2 = 5 \Rightarrow b = \pm \sqrt{5}$$

Assim, a soma será igual a 0.

Alternativa a .

Fazer e aprender (p. 149)

7. Porque a é o semieixo focal.

Se $a = 0$, temos uma reta.

Se $a = c$, temos uma parábola.

8. Quanto maior a excentricidade da hipérbole, mais "fechada" ela será, ou seja, seus ramos estarão mais próximos do eixo focal.

9. a) $2a = 8$ | $2b = 6$
 $a = 4$ | $b = 3$

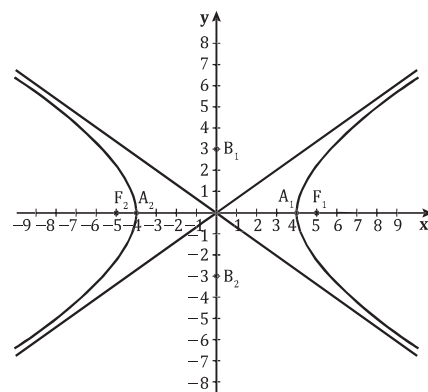
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$b) c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$$

$$c = \pm 5$$

$$F_1(5, 0) \text{ e } F_2(-5, 0)$$

c)



d) $y = mx$

$$s_1: y = -\frac{3}{4}x$$

$$s_2: y = \frac{3}{4}x$$

$$10. c = 2\sqrt{5}$$

Comprimento do eixo imaginário $= 4 \Rightarrow b = 2$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 4 = 20 \Rightarrow a = 4$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$11. \text{Excentricidade: } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$b = 1$$

$$c = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 1 = \frac{4 \cdot 3}{9}a^2$$

$$\frac{4}{3}a^2 - a^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{3}a^2 = 1 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

$$\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$$

12. a) $a = 1$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{1} \Rightarrow b = 1$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$$

$$c = \sqrt{2}$$

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{1} = 1$$

$$s_1: y = x$$

$$s_2: y = -x$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$$

$$F_1(\sqrt{2}, 0) \text{ e } F_2(-\sqrt{2}, 0)$$

$$b) s_1: y = \frac{4}{3}x$$

$$s_2: y = -\frac{4}{3}x$$

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

$$a = 4 \text{ e } b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$$

$$c = 5$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$e = \frac{c}{b} = \frac{5}{4}$$

$$c = 5$$

$$F_1(0, 5) \text{ e } F_2(0, -5)$$

$$c) s_1: y = \frac{2}{3}x$$

$$s_2: y = -\frac{2}{3}x$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$$

$$a = 2 \text{ e } b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 4 + 9 = 13$$

$$c = \sqrt{13}$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$$

$$F_1(0, \sqrt{13}) \text{ e } F_2(0, -\sqrt{13})$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$d) s_1: y = \frac{3}{4}x$$

$$s_2: y = -\frac{3}{4}x$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$a = 4$$

$$b = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 16 + 9 = 25$$

$$c = 5$$

$$-\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1$$

$$F_1(-5, 0) \text{ e } F_2(5, 0)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

$$13. e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{13}}{3}a$$

$$2b = d_{B_1B_2} = 4$$

$$b = 2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + 4 = \left(\frac{\sqrt{13}}{3}a\right)^2$$

$$a^2 + 4 = \frac{13}{9}a^2$$

$$\left(\frac{13-9}{9}\right)a^2 = 4 \Rightarrow a^2 \cdot \frac{4}{9} = 4 \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$x = \sqrt{13}y$$

$$\frac{3y^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\frac{12y^2 - 4y^2}{36} = 1 \Rightarrow y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{3}$$

$$y = 2\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 6 \Rightarrow P_1(6, 2\sqrt{3})$$

$$y = -2\sqrt{3} \Rightarrow x = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = -6 \Rightarrow P_2(-6, -2\sqrt{3})$$

$$14. 2a = 2b = 4$$

$$a = b = 4$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2} - \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \pm 4$$

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 16 + 2 \cdot 4\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} +$$

$$+ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 =$$

$$= 16 + 8\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$x + y = 4 + 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} - x - y$$

$$(2x + 2y - 4) = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

$$x + y - 2 = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

$$x^2 + 2yx - 4x - 4y + y^2 + 4 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$2yx = 4$$

$$yx = 2$$

$$y = \frac{2}{x}$$

Fazer e aprender (p. 153)

$$15. a) p = 5 - 1 = 4$$

$$x_0 + \frac{p}{2} = 5$$

$$x_0 = 3$$

$$(y-2)^2 = 2 \cdot 4(x-3)$$

$$(y-2)^2 = 8(x-3)$$

$$F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$$

$$b) p = |-5 - 1| = 6$$

$$x_0 + \frac{p}{2} = -5$$

$$x_0 = -2$$

$$y_0 = -1$$

$$(y-y_0)^2 = -2 \cdot p(x-x_0)$$

$$(y+1)^2 = -12(x+2)$$

$$c) x_0 = 1$$

$$y_0 + \frac{p}{2} = 3$$

$$y_0 + 1 = 3$$

$$y_0 = 2$$

$$p = 3 - 1 = 2$$

$$(x-x_0)^2 = 2 \cdot p(y-y_0)$$

$$(x-1)^2 = 4(y-2)$$

$$F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right)$$

$$d) x_0 = -2$$

$$y_0 - \frac{p}{2} = -5$$

$$y_0 - 2 = -5$$

$$y_0 = -3$$

$$p = |-5 + 1| = 4$$

$$(x-x_0)^2 = -2 \cdot p(y-y_0)$$

$$(x+2)^2 = -8(y+3)$$

$$F\left(x_0, y_0 - \frac{p}{2}\right)$$

$$16. a) V(0, 0)$$

$$y^2 = 2px$$

$$36 = 2 \cdot p \cdot 9$$

$$p = 2$$

$$y^2 = 4x$$

$$b) V(0, 0)$$

$$x^2 = 2py$$

$$1 = 2 \cdot p \cdot 1$$

$$p = \frac{1}{2}$$

$$x^2 = y$$

$$17. a) V(0, 0)$$

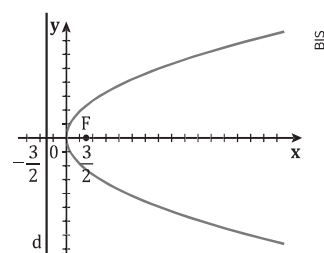
$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$$

$$2p = 6$$

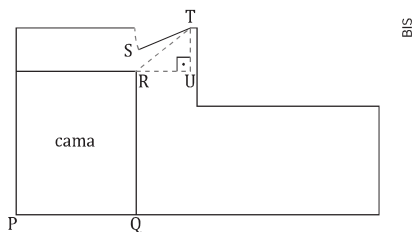
$$p = 3$$

$$F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$d: x = -\frac{3}{2}$$



- b) Considerando a figura do enunciado, com os vértices rotulados como na figura a seguir.



Temos $PQ = 1,6$ e $QR = 2,0$ (a figura do enunciado deixa claro que o menor lado da cama está na horizontal). Para decidir se a porta vai tocar ou não na cama, basta comparar o segmentos RT e ST . Para calcular RT , usamos o triângulo retângulo RUT representado na figura; temos $RU = 0,8$ e $UT = 0,6$, portanto $RT = \sqrt{0,8^2 + 0,6^2} = 1$.

Como $ST = 0,9$, vemos que a porta vai passar a 10 cm da cama.

Cálculo rápido (p. 154)

- $\frac{2x-1}{x-1} = 3 \Rightarrow (2x-1) = 3x-3 \Rightarrow x = 2$
 - $2^{x-1} = 2^4$
 $x-1 = 4 \Rightarrow x = 5$
 - $9^{x+3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$
 $(3^2)^{x+3} = (3^{-1})^{-2}$
 $2x+6 = 2 \Rightarrow x = -2$
 - $(x+4)x = 0$
 $x = 0$
 $x = -4$
 - $x^2 - 9 = 0$
 $x = \pm 3$
 - $5x^2 + 20 = 0$
 $x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$
Sem solução em \mathbb{R} .
- $f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$
 $f(x) = 0$
 $x = 0$
 $x = \pm 1$
Alternativas b, c e d .
- 0
 - 1
- $V = (12)^3 = 1\,728$
 - $V = (1,2)^3 = 1,728$
 - $V = (15)^3 = 3\,375$
 - $V = (1,5)^3 = 3,375$

Aprender a aprender (p. 154)

- Área da base: $A = 20 \cdot 10 - 4 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A = 198 \text{ cm}^2$.
Portanto, seu volume será:
 $V = 198 \cdot 10 \Rightarrow V = 1\,980 \text{ cm}^3$
 - Seja x o volume inicial do sorvete líquido.
Assim: $x + 0,2x = 1\,980 \Rightarrow x = 1\,650 \text{ cm}^3$
- Note que a altura do cilindro do meio corresponde ao triplo da altura do segundo cilindro. O problema diz que o cilindro do meio demora 30 minutos para encher, dessa forma podemos dividir a altura do cilindro do meio em três partes, e cada uma leva 10 minutos para encher. Então, o segundo cilindro levará:
 $h_2 = h_1/3$
 $h_2 = 30/3$
 $h_1 = 30$ minutos
 $h_2 = 10$ minutos
A fonte leva 40 minutos para encher.
Alternativa c .

3. Alternativa b , pois é a única que contém retângulos e trapézios nas faces laterais.

4. Seja N o ponto médio de uma das arestas laterais do tetraedro, M o ponto médio de uma aresta da base. Chame MN de d . Considerando o triângulo retângulo MNC , sendo C um vértice da base, temos (note que CN = altura do triângulo equilátero):

$$d^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Alternativa d .

5. Considerando V_B o volume do Boiler e V_R o volume do reservatório, temos:

$$V_B = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot h_B = \frac{\pi h_B}{4}$$

$$V_R = L^2 \cdot r \cdot h_R = 4h_R$$

$$\frac{V_B}{V_R} = \frac{\frac{\pi \cdot h_B}{4}}{4 \cdot h_R} = \frac{\pi \cdot h_B}{16 \cdot h_R}$$

As áreas laterais são dadas por:

$$A_R = 2\pi \cdot r_B \cdot h_B = \pi \cdot h_B \quad \text{e} \quad A_R = 4L_R \cdot h_R = 8h_R$$

$$\text{Se } A_R = 2A_{B'}, \text{ temos: } 8 \cdot h_R = 2\pi \cdot h_B \Rightarrow \frac{h_B}{h_R} = \frac{4}{\pi}$$

$$\text{Logo: } \frac{V_B}{V_R} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{1}{4}$$

6. O volume de areia é o mesmo:

$$\frac{1}{3} \pi \cdot r_{\text{con}}^2 \cdot h_{\text{con}} = \pi \cdot r_{\text{cil}}^2 \cdot h_{\text{cil}} \Rightarrow \frac{1}{3} (2R)^2 \cdot h_{\text{con}} = R^2 \cdot h_{\text{cil}} \Rightarrow h_{\text{con}} = \frac{3}{4} \cdot h_{\text{cil}}$$

Alternativa a .

7. $\frac{2}{3} \pi \cdot 3^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot h \Rightarrow 3h = 18 \Rightarrow h = 6 \text{ cm}$

Alternativa b .

8. Considere um tronco de cone de forma que:

raio da base menor: $OP = 6 \text{ cm}$

raio da base maior: $O'Q = 11 \text{ cm}$

geratriz: $PQ = 13 \text{ cm}$

Considere também a projeção P' de P sobre o raio $O'Q$:

Como $OP = O'P'$, temos:

$$P'Q = O'Q - O'P' = 11 - 6 \Rightarrow P'Q = 5 \text{ cm}$$

Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo $P'PQ$, temos

$$PP'^2 = PQ^2 - P'Q^2 \Rightarrow PP' = \sqrt{13^2 - 5^2} \Rightarrow PP' = 12 \text{ cm}$$

Alternativa b .

9. Como cada bolinha tem 3 cm de raio, ela terá 6 cm de diâmetro. Como cada dimensão da caixa tem medida equivalente a 6 diâmetros, temos que a aresta da caixa deve ser 36 cm.

Portanto, $a = 36 \text{ cm}$

$$V = a^3 = 36^3 \Rightarrow V = 46\,656 \text{ cm}^3$$

$$10. \frac{V_{(EFGHI)}}{p} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{(EFGHI)}}{p} = \left(\frac{b}{4b}\right)^3 \Rightarrow V_{(EFGHI)} = \frac{p}{64}$$

$$\text{Assim: } V = p - \frac{p}{64} = \frac{63}{64}p$$

Alternativa e .

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 158)

1. A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$ tem raio 3; logo, as alternativas a e b podem ser descartadas.

A parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1 , tem concavidade voltada para baixo e vértice no ponto $(0, -1)$; logo, as alternativas c e d podem ser descartadas.

Alternativa e .

2. A diferença entre os comprimentos horizontal e vertical é igual à metade do comprimento vertical.

$$2a - 2b = b$$

$$\text{Dessa igualdade, temos: } a = \frac{3b}{2}$$

$$\text{O volume do elipsoide é dado por } V = 4ab^2 = 4 \cdot \frac{3b}{2} \cdot b^2 = 6b^3$$

Alternativa b .

CAPÍTULO 8

Fazer e aprender (p. 165)

1. a) Sim. b) Não. c) Sim. d) Sim. e) Não. f) Não.

Polinômio	Número de termos	Grau	Valor numérico para $x = -1$	Escrita ordenada segundo as potências decrescentes de x	Coefficiente do termo de maior grau	Coefficiente de x^2
$x - x^5 + 1$	3	5	1	$-x^5 + x + 1$	-1	0
$2 - x^3 + x - \sqrt{2}$	4	3	$2 - \sqrt{2}$	$-x^3 + x + 2 - \sqrt{2}$	-1	0
$x^2 - \sqrt{3}x + 5$	3	2	$6 + \sqrt{3}$	$x^2 - \sqrt{3}x + 5$	1	1
$x - x^2$	2	2	-2	$-x^2 + x$	-1	-1
$x^4 - x^2 + x^3$	3	4	-1	$x^4 + x^3 - x^2$	1	-1
$-1 - x$	2	1	0	$-x - 1$	-1	0
5	1	0	5	5	5	0
0	1	Não é definido.	0	0	Não faz sentido.	0

3. a) $\sqrt{2}x^4 + \pi x^3 - 2x^2 - 0,5x + 5$
b) $2\pi x^4 + \sqrt{3}$

4. a) $5x^4 - 0,5x^3 - 2x^2 + \pi x + \sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}x^4 + 2\pi$

5. a) $P(t) = t^2 - 6t + 10$
 $P(2) = 4 - 12 + 10$
 $P(2) = -8 + 10$
 $P(2) = 2$

b) $P(x) = x^4 - 5x^2 + 3x - 9$
 $P(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 + 3(-3) - 9$
 $P(-3) = 81 - 45 - 9 - 9$
 $P(-3) = 18$

c) $P(m) = m^3 - 9m$
 $P(1) = 1 - 9 = -8$
 $P(-1) = -1 + 9 = 8$

6. a) $m - 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2 \rightarrow$ grau 3
 $m = 2 \rightarrow$ grau 2

b) $m = 0 \rightarrow$ grau indefinido
 $m \neq 0 \rightarrow$ grau 4

c) $m^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 2$
Se $m \neq \pm 2 \rightarrow$ grau 3
 $m = 2 \rightarrow$ grau 0
 $m = -2 \rightarrow$ grau 2

d) $m^2 + 1 \neq 0 \rightarrow$ grau 2; $\forall m \in \mathbb{R}$

7. a) $2m + 1 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq -\frac{1}{2} & \text{grau 2} \\ m = -\frac{1}{2} & \text{grau 1} \end{cases}$

b) $m - 8 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 8 & \text{grau 3; } \forall p \in \mathbb{R} \\ m = 8 & \text{grau 2; } \forall p \in \mathbb{R} \end{cases}$

c) $3p + p^2 \neq 0$
 $p(3 + p) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} p \neq 0 \\ p \neq -3 \end{cases}$
 $p \neq 0$ e $p \neq -3 \rightarrow$ grau 3
 $p = 0 \rightarrow$ grau 1
 $p = -3 \rightarrow$ grau 2

8. a) Não.

b) Sim.
 $m \neq 8, m \neq 0, p \neq 0$ e $p \neq 1 \rightarrow$ Completo de grau 3
 $m = 8, p \neq 0$ e $p \neq 1 \rightarrow$ Completo de grau 2
c) Não.

9. $120 + 120 + 2\pi \cdot \frac{x}{2} = 400$
 $240 + \pi x = 400$
 $x = \frac{160}{\pi} \text{ m}$

$r = \frac{160}{2\pi} \Rightarrow r = \frac{80}{\pi} \text{ m}$
 $A(x) = 2 \cdot 120x + \pi \left(x + \frac{x}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{x}{2}\right)^2$
 $A(x) = 240x + \pi \left(x + \frac{80}{\pi}\right)^2 - \pi \left(\frac{80}{\pi}\right)^2$
 $A(x) = 240x + \pi \left(x^2 + \frac{160x}{\pi} + \frac{6400}{\pi^2}\right) - \frac{6400}{\pi}$
 $A(x) = 240x + \pi x^2 + 160x + \frac{6400}{\pi} - \frac{6400}{\pi}$
 $A(x) = \pi x^2 + 400x$ é a área procurada.

10. $P(x) = x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x + 1$

a) $P(1) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 = 101$
b) $P(-1) = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + 1 = 1$
c) $P(2) = 2^{100} + 2^{99} + 2^{98} + \dots + 2^2 + 2 + 1$
 $2P(2) = 2^{101} + 2^{100} + 2^{99} + \dots + 2^3 + 2^2 + 2$
 $2P(2) - P(2) = 2^{101} - 1$
 $P(2) = 2^{101} - 1$

d) $P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1^{100}}{2} + \frac{1^{99}}{2} + \frac{1^{98}}{2} + \dots + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} + 1$
 $\frac{1}{2}P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1^{101}}{2} + \frac{1^{100}}{2} + \frac{1^{99}}{2} + \dots + \frac{1^3}{2} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}P\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1^{101}}{2} - 1$
 $P\left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1^{101}}{2} - 1$
 $-\frac{1}{2} \cdot P\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{101}} - 1$
 $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{101}}\right)$
 $P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{1}{2^{100}}$

Fazer e aprender (p. 168)

11. a) $c = 2x - 1$

$$I = x + 5$$

$$A(x) = c \cdot I = (2x - 1)(x + 5)$$

$$A(x) = 2x^2 + 10x - x - 5$$

$$A(x) = 2x^2 + 9x - 5$$

$$P(x) = 2c + 2I = 2(2x - 1) + 2(x + 5)$$

$$P(x) = 4x - 2 + 2x + 10$$

$$P(x) = 6x + 8$$

b) Grau de $P(x)$ é 1.

Grau de $A(x)$ é 2.

c) $A(x) = 0$

$$2x^2 + 9x - 5 = 0$$

$$\Delta = 81 - 4 \cdot 2(-5) = 121$$

$$x = \frac{-9 \pm 11}{4} \begin{cases} x = -5 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$P(x) = 0$$

$$6x + 8 = 0$$

$$6x = -8$$

$$x = \frac{-8}{6}$$

$$x = \frac{-4}{3}$$

- d) Os valores $\frac{-4}{3}$ e -5 para x tornam o valor $2x - 1 < 0$, o que não faz sentido como comprimento de um campo, e para $x = \frac{1}{2}$ a medida $2x - 1 = 0$, o que significa que o campo terá área nula e se reduzirá a uma linha. Para a área, os zeros correspondem a um dos lados iguais a zero e não há retângulo.

12. a) $y(x) = \left[\frac{100}{x} + 2,50 \right]$

b) $D(x) = x \left[\frac{100}{x} + 2,50 \right] = 100 + 2,50x$

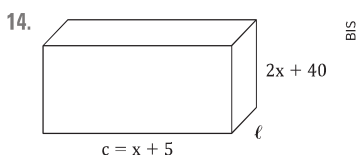
- c) A expressão do item a não é um polinômio, pois há variável no denominador.

13.

Cristina	Luiz	Cristina	Luiz
x	2x	100	y

$$y = 500 - 100 - 3x$$

$$y = 400 - 3x$$



$$\left. \begin{aligned} x + 5 > 0 &\Rightarrow x > -5 \\ x > 0 \\ 2x - 40 > 0 &\Rightarrow x > 20 \end{aligned} \right\} x > 20$$

b) $P(x) = 2(2x - 40) + 2(x + 5)$

$$P(x) = 4x - 80 + 2x + 10$$

$$P(x) = 6x - 70$$

c) $A(x) = x^2 + 5x$

$$A(x) = x(x + 5) = \ell \cdot c = \ell(x + 5)$$

$$\ell = x$$

$$V(x) = \ell \cdot c \cdot h$$

$$V(x) = x(x + 5)(2x - 40)$$

$$V(x) = (x^2 + 5x)(2x - 40)$$

$$V(x) = 2x^3 - 40x^2 + 10x^2 - 200x$$

$$V(x) = 2x^3 - 30x^2 - 200x$$

d) $x^2 + 5x = 1800$

$$x^2 + 5x - 1800 = 0$$

$$\Delta = 25 + 7200 = 7225$$

$$x = \frac{-5 \pm 85}{2} \begin{cases} x = 40 \\ x = 45 \end{cases}$$

As dimensões são 40 cm e 45 cm.

15. $P(x) = x^{2n+1} + x^{2n} + x + 1, n \in \mathbb{N}$

$$P(-1) = (-1)^{2n+1} + (-1)^{2n} + (-1) + 1$$

Como $2n + 1$ é ímpar para $n \in \mathbb{N}$ e $2n$ é par para $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$P(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$$

$$\therefore -1 \text{ é raiz de } P(x), \forall n \in \mathbb{N}.$$

16. $P(x) = ax + b, a \neq 0$

$$-2 = P(2) = 2a + b$$

$$13 = P(-3) = -3a + b \quad \ominus$$

$$-15 = 5a \Rightarrow a = -3$$

$$-2 = 2(-3) + b$$

$$4 = b$$

$$\therefore P(x) = -3x + 4$$

$$-3x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

17. $P(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

$$P(0) = c = 2$$

$$P(-1) = a - b + 2 = 12 \Rightarrow a - b = 10$$

$$P(2) = 4a + 2b + 2 = 6 \Rightarrow 2a + b = 2 \quad \oplus$$

$$\begin{aligned} 3a &= 12 \\ a &= 4 \end{aligned}$$

$$4 - b = 10 \Rightarrow b = -6$$

$$P(x) = 0 = 4x^2 - 6x + 2$$

$$0 = 2x^2 - 3x + 1$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{4} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Assim, } P(x) = 4x^2 - 6x + 2 \text{ e } x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

Fazer e aprender (p. 174)

18. $A(x) = 2x - \frac{1}{2}$

$$B(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$C(x) = x^3 - \frac{1}{2}x + x^2 + 1$$

a) $A(x) + B(x) = 2x - \frac{1}{2} + x^2 - 3x + 2$

$$A(x) + B(x) = x^2 - x + \frac{3}{2}$$

b) $B(x) - C(x) = x^2 - 3x + 2 - \left(x^3 - \frac{1}{2}x + x^2 + 1 \right)$

$$B(x) - C(x) = x^2 - 3x + 2 - x^3 + \frac{1}{2}x - x^2 - 1$$

$$B(x) - C(x) = -x^3 - \frac{5}{2}x + 1$$

$$c) A(x) - B(x) + C(x) = 2x - \frac{1}{2} - x^2 + 3x - 2 + x^2 - \frac{1}{2}x + x^2 + 1$$

$$A(x) - B(x) + C(x) = x^3 + \frac{9x}{2} - \frac{3}{2}$$

$$d) A(x) \cdot B(x) = \left(2x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - 3x + 2)$$

$$A(x) \cdot B(x) = 2x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 1$$

$$19. a) x^2 - 4x + 3 + x - 2x^3 + 5x^2 = -2x^3 + 6x^2 - 3x + 3$$

$$b) x^2 - 4x + 3 - x + 2x^3 - 5x^2 = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3$$

$$c) x^3 - 7x^2 + 10 - x^2 + 4x - 3 - x^3 + 5x^2 - 4x = -3x^2 + 7$$

$$d) (x+1)(x+3) = x^2 + 3x + x + 3 = x^2 + 4x + 3$$

$$e) (2x-3)(x^2-5x) = 2x^3 - 10x^2 - 3x^2 + 15x = 2x^3 - 13x^2 + 15x$$

$$f) (x+1)(x^3 - x^2 + x - 1) = x^4 - x^3 + x^2 - x + x^3 - x^2 + x - 1 = x^4 - 1$$

20. a) O grau do polinômio que representa a soma é menor ou igual ao maior grau dos polinômios que são adicionados.

b) O grau do polinômio que representa o produto é igual à soma dos graus dos polinômios fatores.

21. a) Grau 5. b) Grau 9. c) Grau 5.

$$22. a) P(x) = (2x+1)(x-2) - x(x-3) - (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

$$P(x) = 2x^2 - 4x + x - 2 - x^2 + 3x - (x^2 - 2)$$

$$P(x) = x^2 - 2 - x^2 + 2 = 0$$

$$P(x) \equiv 0$$

$$b) A(x) = (x-1)(x+3) + x^2(x+3) - x - 3$$

$$A(x) = x^2 + 3x - x - 3 + x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$A(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

$$B(x) = (x-1)(x+3)(x+2)$$

$$B(x) = (x-1)(x^2 + 5x + 6)$$

$$B(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$$

$$\therefore A(x) \equiv B(x)$$

$$23. P(x) = 2ax^2 + ax - bx + a + 6x^2 - 2x + c + 2$$

$$P(x) = 2ax^2 + 6x^2 + ax - bx - 2x + a + c + 2$$

$$P(x) = x^2(2a+6) + x(a-b-2) + a+c+2$$

$$\text{Se } P(x) = 0$$

$$2a+6=0 \Rightarrow a=-3$$

$$a-b-2=0 \Rightarrow -3-b-2=0 \Rightarrow b=-5$$

$$a+c+2=0 \Rightarrow -3+c+2=0 \Rightarrow c=1$$

$$24. A(x) = B(x)$$

$$a(x^2 - 2x) + b(x^2 - 4x + 2) + c = 2(x-1)(2x-1)$$

$$ax^2 - 2ax + bx^2 - 4bx + 2b + c = 2(2x^2 - x - 2x + 1)$$

$$ax^2 + bx^2 - 2ax - 4bx + 2b + c = 4x^2 - 6x + 2$$

$$x^2(a+b) - x(2a+4b) + 2b+c = 4x^2 - 6x + 2$$

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2a+4b=6 \\ 2b+c=2 \end{cases}$$

multiplicando por -2:

$$\begin{cases} -2a-2b=-8 \\ 2a+4b=6 \end{cases} \Rightarrow b=-1$$

$$a+b=4 \Rightarrow a=5$$

$$2b+c=2 \Rightarrow c=4$$

$$25. \Delta = 0$$

$$b^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 = 4ac$$

$$26. \text{Grau de } S: 8$$

$$\text{Grau de } D: 5$$

Logo, o grau de A e B é 8.

Alternativa b.

$$27. a) x^2 + 3x - 4 \quad \frac{x^2 - x - 1}{1}$$

$$\frac{-x^2 + x + 1}{4x - 3}$$

$$Q(x) = 1$$

$$R(x) = 4x - 3$$

$$P(x) = 1D(x) + 4x - 3$$

$$b) D(x) = P(x)(x-1) + 2$$

Como o grau de P(x) é menor que o grau D(x), Q(x) = 0 e R(x) = P(x) = x^2 + x + 1

$$c) \text{ Como o grau de } P(x) \text{ é menor que o grau } D(x), Q(x) = 0 \text{ e } R(x) = P(x) = 6$$

$$28. P(x) = (2x+3)(5x^2-4x+1) - x + 2$$

$$P(x) = 10x^3 - 8x^2 + 2x + 15x^2 - 12x + 3 - x + 2$$

$$P(x) = 10x^3 + 7x^2 - 11x + 5$$

$$29. P(x) = Q(x) \cdot D(x)$$

$$P(x) = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 3)$$

$$P(x) = 2x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 3x^2 - 3x + 3$$

$$P(x) = 2x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 3x + 3$$

$$30.$$

$$a) \begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -6 & 11 & -6 & \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 & \end{array}$$

$$b) \begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}$$

$$31.$$

$$a) \begin{array}{r|rrrrr} 3 & 3 & -5 & 0 & 1 & \\ \hline & 3 & 4 & 12 & 37 & \end{array}$$

$$Q(x) = 3x^2 + 4x + 12$$

$$R(x) = 37$$

$$b) \begin{array}{r|rrrrr} 2 & 4 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ \hline & 4 & 7 & 14 & 30 & 57 \end{array}$$

$$Q(x) = 4x^3 + 7x^2 + 14x + 30$$

$$R(x) = 57$$

$$c) \begin{array}{r|rrrrr} -2 & 1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -3 & 6 & -13 \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 3x + 6$$

$$R(x) = -13$$

$$d) \begin{array}{r|rrrrr} -1 & -6 & 5 & 0 & -4 & -3 \\ \hline & -6 & 11 & -11 & 7 & -10 \end{array}$$

$$Q(x) = -6x^3 + 11x^2 - 11x + 7$$

$$R(x) = -10$$

32.

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 6 & -11 & 4 & -2 \\ \hline & 6 & -8 & 0 & -2 \end{array}$$

$$Q(x) = 3x^2 - 4x$$

$$R(x) = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 8 & 2 & 1 & -4 \\ \hline & 8 & -2 & 2 & -5 \end{array}$$

$$Q(x) = 4x^2 - x + 1$$

$$R(x) = -5$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{1}{2} & 4 & -16 & 15 & -8 & 8 \\ \hline & 4 & -14 & 8 & -4 & 6 \end{array}$$

$$Q(x) = x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x - 1$$

$$R(x) = 6$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 5 & 0 & -6 & 1 & 6 \\ \hline & 5 & 5 & -1 & 0 & 6 \end{array}$$

$$Q(x) = -5x^3 - 5x^2 + x$$

$$R(x) = 6$$

33. a = -2

$$-12 + c = -7 \Rightarrow c = 5$$

$$14 - 1 = d \Rightarrow d = 13$$

$$-26 + e = -30 \Rightarrow e = -4$$

$$60 + 2 = f \Rightarrow f = 62$$

$$-124 + g = -123 \Rightarrow g = 1$$

$$P(x) = 6x^5 + 5x^4 - x^3 - 4x^2 + 2x + 1$$

$$D(x) = x + 2$$

$$Q(x) = 6x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 30x + 62$$

34. $f(-3) = (-3)^{-3} + (-3)^2 + (-3) + 1 = -20$

$$f(0) = 1$$

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 1 + 1 = 0$$

$$f(f(-1)) = f(0) = 1$$

$$\text{Assim: } -20 + 1 + 1 = -18$$

Alternativa b.

Fazer e aprender (p. 176)35. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 6$

$$\text{a) } P(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 6 = -6$$

$$\text{b) } P(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 4(-2) + 6 = -6$$

$$\text{c) } P(-2) = -6$$

$$\text{d) } P\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 6 = \frac{188}{27}$$

36. $P(x) = 2x^4 - 3x + 26$

$$\text{a) } P(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2 + 26 = 0$$

∴ é divisível

$$\text{b) } P(-2) = 0$$

$$(-2)^3 - 4k + 4 - 4 = 0$$

$$k = -2$$

$$\text{c) } P(-2) = -2^3 - 3(-2)^2 - 4(-2) + 12 = 0 \rightarrow \text{Sim}$$

$$P(0) = 12 \rightarrow \text{Não}$$

$$P(1) = 1 - 3 - 4 + 12 = 6 \rightarrow \text{Não}$$

$$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 12 = 0 \rightarrow \text{Sim}$$

$$P(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 4 \cdot 3 + 12 = 0 \rightarrow \text{Sim}$$

-2, 2 e 3 são raízes.

37. Teorema do resto:

$$P(1) = P(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^3 + m \cdot 1 + 1 = 3 \cdot (-1)^4 - 2 \cdot (-1) + m \cdot (-1) + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - 2 + m + 1 = 3 + 2 - m + 1 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

Alternativa d.

38. a) As raízes de $p(x)$ são: $(1 + i)$, $(1 - i)$, r e $-r$.

Pelo produto das raízes:

$$(1 + i) \cdot (1 - i) \cdot r \cdot (-r) = \frac{-8}{1} \Leftrightarrow -2r^2 = -8 \Leftrightarrow r = \pm 2$$

As raízes são $(1 + i)$, $(1 - i)$, 2 e -2 .

$$p(x) = 1 \cdot (x - (1 + i)) \cdot (x - (1 - i)) \cdot (x + 2)(x - 2)$$

$$p(x) = 4x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$$

Dessa maneira, $a = -2$, $b = -2$ e $c = 8$.

b) Subtraindo 1 de cada uma das raízes, temos:

$$1 - i - 1 = -i$$

$$1 + i - 1 = i$$

$$2 - 1 = 1$$

$$-2 - 1 = -3$$

Assim, para $k \neq 0$, temos:

$$q(x) = k(x - (-i))(x - i) \cdot (x - 1) \cdot (x - (-3))$$

$$q(x) = k(x^2 + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$$

Fazer e aprender (p. 177)39. a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - x$

$$P(x) = x(x^2 + 2x - 1) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

As raízes são: $-1 + \sqrt{2}$, $-1 - \sqrt{2}$ e 0 .b) $P(m) = m^3 + 3m^2 - 4m$

$$P(m) = m(m^2 + 3m - 4) = 0$$

$$m = 0$$

$$m^2 + 3m - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$m = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}$$

As raízes são: -4 , 0 e 1 .

c) $P(y) = y^5 + y^4 - 16y^3$
 $P(y) = y^3(y^2 + y - 16) = 0$
 $y = 0$
 $y^2 + y - 16 = 0$
 $\Delta = 1 + 64 = 65$
 $y = \frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$
 As raízes são: $\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}$, $\frac{-1 - \sqrt{65}}{4}$ e 0.

40. a) $P(x) = x(x^2 + 2x - 1)$
 b) $P(m) = m(m^2 + 3m - 4)$
 $P(m) = m(m + 4)(m - 1)$
 c) $P(y) = y^3(y^2 + y - 16)$

41. a)

2	1	0	-13	0	36
3	1	2	-9	-18	0
	1	5	6	0	

$x^2 + 5x + 6 = 0$
 $\Delta = 25 - 24 = 1$
 $x = -3$ ou $x = -2$
 $S = \{-3, -2, 2, 3\}$

b)

1	6	-11	6	-1
	6	-5	1	0

$6x^2 - 5x + 1 = 0$
 $\Delta = 25 - 24 = 1$
 $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{1}{2}$
 $S = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

42. a) $(x + 1)(x - 1) = x^2 + 2x + 1$
 $x^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x = -1$

b) $t^3 - 7t + 6 = (t - 1)^2(t + 3)$
 $t^3 - 7t + 6 = (t^2 - 2t + 1)(t + 3)$
 $t^3 - 7t + 6 = t^3 + 3t^2 - 2t^2 - 6t + t + 3$
 $t^3 - 7t + 6 = t^3 + t^2 - 5t + 3$
 $t^2 + 2t - 3 = 0$
 $t = -3$ ou $t = 1$

43.

1	1	2	-4	-2	3
1	1	3	-1	-3	0
	1	4	3	0	

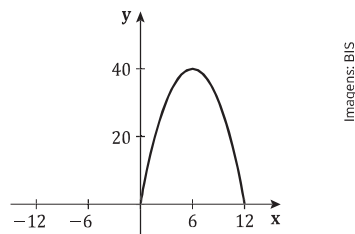
a) $P(x) = (x - 1)^2 \cdot (x^2 + 4x + 3) = (x + 3)(x + 1)(x - 1)^2$
 b) $x^2 + 4x + 3 = 0$
 $\Delta = 16 - 12 = 4$
 $x = -3$ ou $x = -1$
 $S = \{-3, -1, 1\}$

44.

2	2	-2	-8	8
	2	2	-4	0

$2x^2 + 2x - 4 = 0$
 $\Delta = 4 + 32 = 36$
 $x = -2$ ou $x = 1$
 $S = \{-2, 1, 2\}$

45. a)



b) $f(n) = 60n - 5n^2$
 Máximo de meses: $v = \frac{-b}{2a} = \frac{60}{10} = 6$

Foco na tecnologia – Calculadora (p. 178)

1. a) $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \pi (0,6)^2 \cdot 1 \Rightarrow V_{\text{cone}} = 0,12\pi \text{ m}^3$

b) Por semelhança de triângulos:

$\frac{r}{0,6} = \frac{h}{1} \Rightarrow r = 0,6h$
 $V(h) = \frac{\pi r^2 h}{3} =$
 $= \frac{\pi (0,6 \cdot h)^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi 0,36 h^3}{3} \Rightarrow$
 $\Rightarrow V(h) = 0,12\pi h^3$

c) $V(0,45) = 0,12\pi \cdot (0,45)^3 \Rightarrow V(0,45) = 0,0109\pi \text{ m}^3 \approx 0,34 \text{ m}^3$

$V(0,25) = 0,12\pi \cdot (0,25)^3 \Rightarrow V(0,25) = 0,00187\pi \text{ m}^3 \approx 6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$V(0,125) = 0,12\pi \cdot (0,125)^3 \Rightarrow V(0,125) = 0,00023\pi \text{ m}^3 \approx 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$

$V(0,5) = 0,12\pi \cdot (0,5)^3 \Rightarrow V(0,5) = 0,015\pi \text{ m}^3 \approx 0,047 \text{ m}^3$

d) $\frac{V(1)}{V(0,5)} = \frac{0,12\pi}{0,12\pi \cdot (0,5)^3} = \frac{1}{0,125} = \frac{1000}{125} = 8$

O volume inicial será 8 vezes o volume de óleo quando a altura for a metade da inicial.

2. a) $x^2 + 2 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $2x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

b) $V(x) = \pi \left(\frac{2x - 4}{2} \right)^2 \cdot (x^2 + 2) = \pi \cdot (x - 2)^2 \cdot (x^2 + 2)$

c) $R = 2,25 \Rightarrow h = x^2 + 2 = (2,25 + 2)^2 + 2 \Rightarrow R \approx 20,06 \text{ m}$

$A_{\text{lat.}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2,25 \cdot 20,06 \Rightarrow A_{\text{lat.}} \approx 283,59 \text{ m}^2$

$A_{\text{tampa}} = \pi r^2 = \pi (2,25)^2 \Rightarrow A_{\text{tampa}} \approx 15,90 \text{ m}^2$

$A_{\text{total externa}} = 299,49 \text{ m}^2$

Número de latas = $\frac{299,49}{20} \approx 15$

Assim, aproximadamente 15 latas.

(Se a outra tampa também for pintada, serão necessárias 16 latas de tinta.)

Foco no raciocínio lógico (p. 178)

1. Considere que a bola retirada tem etiqueta AB.

• Se ela for azul, temos:

Etiqueta AB: bolas no interior: azul e azul.

Etiqueta BB: bolas no interior: azul e branca.

Etiqueta AA: bolas no interior: branca e branca.

• Se ela for branca, temos:

Etiqueta AB: bolas no interior: branca e branca.

Etiqueta BB: bolas no interior: azul e branca.

Assim, será suficiente tirar apenas 1 bola.

Alternativa e.

2. Se Ana escondeu o secador de cabelo, ela mente, Bia mente e Mariana e Carla falam a verdade, o que não é possível porque apenas uma delas fala a verdade.
- Se Bia escondeu o secador de cabelo, ela mente e Ana e Carla dizem a verdade; e novamente isso não é possível, pois apenas uma diz a verdade.
- Se Mariana escondeu o secador de cabelo, ela mente e Bia diz a verdade, Ana mente e Carla diz a verdade; outra vez, isso não é possível acontecer.
- Logo, Carla escondeu o secador de cabelo e, nesse caso, ela mente, Ana e Bia mentem e apenas Mariana diz a verdade.
- Conclusão, Carla escondeu o secador de cabelo de sua mãe.

Aprender a aprender (p. 179)

1. $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$ (4 químicos)
- $\binom{3}{1} = 3$ (3 engenheiros ambientais)
- $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$ (2 engenheiros de produção)
- Número de maneiras que a equipe poderá ser formada:
- $$\frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 3 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6! \cdot \frac{3}{8}$$
- Alternativa c.
2. $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ (modos de escolher duas substâncias).
- $\binom{3}{2} = 3$ (duas das três substâncias 1, 2 e 3)
- Número possível de misturas diferentes:
- $$28 - 3 = 25 \text{ (sem o gás metano)}$$
- Alternativa c.
3. Total de anagramas: $8! = 40\,320$
- Grupos com 3 alunos: $C_{6,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$
- Logo: $40\,320 : 20 = 2\,016$
- Alternativa c.
4. O total de senhas que podemos formar é:
- $$\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 625$$
- Cálculo das senhas em que aparece o número 13
- (1ª) $\frac{1}{\boxed{1}} \cdot \frac{1}{\boxed{3}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} = 25$
- (2ª) $\underline{5} \cdot \frac{1}{\boxed{1}} \cdot \frac{1}{\boxed{3}} \cdot \underline{5} = 25$
- (3ª) $\underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \frac{1}{\boxed{1}} \cdot \frac{1}{\boxed{3}} = 25$
- Observação:
- A senha 1 313 foi contada duas vezes, na (1ª) e (3ª) opções, logo o total de senhas em que aparece o número 13 é:
- $$75 - 1 = 74$$
- Subtraindo do total de senhas aquelas nas quais aparece o número 13, temos:
- $$625 - 74 = 551$$
- Alternativa a.
5. Com a chave 1 aberta, as lâmpadas ficarão apagadas.
- Com a chave 1 fechada e a 2 aberta, a lâmpada 2 ficará apagada.
- Assim: $0,6 + (1 - 0,6) \cdot 0,4 = 0,76 = 76\%$
- Alternativa a.

6. Frações possíveis = $12 \cdot 9 = 108$

Para que a fração seja irredutível, o denominador deverá ser par, então o numerador deverá ser ímpar.

Numerador: 11, 13, 15, 17, 19 e 21.

Denominador: 44, 46, 48 e 50.

Total de frações: $6 \cdot 4 = 24$

Devemos retirar: $\frac{11}{44}, \frac{15}{48}, \frac{21}{48}$ e $\frac{15}{50}$

Assim: $P = \frac{20}{108} = \frac{5}{27}$

Alternativa e.

7. Sejam os números da forma: $x - y - z$

x e y consecutivos: $5 \cdot 1 \cdot 6 = 30$

y e z consecutivos: $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$

Devemos excluir os casos: **x e y** consecutivos e **y e z** consecutivos:

$4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$

$P = \frac{30 + 30 - 4}{6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{56}{216} = \frac{7}{27}$

Alternativa c.

CAPÍTULO 9

Fazer e aprender (p. 190)

1. a) $\text{Re}(z) = -6; \text{Im}(z) = 0,5$
- b) $\text{Re}(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{Im}(z) = -\frac{1}{2}$
- c) $\text{Re}(z) = 0; \text{Im}(z) = -\pi$
- d) $\text{Re}(z) = 3 + \sqrt{2}; \text{Im}(z) = 0$
2. a) $\text{Im}(z) = 0$
- $$x + 3 = 0$$
- $$x = -3$$
- b) $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$
- $$x - 2 = 0 \quad x + 3 \neq 0$$
- $$x = 2 \quad x \neq -3$$
- $$\therefore x = 2$$
3. a) $\text{Im}(z) = 0$
- $$x^2 - 3x = 0$$
- $$x = 0 \text{ ou } x = 3$$
- b) $\text{Im}(z) \neq 0$
- $$x^2 - 3x \neq 0$$
- $$x \neq 0 \text{ ou } x \neq 3$$
- c) $\text{Re}(z) = 0$ e $\text{Im}(z) \neq 0$
- $$x^2 - 9 = 0 \quad x^2 - 3x \neq 0$$
- $$x = \pm 3 \quad x \neq 0 \text{ ou } x \neq 3$$
- $$x = -3$$
4. a) $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ x + y = -9 \end{cases}$
- $$3x = -3$$
- $$x = -1 \text{ e } y = -8$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x = 0 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ e } y = -3$$

$$\text{c) } x + 2xi + yi - 2y = 8 + 6y$$

$$\begin{cases} x - 2y = 8 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \xrightarrow{(\cdot 2)} \begin{cases} x - 2y = 8 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$$

$$5x = 20$$

$$x = 4 \text{ e } y = -2$$

$$\text{d) } (x - yi)^2 = -16$$

$$x - yi = 4i \text{ ou } x - yi = -4i$$

$$x = 0 \text{ e } y = -4 \text{ ou } x = 0 \text{ e } y = 4$$

$$\text{5. a) } z_1 + z_2 = -1 + 6i + 3 - 2i = 2 + 4i$$

$$\text{b) } z_1 - z_2 = -1 + 6i - 3 + 2i = -4 + 8i$$

$$\text{c) } z_1 \cdot z_2 = (-1 + 6i) \cdot (3 - 2i) = -3 + 2i + 18i + 12 = 9 + 20i$$

$$\text{d) } z_1^2 = (-1 + 6i)^2 = 1 - 12i + 36 = -35 - 12i$$

$$\text{e) } z_2^2 = (3 - 2i)^2 = 9 - 12i + 4 = 5 - 12i$$

$$\text{f) } i \cdot (z_2 - z_1) = i \cdot (3 - 2i + 1 - 6i) = 8 + 4i$$

$$\text{6. a) } i^{236} + i^{549} + i^{526} + i^{855} = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{100} = \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2\right]^{50} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}\right)^{50} =$$

$$= \frac{1}{2^{50}} \cdot i^{50} = 2^{-50} \cdot i^2 = -2^{-50}$$

$$\text{7. } \left(\frac{1+i^9}{1+i^{27}}\right)^{20} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{20} = \left[\left(\frac{1+i}{1-i}\right) \cdot \left(\frac{1-i}{1-i}\right)\right]^{10}$$

$$= \left(\frac{1^2 + 2i + i^2}{1^2 - i^2}\right)^{10} = \left(\frac{2i}{2}\right)^{10} = i^{10} = -1$$

Alternativa d.

$$\text{8. } z = (x + i)^3 = x^3 + 3x^2i - 3x - i = (x^3 - 3x) + (3x^2 - 1)i$$

$$\text{a) } \text{Im}(z) = 0$$

$$3x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{1}{3}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{b) } \text{Re}(z) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Im}(z) \neq 0$$

$$x^3 - 3x = 0 \quad 3x^2 - 1 \neq 0$$

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0 \quad x \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 0 \text{ ou } x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

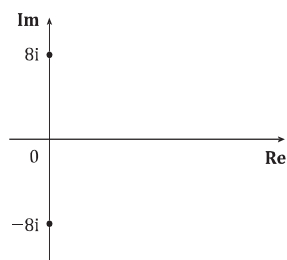
$$x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3}, \text{ ou } x = -\sqrt{3}.$$

$$\text{9. a) } x^2 + 64 = 0$$

$$x^2 = -64$$

$$x = \pm 8i$$

$$\{-8i, 8i\}$$



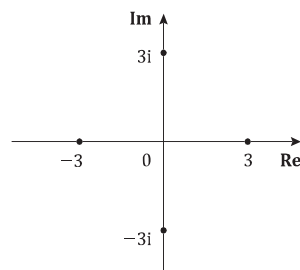
$$\text{b) } x^4 - 81 = 0$$

$$x^4 = 81$$

$$x^2 = 9 \quad \text{ou} \quad x^2 = -9$$

$$x = \pm 3 \quad x = \pm 3i$$

$$\{-3i, 3i, -3, 3\}$$



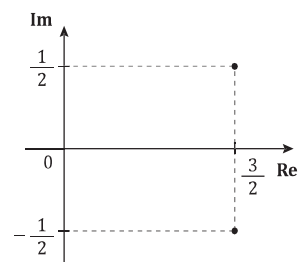
$$\text{c) } 2x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 40 = -4$$

$$x = \frac{6 \pm 2i}{4}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

$$\left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$$

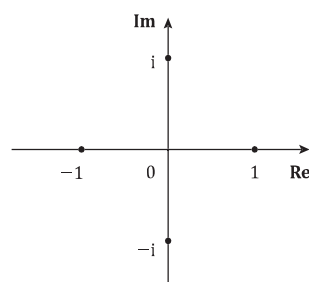


$$\text{d) } x^4 = 1$$

$$x^2 = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = -1$$

$$x = \pm 1 \quad x = \pm i$$

$$\{-i, i, -1, 1\}$$



Imagens: BIS

$$\text{10. } x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$\Delta = 9 - 20 = -11$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{11} \cdot i}{2}$$

$$\left\{-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i, -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i\right\}$$

$$\text{11. a) } z^2 = -9$$

$$z = \pm 3i$$

$$\{-3i, 3i\}$$

$$\text{b) } z^2 = -3$$

$$z = \pm\sqrt{3}i$$

$$\{-\sqrt{3}i, \sqrt{3}i\}$$

$$c) -3z^2 + 6z + 1 = 0$$

$$\Delta = 36 + 12 = 48$$

$$z = \frac{-6 \pm 4\sqrt{3}}{-6}$$

$$\left\{ 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}, 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}$$

$$d) (x - 2i) \cdot (2x^2 - 3x + 5) = 0$$

$$x - 2i = 0 \quad \text{ou} \quad 2x^2 - 3x + 5 = 0$$

$$x = 2i$$

$$\Delta = 9 - 40 = -31$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{31}i}{4}$$

$$\left\{ 2i, \frac{3 - \sqrt{31}i}{4}, \frac{3 + \sqrt{31}i}{4} \right\}$$

$$12. a) 13z^2 - 24z + 13 = 0$$

$$\Delta = 576 - 676 = -100$$

$$z = \frac{24 \pm 10i}{26}$$

$$\left\{ \frac{12}{13} + \frac{5i}{13}, \frac{12}{13} - \frac{5i}{13} \right\}$$

$$b) f(z) = \left(z - \frac{12}{13} - \frac{5i}{13} \right) \cdot \left(z - \frac{12}{13} + \frac{5i}{13} \right)$$

$$13. a) \bar{z} = 8 - 5i$$

$$c) \bar{z} = 6i$$

$$b) \bar{z} = -62 - 7i$$

$$d) \bar{z} = -4$$

$$14. a) \frac{5 - 2i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{15 - 20i - 6i - 8}{9 + 16} = \frac{7}{25} - \frac{26i}{25}$$

$$b) \frac{3 + 5i}{4 - 2i} \cdot \frac{4 + 2i}{4 + 2i} = \frac{12 + 6i + 20i - 10}{16 + 4} = \frac{1}{10} + \frac{13i}{10}$$

$$c) \frac{-2 + 3i}{3 + i} \cdot \frac{3 - i}{3 - i} = \frac{-6 + 2i + 9i + 3}{9 + 1} = \frac{-3}{10} + \frac{11i}{10}$$

$$d) \frac{-2 - 10i}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{2 + 2i + 10i - 10}{1 + 1} = -4 + 6i$$

$$e) \frac{1 + i}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{1 - i}{1} = -1 + i$$

$$f) \frac{1 - i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{1 - 2i - 1}{1 + 1} = -i$$

$$15. a) z = \frac{1 + i}{1 + 2i} + \frac{1 - i}{i} = \frac{i(1 + i) + (1 + 2i) \cdot (1 - i)}{(1 + 2i)i} = \frac{i - 1 + 1 - i + 2i + 2}{-2 + i} = \frac{2 + 2i}{-2 + i} \cdot \frac{-2 - i}{-2 - i} = \frac{-4 - 2i - 4i + 2}{4 + 1} \Rightarrow \Rightarrow z = -\frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$$

$$b) z = \frac{1 + i}{i} - \frac{i}{1 - i} = \frac{(1 + i) \cdot (1 - i) - i \cdot i}{i(1 - i)} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{3 - 3i}{1 + 1} \Rightarrow \Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$c) z = \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^{-1} = \frac{1 - i}{1 + i} \cdot \frac{1 - i}{1 - i} = \frac{1 - 2i - 1}{1 + 1} \Rightarrow \Rightarrow z = -i$$

$$d) z = 3 \cdot \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^2 - \left(\frac{2 - 4i}{1 + i} \right) = 3 \cdot \left[\left(\frac{1 + i}{1 - i} \right) \cdot \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right) \right]^2 - \left(\frac{2 - 4i}{1 + i} \right) \cdot \left(\frac{1 - i}{1 - i} \right) = 3 \cdot \left[\left(\frac{1 + i + i - 1}{1 + 1} \right) \right]^2 - \left(\frac{2 - 2i - 4i - 4}{1 + 1} \right) = 3 \cdot i^2 - (-1 - 3i) = -3 + 1 + 3i \Rightarrow \Rightarrow z = -2 + 3i$$

$$16. z = \frac{2x - xi}{1 + 2xi} \cdot \frac{1 - 2xi}{1 - 2xi} = \frac{2x - 4x^2i - xi - 2x^2}{1 + 4xi} = \frac{2x - 2x^2}{1 + 4xi} + \frac{(-4x^2 - x) \cdot i}{1 + 4xi}$$

$$a) \operatorname{Im}(z) = 0$$

$$\frac{-4x^2 - x}{1 + 4x^2} = 0$$

$$x(-4x - 1) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{4}$$

$$b) \operatorname{Re}(z) \neq 0 \quad e \quad \operatorname{Im}(z) \neq 0$$

$$\frac{2x - 2x^2}{1 + 4x^2} \neq 0 \quad \frac{-4x^2 - x}{1 + 4x^2} \neq 0$$

$$2x - 2x^2 \neq 0 \quad x \neq 0 \quad \text{ou} \quad x \neq -\frac{1}{4}$$

$$2x(1 - x) \neq 0$$

$$x \neq 0 \quad \text{ou} \quad x \neq 1$$

$$x \neq 0 \quad \text{ou} \quad x \neq 1, \text{ ou } x \neq -\frac{1}{4}$$

$$c) \operatorname{Re}(z) = 0 \quad e \quad \operatorname{Im}(z) = 0$$

$$\frac{2x - 2x^2}{1 + 4x^2} = 0 \quad \frac{-4x^2 - x}{1 + 4x^2} \neq 0$$

$$x = 0$$

$$x \neq 0$$

$$\text{ou}$$

$$\text{ou}$$

$$x = 1$$

$$x \neq -\frac{1}{4}$$

$$\therefore x = 1$$

$$17. a) i \cdot z + 3(\bar{z} - 1) - 6 = 11i$$

$$z = a + bi$$

$$i(a + bi) + 3(a - bi - 1) - 6 = 11i$$

$$(-b + 3a - 3 - 6) + i(a - 3b - 11) = 0$$

$$3a - b = 9 \Rightarrow -3a - b = 9$$

$$a - 3b = 11 \Rightarrow -3a + 9b = -33 \quad \oplus$$

$$8b = -24 \Rightarrow b = -3$$

$$3a + 3 = 9 \Rightarrow a = 2$$

$$\therefore z = 2 - 3i$$

$$b) z^2 - i \cdot z = 0$$

$$z = a + bi$$

$$(a + bi)^2 - i(a - bi) = 0$$

$$a^2 + 2abi - b^2 - ia - b = 0$$

$$\begin{cases} (a^2 - b^2 - b) + i(2ab - a) = 0 \\ a^2 - b^2 - b = 0 \end{cases}$$

$$2ab - a = 0 \Rightarrow a(2b - 1) = 0 \Rightarrow a = 0 \quad \text{ou} \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore z = 2 - 3i$$

$$a = 0 \Rightarrow b^2 + b = 0 \Rightarrow b(b + 1) = 0$$

$$\text{Assim, } b = 0 \quad \text{ou} \quad b = -1.$$

$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore z = 0 \quad \text{ou} \quad z = -i, \text{ ou } z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \text{ ou } z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$18. a) \begin{cases} \overline{u + v} = 4 + 2i \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} = 4 + 2i & (1) \\ \bar{u} - \bar{v} = -6 + 4i & (2) \end{cases}$$

$$\text{Adicionando } (1) \text{ e } (2):$$

$$2\bar{u} = -2 + 6i$$

$$\bar{u} = -1 + 3i \Rightarrow u = -1 - 3i$$

$$\text{Em } (1): v = 4 + 2i + 1 - 3i$$

$$\bar{v} = 5 - i \Rightarrow v = 5 + i$$

$$\begin{aligned}
 & b) \begin{cases} u^2 - v^2 = 5 + 3i \\ u - v = -i \Rightarrow u - v = i \end{cases} \\
 & u^2 - v^2 = (u + v)(u - v) = 5 + 3i \\
 & (u + v) \cdot i = 5 + 3i \\
 & (u + v) = \frac{5 + 3i}{i} \\
 & (u + v) = \frac{(5 + 3i)i}{i \cdot i} \\
 & (u + v) = \frac{-3 + 5i}{-1} = 3 - 5i \\
 & \begin{cases} u + v = 3 - 5i \\ u - v = i \end{cases} \oplus \\
 & 2u = 3 - 4i \\
 & u = \frac{3}{2} - 2i \\
 & v = u - i = \frac{3}{2} - 2i - i \Rightarrow v = \frac{3}{2} - 3i
 \end{aligned}$$

Foco na leitura (p. 191)

Podemos associar o plano de Argand-Gauss a um plano cartesiano e associar os pontos z_1, z_2 e z_3 a $A(-1, -3)$, $B(-2, b)$ e $C(4, 2)$.

Como o triângulo ABC é isósceles com base \overline{BC} , temos que: $d_{AB} = d_{AC}$. Assim:

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$

$$(-1 + 2)^2 + (-3 - b)^2 = (-1 - 4)^2 + (-3 - 2)^2$$

$$(-1)^2 + (9 + 6b + b^2) = (-5)^2 + (-5)^2$$

$$1 + 9 + 6b + b^2 = 25 + 25$$

$$b^2 + 6b - 40 = 0$$

Resolvendo a equação, temos:

$$b_1 = -10 \text{ e } b_2 = 4$$

Como, do enunciado, $b > 0$, podemos afirmar que $b = 4$. Temos, assim, três pontos que definem o triângulo $A(-1, -3)$; $B(-2, 4)$; $C(4, 2)$.

Podemos encontrar a área calculando:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D|, \text{ onde } D = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -40$$

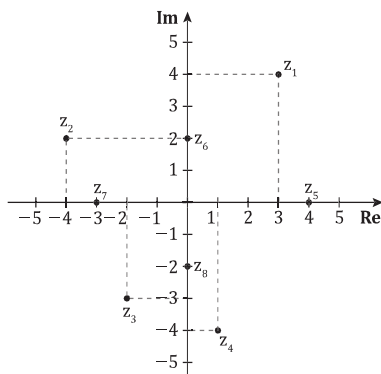
$$A = \frac{1}{2} \cdot |-40|$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 40 = 20$$

Assim, a alternativa b é a correta.

Fazer e aprender (p. 193)

19.



20. $A(-1, 3)$

$B(2, -1)$

$$d_{AB} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-3 + 1)^2} = 5$$

21. $A(2, -7)$

$B(1, 3)$

$$x_M = \frac{2 + 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y_M = \frac{-7 + 3}{2} = -2$$

$$\left(\frac{3}{2}, -2\right)$$

22. $A(2, 1)$; $B(-1, 0)$; $C(3, -2)$

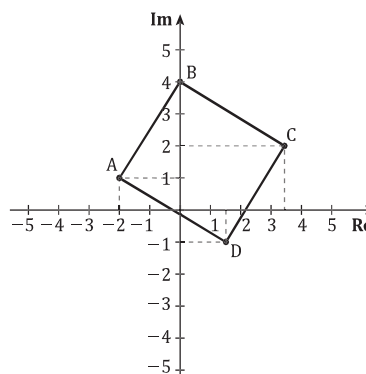
$$d_{AB} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-2 - 0)^2} = 2\sqrt{5}$$

Logo, o triângulo ABC é isósceles.

23. a)



Imagens: BIS

b) $A(-2, 1)$; $B(0, 4)$; $C\left(\frac{7}{2}, 2\right)$; $D\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

$$m_{AB} = \frac{4 - 1}{0 + 2} = \frac{3}{2}$$

$$m_{BC} = \frac{2 - 4}{\frac{7}{2} - 0} = -\frac{4}{7}$$

$$m_{CD} = \frac{-1 - 2}{\frac{3}{2} - \frac{7}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$m_{AD} = \frac{-1 - 1}{\frac{3}{2} + 2} = -\frac{4}{7}$$

Paralelogramo, pois $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ e $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.

(Professor, este exercício pode ser resolvido de outras maneiras.)

c) Sim.

$$A_{ABCD} = 2A_{\triangle ABC}$$

$$A_{ABCD} = 2 \cdot \frac{|D|}{2} = |D|$$

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8 + \frac{7}{2} - 14 + 4 = -\frac{29}{2}$$

$$A_{ABCD} = |D|$$

$$A_{ABCD} = \frac{29}{2}$$

24. a) $|z| = \sqrt{(-16)^2 + (12)^2} = 20$

$$b) |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$c) |z| = \sqrt{(50)^2} = 50$$

$$d) |z| = \sqrt{(-80)^2} = 80$$

25. a) $\bar{z}_1 = -2 - i$

$$|\bar{z}_1| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| =$

$$\left(\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}\right) \cdot \left(\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2}\right) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{2}$$

c) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $z_1 + z_2 = -2 + i - 3 - i = -5$

$$|z_1 + z_2| = 5$$

26. a) $|z| + i \cdot z = 1 - 3i$

$$z = a + bi$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} + i(a + bi) = \sqrt{a^2 + b^2} - b + ai$$

$$\begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} - b = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\sqrt{(-3)^2 + b^2} - b = 1$$

$$\sqrt{9 + b^2} = 1 + b$$

$$9 + b^2 = 1 + 2b + b^2$$

$$8 = 2b \Rightarrow b = 4$$

$$z = -3 + 4i$$

b) $z = \frac{3}{2} + i$

27. a) $|a + bi - 1 + i| = |a + bi - i|$

$$|a - 1 + (b + 1)i| = |a + (b - 1)i|$$

$$\sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2} = \sqrt{a^2 + (b - 1)^2}$$

$$(a - 1)^2 + (b + 1)^2 = a^2 + (b - 1)^2$$

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 + 2b + 1 = a^2 + b^2 - 2b + 1$$

$$-2a + 4b + 1 = 0$$

$$2a - 4b - 1 = 0$$

$$\text{Reta de equação } 2x - 4y - 1 = 0.$$

b) $|a - bi - 2 + 3i| = 4$

$$|(a - 2) + (3 - b)i| = 4$$

$$\sqrt{(a - 2)^2 + (3 - b)^2} = 4$$

$$(a - 2)^2 + (3 - b)^2 = 16$$

Circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$, centro $(2, 3)$ e raio 4.

c) $|a + bi + 1 - 2i| \leq 1$

$$|(a + 1) + (b - 2)i| \leq 1$$

$$\sqrt{(a + 1)^2 + (b - 2)^2} \leq 1$$

Círculo de centro $(-1, 2)$ e raio 1.

d) $|z - 2i| > 3$

$$|a + bi - 2i| > 3$$

$$|a + (b - 2)i| > 3$$

$$\sqrt{a^2 + (b - 2)^2} > 3$$

$$a^2 + (b - 2)^2 > 3^2$$

Os pontos do plano exteriores ao círculo de centro $(0, 2)$ e raio 3.

28. $z = x + yi$

$$|z + 6 - 8i| = 15$$

$$|x + yi + 6 - 8i| = 15$$

$$\sqrt{(x + 6)^2 + (y - 8)^2} = 15$$

$$(x + 6)^2 + (y - 8)^2 = 15^2$$

Circunferência de centro $C(-6, 8)$ e raio 15.

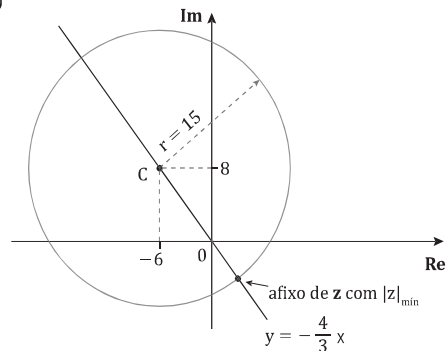
a) $r = 15$

$$d_{CO} = \sqrt{(-6 - 0)^2 + (8 - 0)^2} = 10$$

$$d_{OZ} = 5 \text{ (com } |z| \text{ mínimo)}$$

$$|z| = 5$$

b)



$$m_{\text{reta}} = \frac{8 - 0}{-6 - 0} = -\frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}x$$

29. $z = 2 + 3i$ $A(2, 3)$

$$\bar{z} = 2 - 3i$$
 $B(2, -3)$

$$-z = -2 - 3i$$
 $C(-2, -3)$

$$-\bar{z} = -2 + 3i$$
 $D(-2, 3)$

$$P = d_{AB} + d_{BC} + d_{CD} + d_{AD}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(2 - 2)^2 + (3 - (-3))^2} = 6$$

$$d_{BC} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-3 + 3)^2} = 4$$

$$d_{CD} = \sqrt{(-2 + 2)^2 + (-3 - 3)^2} = 6$$

$$d_{AD} = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 3)^2} = 4$$

$$P = 20$$

(Professor, este exercício pode ser resolvido de outras maneiras.)

30. $z_1 = i$

$$z_2 = 1 - i \Rightarrow \bar{z}_2 = 1 + i$$

$$z = z_1^3 \cdot \bar{z}_2$$

$$z = i^3 \cdot (1 + i) = -i \cdot (1 + i) = 1 - i$$

Fazer e aprender (p. 196)

31. a) $|z| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$

$$\cos \theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Então, } \theta = \frac{\pi}{4}$$

b) $|z| = \sqrt{8^2} = 8$

$$\cos \theta = \frac{8}{8} = 1$$

$$\sin \theta = \frac{0}{8} = 0$$

$$\text{Então, } \theta = 0.$$

BIS

$$c) |z| = \sqrt{(-10\sqrt{3})^2 + 10^2} = 20$$

$$\cos \theta = \frac{-10\sqrt{3}}{20} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$d) |z| = \sqrt{(-8)^2 + (-8\sqrt{3})^2} = 16$$

$$\cos \theta = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{-8\sqrt{3}}{16} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Então, } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$e) |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Então, } \theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$f) |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Então, } \theta = \frac{5\pi}{3}$$

$$32. a) |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } \theta = \frac{\pi}{6} \text{ e temos que:}$$

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$b) |z| = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2} = 12$$

$$\cos \theta = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Assim, } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ e temos que:}$$

$$z = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$c) |z| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Assim, } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ e temos que:}$$

$$z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$d) |z| = \sqrt{(-4)^2} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\sin \theta = \frac{0}{4} = 0$$

Assim, $\theta = \pi$ e temos que:

$$z = 4(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$e) |z| = \sqrt{10^2} = 10$$

$$\cos \theta = \frac{0}{10} = 0$$

$$\sin \theta = \frac{0}{4} = 0$$

Assim, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e temos que:

$$z = 10 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$f) |z| = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{7\pi}{6}$$

$$z = 4 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$$

$$33. a) z = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$b) z = 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i \right) = -3\sqrt{3} - 3i$$

$$c) z = \sqrt{8} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = -2 + 2i$$

$$34. a) \cos 2\pi = \frac{a}{10} \Rightarrow 1 = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 10$$

$$\sin 2\pi = \frac{b}{10} \Rightarrow 0 = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 0$$

$$\text{Assim, } \operatorname{Re}(z) = 10 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = 0.$$

$$b) \cos \frac{\pi}{4} = \frac{a}{1} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{b}{1} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Assim, } \operatorname{Re}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ e } \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$c) \cos 135^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -1$$

$$\sin 135^\circ = \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow b = 1.$$

$$\text{Assim, } \operatorname{Re}(z) = -1 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = 1.$$

$$d) \cos -90^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 0$$

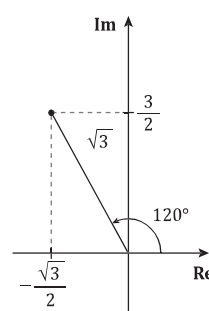
$$\sin -90^\circ = \frac{b}{2} \Rightarrow b = -2$$

$$\text{Assim, } \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = -2.$$

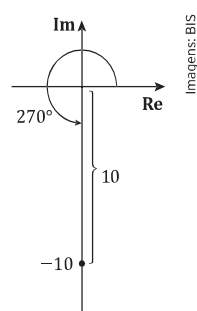
$$35. a) z = \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} i$$

$$b) z = 10(0 - 1i) = -10i$$

36. a)



b)



37. Devemos ter:

$$-2iz = 2(\cos \pi + i \cdot \sin \pi) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) \cdot \rho \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= 2\rho \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

Assim, o argumento é $\frac{7\pi}{4}$.

Alternativa e.

38. Circunferência de centro na origem e raio 2, pois:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2$$

$$x^2 + y^2 = 2^2$$

39. $m = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow m = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$

É uma semirreta que forma um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ com o semieixo positivo do eixo real.

40. a) $H_1: \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Então, } H_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$H_2: \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } H_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

$$H_3: \theta = 0 \Rightarrow \cos 0 = 1, \sin 0 = 0$$

$$\text{Então, } H_3 (1, 0).$$

$$H_4: \theta = \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \cos \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } H_4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

$$H_5: \theta = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Então, } H_5 \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$H_6: \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{2} = 0, \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\text{Então, } H_6 (0, -1).$$

$$H_7: \theta = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Então, } H_7 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$H_8: \theta = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } H_8 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right).$$

$$H_9: \theta = \pi \Rightarrow \cos \pi = -1, \sin \pi = 0$$

$$\text{Então, } H_9 (-1, 0).$$

$$H_{10}: \theta = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Então, } H_{10} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

$$H_{11}: \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Então, } H_{11} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$H_{12}: \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0, \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\text{Então, } H_{12} (0, 1).$$

b) $H_1: z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$H_2: z = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$H_3: z = \cos 0 + i \sin 0$$

$$z = 1$$

$$H_4: z = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$H_5: z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$$

$$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$H_6: z = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$z = -i$$

$$H_7: z = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$H_8: z = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$$

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$$

$$H_9: z = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$z = -1$$

$$H_{10}: z = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$$

$$H_{11}: z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$H_{12}: z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$z = i$$

Fazer e aprender (p. 200)

41. a) $z_1 \cdot z_2 = 50 (\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$

$$b) \frac{z_1}{z_2} = 2 (\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$$

$$c) z_2 : z_1 = \frac{1}{2} (\cos (-40^\circ) + i \sin (-40^\circ)) = \frac{1}{2} (\cos 320^\circ + i \sin 320^\circ)$$

$$d) \frac{1}{z_2} = \frac{1}{5} (\cos (-30^\circ) + i \sin (-30^\circ)) = \frac{1}{5} (\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$$

42. $|z| = 4$ e $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$; $|u| = 1$ e $\arg(u) = \frac{\pi}{6}$

$$|v| = 2$$
 e $\arg(v) = \frac{5\pi}{6}$

$$a) z \cdot u \cdot v = (z \cdot u) \cdot v$$

$$z \cdot u = 4 \cdot 1 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$(z \cdot u) \cdot v = 4 \cdot 1 \cdot 2 \left[\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} \right) \right]$$

$$(z \cdot u) \cdot v = 8 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 8 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -4 - 4\sqrt{3} i$$

$$b) \frac{u \cdot v}{z} = \frac{1 \cdot 2}{4} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} \right) \right]$$

$$\frac{u \cdot v}{z} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} i$$

$$c) \frac{z \cdot v}{u} = \frac{4 \cdot 2}{1} \cos \left[\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$\frac{z \cdot v}{u} = 8 [\cos \pi + i \sin \pi] = 8 [-1] = -8$$

$$d) \frac{v}{z \cdot v} = \frac{2}{4 \cdot 2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6} \right) \right]$$

$$\frac{v}{z \cdot v} = \frac{1}{4} \left[\cos \left(\frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{3} \right) \right]$$

$$\frac{v}{z \cdot v} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + i \left(\frac{-\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$\frac{v}{z \cdot v} = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} i$$

$$43. a) |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, $\theta = \frac{\pi}{4}$ e temos que:

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$b) z^8 = \left(2\sqrt{2} \right)^8 \cdot \left(\cos \frac{8\pi}{4} + i \sin \frac{8\pi}{4} \right)$$

$$z^8 = 2^{12} (1 + 0i) = 2^{12}$$

$$z^{17} = \left(2\sqrt{2} \right)^{17} \cdot \left(\cos \frac{17\pi}{4} + i \sin \frac{17\pi}{4} \right)$$

$$z^{17} = 2^{25} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 2^{25} (1 + i)$$

$$z^{26} = \left(2\sqrt{2} \right)^{26} \cdot \left(\cos \frac{26\pi}{4} + i \sin \frac{26\pi}{4} \right)$$

$$z^{26} = 2^{39} \cdot (0 + 1i) = 2^{39} i$$

$$z^{39} = \left(2\sqrt{2} \right)^{39} \cdot \left(\cos \frac{39\pi}{4} + i \sin \frac{39\pi}{4} \right)$$

$$z^{39} = 2^{58} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 2^{58} (1 - i)$$

$$44. a) z = 2 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

$$b) z^{-1} = 2^{-1} \cdot \left(\cos \frac{-11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z^{-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} i$$

$$z^{-10} = (z^{-1})^{10} = \left[\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right]^{10}$$

$$z^{-10} = \frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{1}{2^{10}} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = \frac{1}{2^{11}} - \frac{\sqrt{3}}{2^{11}} i$$

$$45. |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = z^n \cdot \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right)$$

$$a) \text{ Para ser real } \sin \frac{n\pi}{3} = 0$$

$$n \frac{\pi}{3} = 0 + k\pi$$

$$n = 3k, k \in \mathbb{Z}$$

$$b) n = 3k$$

$$\cos n \frac{\pi}{3} < 0$$

$$\cos 3k \cdot \frac{\pi}{3} < 0$$

$$\cos k\pi < 0$$

k natural, então $k = 1$, pois $\cos \pi = -1$.

$$n = 3k$$

$$n = 3$$

$$46. |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}^n \left(\cos n \frac{\pi}{4} + i \sin n \frac{\pi}{4} \right)$$

a) Para z ser imaginário puro com coeficiente negativo:

$$\cos n \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\cos n \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$n \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow n = 2$$

$$b) \frac{n\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$n = 6 + 8k, k \in \mathbb{Z}$$

$$47. |z + 1 + i| \leq 1$$

$$a) z = a + bi$$

$$a + bi + 1 + i = (a + 1) + (b + 1)i$$

$$|z + 1 + i| = \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 1)^2}$$

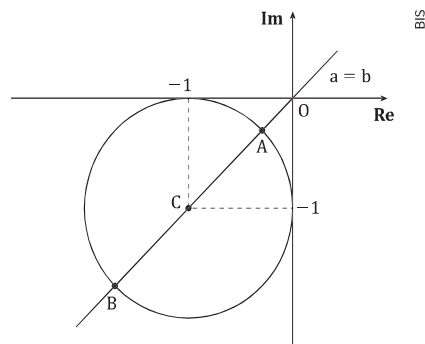
$$0 \leq \sqrt{(a + 1)^2 + (b + 1)^2} \leq 1$$

$$0 \leq (a + 1)^2 + (b + 1)^2 \leq 1$$

$C(-1, -1)$ e raio 1

Menor argumento:

$$\theta = \pi \Rightarrow z = -1$$



$$b) \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z = -i$$

$$c) |z| = OA = OC - AC = \sqrt{2} - 1$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = (\sqrt{2} - 1) \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$z = (\sqrt{2} - 1) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$$

$$z = -1 - i + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

$$z = \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left(-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$d) |z| = OB = OA + AB = \sqrt{2} - 1 + 2 = 1 + \sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = (\sqrt{2} + 1) \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$z = (\sqrt{2} + 1) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$z = \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + i \left(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$48. a) z^n + z^{-n} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) + \cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta)$$

Como $\cos(-n\theta) = \cos(n\theta)$ e $\sin(-n\theta) = -\sin(n\theta)$, temos que:

$$z^n + z^{-n} = 2 \cos(n\theta)$$

$$b) z^n - z^{-n} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) - \cos(-n\theta) - i \sin(-n\theta)$$

$$z^n - z^{-n} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) - \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

$$z^n - z^{-n} = 2i \sin(n\theta)$$

$$49. x = \cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ$$

$$x^2 = (\cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ)^2 = \cos^2 15^\circ + 2 \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ i + \sin^2 15^\circ i^2$$

$$x^2 = \cos 30^\circ + \sin 30^\circ i = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$x^4 = (x^2)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x^6 = x^4 \cdot x^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = i$$

$$x^{10} = x^4 \cdot x^6 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) i = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

Então:

$$2x^{10} - x^6 + \sqrt{3} = 0$$

$$2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) - i + \sqrt{3} = 0$$

$$0 = 0$$

Portanto, $\cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ$ é solução da equação.

$$50. \text{ Consideramos que } z = a + bi, \text{ então temos que}$$

$$\frac{i \cdot z}{z} = \frac{-2ab + (a^2 - b^2)i}{a^2 + b^2}. \text{ Como } \frac{i \cdot z}{z} \text{ é real, então temos que } a = b.$$

$$a) \text{ Portanto, } |z| = |\operatorname{Re}(z)| \cdot \sqrt{2}, \text{ pois:}$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + a^2} \Rightarrow |z| = a \cdot \sqrt{2}$$

$$b) \text{ Como } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{2}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Portanto, } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{7\pi}{4}.$$

$$51. \theta = 60^\circ \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow z^2 = |z|^2 [\cos(2 \cdot 60^\circ) + i \sin(2 \cdot 60^\circ)]$$

$$z^2 = |z|^2 [\cos(120^\circ) + i \sin(120^\circ)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\bar{z})^2 = |z|^2 [\cos(240^\circ) + i \sin(240^\circ)]$$

Alternativa c.

$$52. \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^n = \cos \frac{n\pi}{8} + i \sin \frac{n\pi}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{n\pi}{8} < 0. \text{ Assim, } \pi < \frac{n\pi}{8} < 2\pi.$$

Logo, o menor inteiro é 9.

Alternativa e.

Fazer e aprender (p. 204)

$$53. a) 5 + 12i = (a + bi)^2$$

$$5 + 12i = a^2 + 2abi + b^2i^2$$

$$5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & \text{I} \\ 2ab = 12 \Rightarrow ab = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{b} & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{II em I: } \left(\frac{6}{b} \right)^2 - b^2 = 5$$

$$\frac{36}{b^2} - b^2 = 5$$

$$36 - b^4 = 5b^2$$

$$b^4 + 5b^2 - 36 = 0$$

$$b^2 = t: t^2 + 5t - 36 = 0$$

$$\Delta = 25 + 144 = 169$$

$$t = \frac{-5 \pm 13}{2} \begin{cases} t = 4 \\ t = -9 \end{cases}$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \text{ ou } b = -2$$

ou $b^2 = -9$ (não convém)

$$\text{Para } b = 2, \text{ temos: } a = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Para } b = -2, \text{ temos: } a = \frac{6}{-2} = -3$$

$$\therefore \sqrt{5 + 12i} = 3 + 2i \text{ ou } \sqrt{5 + 12i} = -3 - 2i$$

$$b) 12 + 16i = (a^2 + bi)$$

$$12 + 16i = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\begin{cases} 12 = a^2 - b^2 & \text{I} \\ 16 = 2ab \Rightarrow ab = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{b} & \text{II} \end{cases}$$

$$\text{II em I: } \left(\frac{8}{b} \right)^2 - b^2 = 12$$

$$64 - b^4 = 12b^2$$

$$b^4 + 12b^2 - 64 = 0$$

$$b^2 = t: t^2 + 12t - 64 = 0$$

$$\Delta = 144 + 256 = 400$$

$$t = \frac{-12 \pm 20}{2} \begin{cases} t = 4 \\ t = -16 \end{cases}$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \text{ ou } b = -2$$

ou $b^2 = -16$ (não convém)

$$\text{Para } b = 2, \text{ temos: } a = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Para } b = -2, \text{ temos: } a = \frac{8}{-2} = -4$$

$$\therefore \sqrt{12 + 16i} = 4 + 2i \text{ ou } \sqrt{12 + 16i} = -4 - 2i$$

$$c) i = (a + 2bi)^2$$

$$i = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \text{ ou } a = -b \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

$$\text{Para } a = b, \text{ temos: } 2a^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \begin{cases} a = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Para } a = -b: -2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = -\frac{1}{2} \text{ (não convém)}$$

$$\therefore \sqrt{i} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ ou } \sqrt{i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$d) -2i = (a + bi)^2$$

$$-2i = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \text{ ou } a = -b \\ 2ab = -2 \end{cases}$$

$$\text{Para } a = b, \text{ temos: } 2a^2 = -2 \Rightarrow a^2 = -1 \text{ (não convém)}$$

$$\text{Para } a = -b, \text{ temos: } -2b^2 = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = 1 \begin{cases} b = 1 \Rightarrow a = -1 \\ b = -1 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \sqrt{-2i} = -1 + i \text{ ou } \sqrt{-2i} = 1 - i$$

54. a) $\Delta = 4 + 32i - 64 + 60 = 32i$

Raízes quadradas de $32i$

$$(a + bi)^2 = 32i$$

$$a^2 + 2abi - b^2 = 32i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 32 \end{cases}$$

$$2ab = 32$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$a = 4, b = 4 \text{ ou } a = -4, b = -4$$

$$z = \frac{2 + 8i \pm (4 + 4i)}{2}$$

$$z = -1 + 2i \text{ ou } z = 3 + 6i$$

$$S = \{-1 + 2i, 3 + 6i\}$$

b) $z^2 - (-1 + 2i)z - 7 - i = 0$

$$\Delta = 1 - 4i - 4 + 28 + 4i = 25$$

$$z = \frac{-1 + 2i \pm 5}{2}$$

$$z = 2 + i \text{ ou } z = -3 + i$$

$$S = \{2 + i, -3 + i\}$$

55. a) $-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

$$w_0 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{3\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{3\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi + 2\pi}{3} \right) = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{3\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{3\pi + 4\pi}{3} \right) = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$S = \left\{ i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$$

b) $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$

$$w_0 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} \right) = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} \right) = \cos \frac{9\pi}{6} + i \sin \frac{9\pi}{6} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i \right\}$$

c) $-8 = 8(\cos \pi + i \sin \pi)$

$$w_0 = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$w_1 = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{3} \right) = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2$$

$$w_2 = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 4\pi}{3} \right) =$$

$$= 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \sqrt{3}i$$

$$S = \{1 + \sqrt{3}i, -2, 1 - \sqrt{3}i\}$$

d) $1 = \cos 0 + i \sin 0$

$$w_0 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{0}{3} + i \sin \frac{0}{3} \right) = 1$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{0 + 2\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{0 + 4\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 4\pi}{3} \right) = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$S = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

56. a) $-32 + 32\sqrt{3}i$

$$\sqrt{(-32)^2 + (32\sqrt{3})^2} = 2 \cdot 32 = 64$$

$$\cos \theta = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \cos \theta = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{32\sqrt{3}}{64} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{32\sqrt{3}}{64} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_0 = \sqrt[4]{64} \left(\cos \frac{2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$$

$$w_1 = \sqrt[4]{64} \left(\cos \frac{2\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi + 2\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i$$

$$w_2 = \sqrt[4]{64} \left(\cos \frac{2\pi + 4\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi + 4\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{6} - \sqrt{2}i$$

$$w_3 = \sqrt[4]{64} \left(\cos \frac{2\pi + 6\pi}{4} + i \sin \frac{2\pi + 6\pi}{4} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$$

$$S = \{ \sqrt{6} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{6}i, -\sqrt{6} - \sqrt{2}i, \sqrt{2} - \sqrt{6}i \}$$

b) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\rho = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{4\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{4} \right) = \\
 &= 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \\
 w_1 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4} \right) = \\
 &= 1 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot i \\
 w_2 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 4\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 4\pi}{4} \right) = \\
 &= 1 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \\
 w_3 &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{\frac{4\pi}{3} + 6\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\frac{4\pi}{3} + 6\pi}{4} \right) = \\
 &= 1 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot i
 \end{aligned}$$

57. $\sqrt{z} = \pm(a + bi)$

$$\sqrt{z} = \pm(-2 + 3i)$$

Assim, $w_0 = -2 + 3i$ e $w_1 = 2 - 3i$.

$$z = (-2 + 3i)^2$$

$$z = 4 - 12i - 9$$

$$z = -5 - 12i$$

Assim, $w_1 = 2 - 3i$ e $z = -5 - 12i$.

58. $w_0 = -2i$

$$|w_0| = 2$$

Temos $\cos \alpha_0 = 0$, $\sin \alpha_0 = -1$

e $\alpha_0 = 270^\circ$.

Todas as outras raízes terão módulo igual a w_0 .

Os argumentos principais de w_1 , w_2 , w_3 , w_4 e w_5 são, respectivamente:

$$270^\circ + 60^\circ, 270^\circ - 60^\circ, 270^\circ - 120^\circ, 270^\circ - 180^\circ,$$

$$270^\circ - 240^\circ, \text{ logo:}$$

$$w_1 = 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) = \sqrt{3} - i$$

$$w_2 = 2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ) = -\sqrt{3} - i$$

$$w_3 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_4 = 2(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) = 2i$$

$$w_5 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$$

59. a) $x^2 = y$

$$y^2 + 5y - 36 = 0$$

$$\Delta = 25 + 144 = 169$$

$$y = \frac{-5 \pm 13}{2}$$

$$y = -9 \text{ ou } y = 4$$

$$x^2 = -9 \text{ ou } x^2 = 4$$

$$x = \pm 3i \text{ ou } x = \pm 2$$

$$S = \{-3i, 3i, -2, 2\}$$

b) $x^3 = y$

$$y^2 - 7y - 8 = 0$$

$$\Delta = 49 + 32 = 81$$

$$y = \frac{7 \pm 9}{2}$$

$$y = 8 \text{ ou } y = -1$$

$$x^3 = 8$$

Raízes cúbicas de $z = 8$

$$|z| = 8, \cos \theta = 1, \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

$$w_0 = \sqrt[3]{8} (\cos 0 + i \sin 0) = 2$$

$$w_1 = \sqrt[3]{8} (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$w_2 = \sqrt[3]{8} (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -1 - \sqrt{3}i$$

$$x^3 = -1 \text{ (raízes cúbicas de } z = -1)$$

$$|z| = 1, \cos \theta = -1, \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 180^\circ$$

$$w_0 = \sqrt[3]{1} (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1} (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = -1$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1} (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$S = \left\{ -1, 2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right\}$$

c) $S = \{1 - i, -2 + 2i, -5 - i, -2 - 4i\}$

d) $S = \{1 - i, -1 - 3i\}$

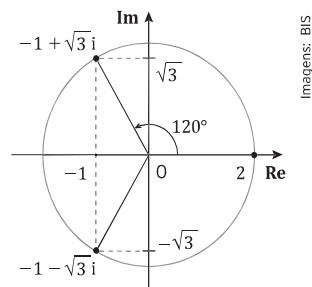
60. Raízes cúbicas de $z = 8$:

$$|z| = 8, \cos \theta = 1, \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

$$w_0 = \sqrt[3]{8} (\cos 0 + i \sin 0) = 2$$

$$w_1 = \sqrt[3]{8} (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$w_2 = \sqrt[3]{8} (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -1 - \sqrt{3}i$$



61. $(a + bi)^2 = 5 - 12i$

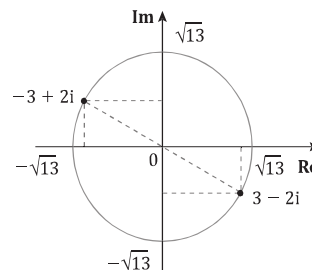
$$a^2 + 2ab - b^2 = 5 - 12i$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = -12 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, $a = 3$, $b = -2$ e $a = -3$, $b = +2$.

$$w_0 = 3 - 2i$$

$$w_1 = -3 + 2i$$



62. Pelos afixos no plano complexo, temos um triângulo com base $\sqrt{3}$ e altura 1,5.

$$\text{A sua área é dada por: } A = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Alternativa c.

Foco na tecnologia – Calculadora (p. 204)

1. $\text{tg } 68^\circ = \frac{x + 6,3}{57,2} \Rightarrow x = (\text{tg } 68^\circ \cdot 57,2) - 6,3$

$$x = (2,48 \cdot 57,2) - 6,3 \Rightarrow x \approx 135,6$$

A largura do rio é de aproximadamente 135,6 m.

2. a) $\bar{X} = \frac{10 \cdot 500 + 5 \cdot 1000 + 1 \cdot 1500 + 10 \cdot 2000 + 4 \cdot 5000 + 1 \cdot 10500}{31}$
 $\bar{X} = \text{R\$ } 2\,000,00$
 $Me = \text{R\$ } 1\,500,00$
- b) Menor, pois o numerador continuará igual e o denominador aumentará em duas unidades.

Aprender a aprender (p. 205)

1. a) $f(x) = ax + b$
 $f(5) = 0 \Rightarrow 5a + b = 0$
 $f(0) = 3 \Rightarrow b = 3$
Substituindo $b = 3$ em $5a + b = 0$, temos:
 $5a + 3 = 0$
 $a = \frac{-3}{5}$
 $f(x) = \frac{-3}{5}x + 3$
- b) $f(x) > 0$ para $x < 5$
 $f(x) = 0$ para $x = 5$
 $f(x) < 0$ para $x > 5$
- c) $D = \mathbb{R}$
 $Im = \mathbb{R}$
2. $\text{tg } 60^\circ = \frac{d}{50} = \sqrt{3}$
 $d = 50\sqrt{3} \text{ m} \Rightarrow d \approx 87 \text{ m}$
3. $\begin{cases} 20x + 10y + 2z = 94 \\ 10x + 6y + 3z = 65 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20x + z = 47 \\ 22x + 3z = 65 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow \begin{cases} -60x - 3z = -141 \\ 22x + 3z = 65 \\ y = 2x \end{cases}$

Somando as duas primeiras equações: $-38x = -76 \Rightarrow x = 2$

Assim: $3z = 65 - 22x \Rightarrow 3z = 21 \Rightarrow z = 7$

Logo, $z = n = 7$. Como $7 \cdot 11 = 77$, n é um divisor de 77.

Alternativa c.

4. a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 12 & 1 & 1 \\ 14 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -15$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 3 & 14 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 3 & -1 & 14 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 108$$

Impossível, pois $D = 0$ e $D_x \neq 0$ e $D_y \neq 0$ e $D_z \neq 0$.

b) $D = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Possível, indeterminado.

5. I. Correta. Devemos ter: $t \in (t_3, t_7)$, $f(t) = 1,5$
II. Errada. $f(0) = 0$ e, ainda, $f(0) = \cos 0 + 2 = 3 \neq 0$.
III. Errada. Para todo $t \in (t_3, t_{10})$, $f(t) = m \cdot t + b$, com $m < 0$.
IV. Correta: $0 \leq f(t) \leq 2$, para todo $t \in [0, t_{10}]$.
E, ainda, $f(t_2) = 2$

Alternativa b.

6. Considere: V_1 e V_2 os vértices das pirâmides; O_1 e O_2 são os centros dos quadrados das bases. Como os volumes são iguais, temos:

$$\frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot O_1 V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_2 \cdot O_2 V_2$$

$$A_1 = A_2:$$

$$2 \cdot A_2 \cdot O_1 V_1 = A_2 \cdot O_2 V_2 \Rightarrow O_2 V_2 = 2 \cdot O_1 V_1$$

$$O_2 V_2 = 100 \text{ m} \Rightarrow O_1 V_1 = 50 \text{ m}$$

$$V_1 P = O_1 O_2 = 120 \text{ m} \text{ e } V_2 P = 100 \text{ m} - 50 \text{ m} = 50 \text{ m}$$

Considerando o triângulo $V_1 V_2 P$ (sendo P o ponto médio de $\overline{V_2 O_2}$), temos:

$$V_1 V_2^2 = 50^2 + 120^2 \Rightarrow V_1 V_2 = 130 \text{ m}$$

Alternativa c.

7.

		\otimes	1	\triangle	\otimes	\oplus
\times				4	1	7
		$7\otimes$	7	$7\triangle$	$7\otimes$	$7\oplus$
	\otimes	1	\triangle	\otimes	\oplus	
$4\otimes$	4	\triangle	$4\otimes$	$4\oplus$		
	9	\oplus	∇	\oplus	0	5
	$7 \cdot \oplus = 7$	$\Leftrightarrow \oplus = 1$				
	$7 \cdot \otimes + 1 = 15$	$\Leftrightarrow \otimes = 2$				
	$7 \cdot \triangle + \otimes + 4 \cdot \oplus + 1 = 70$	\Leftrightarrow				
	$\Leftrightarrow 7 \cdot \triangle + 2 + 4 \cdot 1 + 1 = 70$	\Leftrightarrow				
	$\Leftrightarrow \triangle = 9$					
	$7 + 7 + \triangle + 4\otimes = 7 + 7 + 9 + 4 \cdot 2 = 31$					
	$3 + 7\otimes + 1 + 4\triangle = 50 + \nabla$	\Leftrightarrow				
	$\Leftrightarrow 3 + 7 \cdot 2 + 1 + 4 \cdot 9 = 50 + \nabla$	\Leftrightarrow				
	$\Leftrightarrow \nabla = 4$					

Alternativa e.

8. Considere o lado do hexágono $AB = x$ e y a altura de um triângulo equilátero da base:

$$\frac{6x^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

A área de um triângulo da base é:

$$\frac{x \cdot y}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot y = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$$

Alternativa e.

9. Diâmetro do círculo é igual a diagonal do quadrado.

$$\text{Então: } 2r = \sqrt{7} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi \left(\frac{\sqrt{14}}{2} \right)^2 = \frac{14\pi}{2} \Rightarrow A_{\text{círculo}} = \frac{7\pi}{2} \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{quadrado}} = (\sqrt{7})^2 = 7 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{destacada}} = 8 \cdot 7 + \left(\frac{7\pi}{2} - 7 \right) \Rightarrow A_{\text{destacada}} = \left(49 + \frac{7\pi}{2} \right) \text{ cm}^2$$

$$\text{A área procurada é } \left(49 + \frac{7\pi}{2} \right) \text{ cm}^2.$$

10. Pela tabela, 24% da população é formada por jovens.

Assim, o ângulo central é: $0,24 \cdot 360^\circ = 86,4^\circ \approx 86^\circ$

Alternativa a.

CAPÍTULO 10

Fazer e aprender (p. 207)

1. $0, -1, 1, \frac{1}{2}, 2, -i, i, 2i$

$$P(x) = 2x^3 - (1 + 2i)x^2 + (4 + i)x - 2$$

$$P(0) = -2 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz}$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 \cdot (1 + 2i) - 1(4 + i) - 2 =$$

$$= -2 - 1 - 2i - 4 - i - 2 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz}$$

$$P(1) = 2(1)^3 - 1^2(1 + 2i) + 1(4 + i) - 2 =$$

$$= 2 - 1 - 2i + 4 + i - 2 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz}$$

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (1 + 2i) + \frac{1}{2}(4 + i) - 2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1 + 2i) + 2 + \frac{i}{2} - 2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{i}{2} + 2 + \frac{i}{2} - 2 = 0 \rightarrow \text{é raiz}$$

$$P(2) = 2 \cdot 3^2 - 2^2(1 + 2i) + 2(4 + i) - 2 = 16 - 4 - 8i +$$

$$+ 8 + 2i - 2 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz}$$

$$P(i) = 2i^3 - i^2(1 + 2i) + i(4 + i) - 2 = -2i + 1 + 2i + 4i - 1 - 2 \neq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{não é raiz}$$

$$P(-i) = 2(-i)^3 - (-i)^2(1 + 2i) - i(4 + i) - 2 = 0 \rightarrow \text{é raiz}$$

$$P(2i) = 2(2i)^3 - (2i)^2(1 + 2i) + 2i(4 + i) - 2 = 2 \cdot 8i^3 + 4(1 + 2i) +$$

$$+ 8i - 2 - 2 = -16i + 4 + 8i + 8i - 2 - 2 = 0 \rightarrow \text{é raiz}$$

$$2i, -i, \frac{1}{2} \text{ são raízes}$$

2. a) $x^3 + mx - m - 1 = 0$

$$(-2)^3 + m(-2) - m - 1 = 0$$

$$-8 - 2m - m - 1 = 0$$

$$-3m = 9$$

$$m = -3$$

- b) $1^3 + m - m - 1 = 0$

$$1 \text{ é solução para qualquer } m \in \mathbb{C}.$$

Fazer e aprender (p. 210)

3. a) $P(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x^2 - 6x + 8)$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4$$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 2$$

As raízes são 4 e 2.

$$P(x) = 3(x-4)(x-2)$$

- b) $P(x) = 5x^3 - 30x^2 + 55x - 30 = 5(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

2	1	-6	11	-6
	1	-4	3	0

$$P(x) = 5(x-2)(x^2 - 4x + 3)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

As raízes são 1, 2 e 3.

$$P(x) = 5(x-1)(x-2)(x-3)$$

- c) $P(x) = 2x^4 + 2x^3 - 22x^2 - 18x + 36 =$

$$= 2(x^4 + x^3 - 11x^2 - 9x + 18)$$

1	1	1	-11	-9	18
-2	1	2	-9	-18	0
	1	9	-9		

$$P(x) = 2(x-1)(x-3)(x+3)(x+2)$$

4. $P(x) = 2x^3 - (m+3)x^2 + 11x - m$

$$P(1) = 0$$

$$2 \cdot 1^3 - (m+3)1^2 + 11 \cdot 1 - m = 0$$

$$2 \cdot (-m) - 3 + 11 = 0$$

$$2m = 10$$

$$m = 5$$

$$2x^3 - 8x^2 + 11x - 5 = 0$$

1	2	-8	11	-5
	2	-6	5	0

$$(x-1)(2x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$2x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Delta = 36 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -4$$

$$x = \frac{6 \pm 2i}{4} = \frac{3}{2} \pm \frac{i}{2}$$

$$\text{As outras raízes são } \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \text{ e } \frac{3}{2} - \frac{i}{2}.$$

5. $x^3 + 2(m-1)x^2 + 2(1-2m)x - 4 = 0$

2	1	2m-2	2-4m	-4
	1	2m	2	0

$$x^3 + 2mx + 2 = 0$$

Para as outras raízes serem reais, $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = 4m^2 - 8 \geq 0$$

$$m \leq -\sqrt{2} \text{ ou } m \geq \sqrt{2}$$

6. Pelo dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

-3	1	0	-4	15
	1	-3	5	0

$$\text{Então: } x^3 - 4x + 15 = (x^2 - 3x + 5)(x + 3)$$

Para verificar os tipos de raízes de $(x^2 - 3x + 5)$, podemos determinar o discriminante:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 < 0. \text{ Portanto, } x^3 - 4x + 15 = 0$$

possui apenas uma raiz real.

7. Verifica-se que 2 é raiz da equação. Aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, temos:

2	1	-(3+2i)	(1+5i)	2-2i
	1	-1-2i	-1+i	0

$$\text{Então: } x^3 - (3+2i)x^2 + (1+5i)x + 2-2i =$$

$$= (x^2 - (1+2i)x - 1 + i)(x - 2)$$

Para determinar as outras raízes de $(x^2 - (1+2i)x - 1 + i)$, podemos utilizar Bhaskara:

$$\Delta = (-1-2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1+i) = 1$$

$$x = \frac{1+2i \pm 1}{2} \begin{cases} x = 1+i \\ x = i \end{cases}$$

$$S = \{2, 1+i, i\}$$

8.

3	1	-8	18	0	-27
3	1	-5	3	9	0
3	1	-2	-3	0	
3	1	1	0		
	1		4		

9. $3x^4 + 7x^3 - 6x^2 - 12x + 8 = 0$

-2	3	7	-6	-12	8
-2	3	1	-8	4	0
	3	5	-2	0	

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = 1 \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

$$S = \left\{-2, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

10. a) $(x+3) \cdot (x-(2+i)) \cdot (x-(2-i)) = x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0$

$$\text{b) } (x-2)^3 \cdot (x-i)^2 \cdot (x+2i) = 0$$

- 11.

2	1	-4-m	4+4m	-4m
2	1	-2-m	2m	0
	1	-m	0	

$$\forall m \in \mathbb{R}$$

12. Usando Briot-Ruffini:

1	1	25	3	5	24
1	1	24	21	4	0
	1	23	24		0

Escrevendo a forma polinomial, temos:

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 5x - 4$$

$$P(x) = (x - 1)^2(x^2 - 3x - 4)$$

$$P(x) = (x - 1)^2(x - 4)(x + 1)$$

Dessa maneira, -1 e 4 são as outras raízes cuja diferença vale 5.

Alternativa a.

13.

1	1	-1	-m	$m^2 - 2m + 2$	$3m - 11$
1	1	0	-m	$m^2 - 3m + 2$	$m^2 - 9$
1	1	1	$1 - m$	$m^2 - 4m + 3$	
	1	2	$3 - m$		

a) $m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3$. $m = 3$ ou $m = -3$

b) $m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3$

$$m^2 - 4m + 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq 3 \text{ ou } m \neq 1$$

Logo, $m = -3$.

c) $m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \text{ ou } m = 1$$

$$3 - m \neq 0 \Rightarrow m \neq 3$$

Logo, $\nexists m$

d) $m^2 - 9 = 0 \Rightarrow m = \pm 3$

$$m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow m = 3 \text{ ou } m = 1$$

$$3 - m = 0 \Rightarrow m = 3$$

Sim, para $m = 3$.

Fazer e aprender (p. 212)

14. Pelas relações de Girard:

a) $\alpha + \beta = \frac{7}{3}$

b) $\alpha \cdot \beta = \frac{5}{3}$

c) $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha \cdot \beta} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{7}{5}$

d) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta = \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{3} = \frac{49}{9} - \frac{10}{3} = \frac{49 - 30}{9} = \frac{19}{9}$

15. Pelas relações de Girard:

a) $m + n + p = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$

b) $mn + mp + np = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

c) $mnp = -\frac{d}{a} = \frac{2}{2} = 1$

16. Pelas relações de Girard:

a) $m + n + p + q = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$

b) $mn + mp + mq + np + nq + pq = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$

17. Sejam m, n e p raízes da equação:

$$m + n + p = 9 \text{ (pelas relações de Girard)}$$

$$m + n = 6 \Rightarrow p = 3$$

3	1	-9	26	-24
	1	-6	8	4

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4$$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = 2$$

$$S = \{2, 3, 4\}$$

18. Sejam m, n e p raízes da equação:

$$m + n + p = 3 \text{ (pelas relações de Girard)}$$

$$m = n - p \text{ (pelo enunciado)}$$

Substituindo:

$$n - p + n + p = 3 \Rightarrow n = \frac{3}{2}$$

$\frac{3}{2}$	4	-12	11	-3
	4	-6	-2	0

$$4x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$$

$$S = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

19. Sejam m, n e p raízes da equação:

$$m + n + p = 9 \text{ (pelas relações de Girard)}$$

$$m = 2(n + p) \text{ (pelo enunciado)}$$

Substituindo:

$$2(n + p) + n + p = 9 \Rightarrow 3(n + p) = 9 \Rightarrow n + p = 3$$

$$\text{E como } a = 2 \cdot (n + p) \Rightarrow m = 6$$

6	1	-9	20	-12
	1	-3	2	0

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

$$S = \{1, 2, 6\}$$

20. Sejam m, n e p raízes da equação (pelas relações de Girard):

a) $V = mnp = -\frac{d}{a} = \frac{180}{1} \Rightarrow V = 180 \text{ cm}^3$

b) $A_T = 2(mn + mp + np) = 2 \cdot \frac{c}{a} = 2 \cdot 108 \Rightarrow A_T = 216 \text{ cm}^2$

21. Sejam m, n e p raízes da equação:

$$m + n + p = 12 \text{ (pelas relações de Girard)}$$

$$(m, n, p) \text{ estão em P.A.} \rightarrow m = n - r; p = n + r \text{ (pelo enunciado)}$$

Substituindo:

$$n - r + n + n + r = 12 \Rightarrow 3n = 12 \Rightarrow n = 4$$

	1	-12	49	-68
6	1	-8	17	0

$$x^2 - 8x + 17 = 0$$

$$\Delta = 64 - 68 = -4$$

$$x = \frac{8 \pm 2i}{2} \Rightarrow x = 4 + i \text{ ou } x = 4 - i$$

$$S = \{4 - i, 4 + i, 4\}$$

22. Sejam m, n e p raízes da equação:

$$m \cdot n \cdot p = -8i = 8i^3 = (2i)^3 \text{ (pelas relações de Girard)}$$

$$(m, n, p) \text{ estão em P.G.} \rightarrow m = \frac{n}{q}; p = nq \text{ (pelo enunciado)}$$

Substituindo:

$$\frac{n}{q} \cdot nnq = (2i)^3 \Rightarrow n^3 = (2i)^3 \Rightarrow n = 2i$$

2i	1	-3 - 2i	-4 + 6i	8i
	1	-3	-4	0

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Delta = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{3 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 4 \text{ ou } x = -1$$

$$S = \{-1, 2i, 4\}$$

23. Sejam m e n raízes da equação.

Pelas relações de Girard:

$$m + m + n + n = 1 \Rightarrow m + n = \frac{1}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{2} - m \quad \textcircled{1}$$

$$m \cdot m \cdot n + m \cdot m \cdot n + m \cdot n \cdot n + m \cdot n \cdot n = -\frac{6}{4}$$

$$2m^2 \cdot n + 2 \cdot mn^2 = -\frac{6}{4}$$

$$2mn(m + n) = -\frac{6}{4}$$

$$2m \cdot n \cdot \frac{1}{2} = -\frac{6}{4}$$

$$m \cdot n = -\frac{3}{2} \quad \textcircled{2}$$

Substituindo ① em ②:

$$m \cdot \left(\frac{1}{2} - m \right) = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2}m - m^2 = -\frac{3}{2}$$

$$2m^2 - m - 3 = 0 \Rightarrow m = -1 \text{ ou } m = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ -1, \frac{3}{2} \right\}$$

24. Usando as relações de Girard:

$$3 + \frac{1}{3} = \frac{6}{a} \Rightarrow a = \frac{9}{5}$$

$$3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{p}{a} \Rightarrow a = p$$

$$\text{Assim, } a + p = 2a = \frac{18}{5}$$

Alternativa d.

25. Considere: a, aq e aq² as raízes da equação.

A partir das relações de Girard, temos:

$$a + aq + aq^2 = -\frac{(-7)}{1} \Rightarrow a(1 + q + q^2) = 7$$

$$a \cdot aq + a \cdot aq^2 + aq \cdot aq^2 = \frac{-28}{1} \Rightarrow aq \cdot a(1 + q + q^2) = -28$$

$$a + aq + aq^2 = \frac{-k}{1} \Rightarrow (aq)^3 = -k$$

$$\text{Logo, } aq \cdot 7 = -28 \Leftrightarrow aq = -4$$

$$\text{e, portanto, } (aq)^3 = -k \Leftrightarrow (-4)^3 = -k \Leftrightarrow k = 64$$

26. Pelo produto das raízes, temos:

$$m \cdot p \cdot q = \frac{-(-8)}{1} = 8$$

$$\text{Assim: } \log_2 m + \log_2 p + \log_2 q = \log_2 (m \cdot p \cdot q) = \log_2 8 = 3$$

Alternativa c.

$$27. \begin{cases} m^3 - m^2 + m - 2 = 0 \\ n^3 - n^2 + n - 2 = 0 \\ p^3 - p^2 + p - 2 = 0 \end{cases}$$

Somando as equações, temos

$$(m^3 + n^3 + p^3) - (m^2 + n^2 + p^2) + (m + n + p) - 6 = 0 \text{ (A)}$$

$$m + n + p = -\frac{(-1)}{1} = 1 \text{ (B)}$$

$$(m + n + p)^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2 \cdot (mn + mp + np)$$

$$1^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2 \cdot \frac{1}{1}$$

$$m^2 + n^2 + p^2 = -1 \text{ (C)}$$

Substituindo (B) e (C) em (A), temos:

$$m^3 + n^3 + p^3 - (-1) + 1 - 6 = 0$$

$$(m^3 + n^3 + p^3) - 4 = 0$$

$$(m^3 + n^3 + p^3) = 4$$

Alternativa d.

Fazer e aprender (p. 214)

28. a) Como os coeficientes são reais, temos que, se um número imaginário é raiz, o conjugado desse número também é. Logo, a outra raiz é $5 - 3i$.

b) $1 + 2i$ e $-3 - i$ (mesmo motivo do item a)

29. $2x^3 - 3x^2 + 2x + 2$

$1 + i$ é raiz.

$$2x^3 - 3x^2 + 2x + 2 = (x - 1 - i)(x - 1 + i)(ax + b) =$$

$$= [(x - 1)^2 + 1](ax + b) = (x^2 - 2x + 2)(ax + b) =$$

$$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (-2b + 2a)x + (2b)$$

$$a = 2$$

$$b - 2a = -3 \Rightarrow b = -3 + 4 \Rightarrow b = 1$$

$$ax + b = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ 1 - i, 1 + i, -\frac{1}{2} \right\}$$

30. $3x^4 - 11x^3 + 27x^2 - 29x + 10 = 0$

$$3x^4 - 11x^3 + 27x^2 - 29x + 10 = (x - 1 - 2i)(x - 1 + 2i)(ax^2 + bx + c) =$$

$$= [(x - 1)^2 + 4](ax^2 + bx + c) = (x^2 - 2x + 5)(ax^2 + bx + c) =$$

$$= ax^4 + (b - 2a)x^3 + (c - 2b + 5a)x^2 + (-2c + 5b)x + 5c$$

$$a = 3$$

$$b - 2a = -11 \Rightarrow b = -11 + 6 \Rightarrow b = -5$$

$$c - 2b + 5a = 27 \Rightarrow c - 2(-5) + 5 \cdot 3 = 27 \Rightarrow c = 27 - 25 \Rightarrow c = 2$$

$$ax^2 + bx + c = 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{6} \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$S = \left\{ 1, 1 - 2i, 1 + 2i, \frac{2}{3} \right\}$$

31. a) Se os coeficientes são reais e $4 - i$ é raiz, temos que $4 + i$ também é:

$$\begin{aligned} (x - 2) \cdot ((x - (4 - i)) \cdot (x - (4 + i))) &= \\ = (x - 2) \cdot (x - 4 + i) \cdot (x - 4 - i) &= (x - 2) \cdot (x^2 - 8x + 17) \\ x^3 - 10x^2 + 33x - 34 &= 0 \end{aligned}$$

b) Coeficientes complexos:

$$(x - 2) \cdot ((x - (4 - i)) \cdot (x - (4 + i))) = (x - 2) \cdot (x^2 - 8x + 17)$$

$$x^3 - 10x^2 + 33x - 34 = 0$$

32. a) Como os coeficientes são reais, temos que, se um número imaginário é raiz, o conjugado desse número também é e com mesma multiplicidade:

$$2 - 5i \rightarrow \text{multiplicidade } 2$$

$$2 + 5i \rightarrow \text{multiplicidade } 2$$

$$8 \rightarrow \text{multiplicidade } 3$$

$$-2 + i \rightarrow \text{multiplicidade } 1$$

$$-2 - i \rightarrow \text{multiplicidade } 1$$

$$2 + 2 + 3 + 1 + 1 = 9 \text{ (raízes)} \rightarrow \text{grau é } 9$$

b) Coeficientes complexos:

$$2 - 5i \rightarrow \text{multiplicidade } 2$$

$$8 \rightarrow \text{multiplicidade } 3$$

$$-2 + i \rightarrow \text{multiplicidade } 1$$

$$2 + 3 + 1 = 6 \text{ (raízes)} \rightarrow \text{grau é } 6$$

i	3	-5	8	-10	7	-5	2
-i	3	-5 + 3i	5 - 5i	-5 + 5i	2 - 5i	2i	0
i	3	-5	5	-5	2	0	
-i	3	-5 + 3i	2 - 5i	2i	0		
	3	-5	2	0			

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{6} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

$$S = \left\{ 1, -i, i, \frac{2}{3} \right\}$$

b)

2i	2	-1	15	-8	24	-16	-16
-2i	2	-1 + 4i	7 - 2i	-4 + 14i	-4 - 8i	-8i	0
2i	2	-1	7	-4	-4	0	
-2i	2	-1 + 4i	-1 - 2i	-2i	0		
	2	-1	-1	0			

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x = 1 \text{ e } x = -\frac{1}{2}$$

$$S = \left\{ 1, -2i, 2i, -\frac{1}{2} \right\}$$

i	1	-2	-1	2 + 2i	-2i
	1	-2	2	0	

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} \Rightarrow x = 1 + i \text{ ou } x = 1 - i$$

$$\{i, 1 - i, 1 + i\}$$

35. Como $-2 + i$ e $1 - 2i$ são raízes, $-2 - i$ e $1 + 2i$ também são.

Como o polinômio é do 5º grau, com certeza ele admite uma raiz real.

Alternativa c.

36. Como $3 + 2i$ é raiz da equação $x^3 - 23x + c$, então: $3 - 2i$ também é raiz. Logo, o trinômio $(x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i) = x^2 - 6x + 13$ é divisor de $x^3 - 23x + c$.

Aplicando o método da chave, obtemos:

$$c = 78$$

37. Os coeficientes devem ser reais.

Se i é raiz, $-i$ também será.

Dessa maneira, as raízes são: 1, 1, -2, i e $-i$

Forma fatorada da equação:

$$(x-1)^2(x+2)(x-i)(x+i) = 0$$

A equação correspondente é: $x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = 0$

(01) Verdadeiro, $-2 + 2 = 0$

(02) Verdadeiro, $2 + (-3) + 2 = 1$

(04) Falso, $2 \neq (-3)$

(08) Falso, $1 + 2 = 3$

(16) Falso, $2 > 0$

Foco na leitura (p. 217)

1. • $P(-3) = (-3)^4 + 2 \cdot (-3)^3 - 11 \cdot (-3)^2 - 12 \cdot (-3) + 36 = 0$

Assim, -3 é raiz de $P(x)$.

$$\bullet P(-2) = (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - 11 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 36 = 16$$

Então, -2 não é raiz de $P(x)$.

$$\bullet P(0) = 0^4 + 2 \cdot 0^3 - 11 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 36 = 36$$

Assim, 0 não é raiz de $P(x)$.

$$\bullet P(2) = (2)^4 + 2 \cdot (2)^3 - 11 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 36 = 0$$

Assim, 2 é raiz de $P(x)$.

$$\bullet P(3) = (3)^4 + 2 \cdot (3)^3 - 11 \cdot (3)^2 - 12 \cdot (3) + 36 = 36$$

Então, 3 não é raiz de $P(x)$.

2. Pela questão 1, temos que 2 e -3 são raízes de $P(x)$. Aplicando Briot-Ruffini, vamos descobrir a multiplicidade de cada raiz:

	1	2	-11	-12	36
2	1	4	-3	-18	0
2	1	6	9	0	
2	1	8	25		

Assim, 2 tem multiplicidade 2. Continuando com a raiz 3, temos:

	1	6	9
-3	1	3	0
-3	1	0	

Concluimos que os números 2 e -3 são raízes com multiplicidade 2.

Fazer e aprender (p. 217)

38. As possíveis raízes racionais são os divisores de 2: $\pm 1, \pm 2$

Substituindo na equação: $3x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 7x + 2 = 0$, temos:

$x = 1$:

$$3 \cdot 1^4 - 7 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 7 \cdot 1 + 2 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

$x = -1$:

$$3 \cdot (-1)^4 - 7 \cdot (-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 - 7 \cdot (-1) + 2 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

$x = 2$:

$$3 \cdot 2^4 - 7 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 7 \cdot 2 + 2 = 0 \rightarrow \text{é raiz.}$$

$x = -2$:

$$3 \cdot (-2)^4 - 7 \cdot (-2)^3 + 5 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 2 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

2 é raiz.

39. a) $10x^3 - 7x^2 - 2x + 2 = 0$

Divisores de 2: $\pm 1, \pm 2$

Divisores de 10: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Possíveis raízes racionais:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{10}, \pm 2, \pm \frac{2}{5}$$

Por inspeção, $-\frac{1}{2}$ é raiz:

$-\frac{1}{2}$	10	-7	-2	2
	10	-12	4	0

$$10x^2 - 12x + 4 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$\Delta = 36 - 40 = -4$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{10} \begin{cases} x = \frac{6+2i}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \\ x = \frac{6-2i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i \end{cases}$$

$$\left\{ \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i, \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i, -\frac{1}{2} \right\}$$

- b) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

Divisores de 2: $\pm 1, \pm 2$

Possíveis raízes racionais: $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 2$

Por inspeção, 2 e $\frac{1}{2}$ são raízes:

2	2	-7	9	-7	2
$\frac{1}{2}$	2	-3	3	-1	0
	2	-2	2	0	

$$2x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{-3}i}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{-3}i}{2} \end{cases}$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

$$S = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2} \right\}$$

40. As possíveis raízes inteiras são: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Substituindo na equação: $3x^4 - 3x^3 - 17x^2 - x - 6 = 0$, temos:

$x = 1$:

$$3 \cdot 1^4 - 3 \cdot 1^3 - 17 \cdot 1^2 - 1 - 6 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

$x = -1$:

$$3 \cdot (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 - 17 \cdot (-1)^2 - (-1) - 6 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

$x = 2$:

$$3 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 17 \cdot 2^2 - 2 - 6 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

$x = -2$:

$$3 \cdot (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^3 - 17 \cdot (-2)^2 - (-2) - 6 = 0 \rightarrow \text{é raiz.}$$

$x = 3$:

$$3 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^3 - 17 \cdot 3^2 - 3 - 6 \neq 0 \rightarrow \text{é raiz.}$$

$x = -3$:

$$3 \cdot (-3)^4 - 3 \cdot (-3)^3 - 17 \cdot (-3)^2 - (-3) - 6 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

$x = 6$:

$$3 \cdot 6^4 - 3 \cdot 6^3 - 17 \cdot 6^2 - 6 - 6 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

$x = -6$:

$$3 \cdot (-6)^4 - 3 \cdot (-6)^3 - 17 \cdot (-6)^2 - (-6) - 6 \neq 0 \rightarrow \text{não é raiz.}$$

-2 ou 3.

41. As possíveis raízes de $4x^3 - 14x^2 + 10x - 2 = 0$. Testando temos que

$x = \frac{1}{2}$ é raiz, dividindo por $\left(x - \frac{1}{2}\right)$ obtemos:

$\frac{1}{2}$	4	-14	10	-2
	4	-12	+4	0

$$4x^3 - 14x^2 + 10x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(4x^2 + 12x + 4) \text{ e}$$

$$4x^2 - 12x + 4 = 0 \text{ tem raízes } x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{80}}{8}$$

$$x = \frac{12 \pm 4\sqrt{5}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x \approx 2,6 \text{ ou } x \approx 0,4$$

Como $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2,6$ é maior que um dos lados da folha de papelão,

essa raiz deve ser descartada. A resposta ao problema é:

$$x = \frac{1}{2} \text{ m ou } x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ m} \approx 0,4 \text{ m}$$

42. $x^n - 2ax + 2 = 0, a \in \mathbb{Z} \text{ e } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Possíveis raízes racionais: $\pm 1, \pm 2$

$$\text{Para } x = 1: 1^n - 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}, \text{ mas } a \in \mathbb{Z} \text{ (F)}$$

$$\text{Para } x = -1: (-1)^n - 2a + 2 = 0$$

$$\bullet \text{ Se } n \text{ for par: } 1 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, \text{ mas } a \in \mathbb{Z} \text{ (F)}$$

$$\bullet \text{ Se } n \text{ for ímpar: } -1 - 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}, \text{ mas } a \in \mathbb{Z} \text{ (F)}$$

$$\text{Para } x = 2: 2^n - 2a \cdot 2 + 2 = 0$$

$$2^n + 4a + 2 = 0 \Rightarrow 2^n = -4a - 2 \Rightarrow 2^n = -2(2a + 1)$$

$$2a + 1 < 0 \text{ e } 2a + 1 = 2^k, k \in \mathbb{Z}$$

Mas $2a + 1$ é ímpar para $a \in \mathbb{Z}$, portanto não pode ser potência de 2.

$$\text{Para } x = -2: (-2)^n + 2a(-2) + 2 = 0$$

• Se n for par:

$$2^n - 4a + 2 = 0 \Rightarrow 2^n = -4a - 2 \Rightarrow 2^n = 2(2a - 1)$$

$$2a - 1 > 0 \text{ e } 2a - 1 = 2^k, k \in \mathbb{Z}$$

Mas $2a - 1$ é ímpar para $a \in \mathbb{Z}$, portanto não pode ser potência de 2.

- Se n for ímpar:

$$-2^n - 4a + 2 = 0 \Rightarrow 2^n = -4a + 2 \Rightarrow 2^n = 2(-2a + 1) \Rightarrow 2^n = 2(-1)(2a - 1)$$

$$2a - 1 < 0 \text{ e } 2a - 1 = 2^k, k \in \mathbb{Z}$$

$-1, 1, -2, 2$ são possíveis raízes inteiras que, substituindo na equação, implicam a $\notin \mathbb{Z}$. Logo, não são soluções.

$$43. \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \cdot \sqrt{3}} = n$$

$$\left(\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \sqrt{3}} \right)^3 = n^3$$

$$2 + \frac{10}{9} \sqrt{3} + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \sqrt{3}} \right)^2 \cdot \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \sqrt{3}} +$$

$$+ 3 \cdot \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \sqrt{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \sqrt{3}} \right)^2 + 2 - \frac{10}{9} \sqrt{3} = n^3$$

$$4 + 3 \sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \sqrt{3}} \cdot \underbrace{\left[\sqrt[3]{2 + \frac{10}{9} \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 - \frac{10}{9} \sqrt{3}} \right]}_n = n^3$$

$$4 + 3 \sqrt[3]{2^2 - \left(\frac{10}{9} \sqrt{3} \right)^2} \cdot n = n^3$$

$$4 + 3 \sqrt[3]{4 - \frac{100}{81}} \cdot n = n^3$$

$$4 + 3 \sqrt[3]{\frac{24}{81}} \cdot n = n^3$$

$$4 + 3 \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \cdot n = n^3$$

$$4 + 3 \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} \cdot n = n^3$$

$$4 + 3 \cdot \frac{2}{3} n = n^3$$

$$4 + 2n - n^3 = 0$$

$$n^3 - 2n - 4 = 0$$

Possíveis raízes racionais $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

2 é raiz, pois $2^3 - 2^2 - 4 = 0$.

2	1	0	-2	-4
	1	2	2	0

$$n^2 - 2n + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$$

As demais raízes são complexas.

A expressão é igual a $2 \in \mathbb{Z}$.

44. (01) Verdadeira.

$$p(x) = (ax^2 + x + 2)(bx + c)$$

$$p(x) = abx^3 + (ac + b)x^2 + (2b + c)x + 2c$$

Se $c = 0$ e $a > \frac{1}{8}$, temos:

$$p(x) = abx^3 + bx^2 + 2bx$$

$$p(x) = (ax^2 + x + 2) \cdot bx$$

$$\text{Raízes: } bx = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$(ax^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

(Não possui raízes reais.)

$$\text{Logo: } (1)^2 - 4(a)(4) < 0 \Rightarrow a > \frac{1}{8}.$$

(02) Verdadeira. Toda equação algébrica de coeficientes reais e grau ímpar possui, pelo menos, uma raiz real.

(04) Verdadeira.

$$p(x) = (ax^2 + x + 2)(bx + c)$$

$$bx + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{b}$$

$$(ax^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \text{ (Possui raízes reais.)}$$

$$\text{Assim: } (1)^2 - 4(a)(4) \geq 0 \Rightarrow a \leq \frac{1}{8}$$

Portanto, todas as raízes serão reais.

(08) Verdadeira.

Quando $a = b = 1$, temos:

$$p(x) = (x^2 + x + 2)(x + c) \Rightarrow p(x) = x^3 + (c + 1)x^2 + (c + 2)x + 2c$$

As possíveis raízes racionais são os divisores de $2c$.

Assim, para $x = -c$ (divisor de $2c$), temos:

$$p(-c) = (-c)^3 + (c + 1)(-c)^2 + (c + 2)(-c) + 2c = 0.$$

Logo, $-c$ é raiz.

Por Briot-Ruffini, temos: $x^2 + x + 2 = 0$

$$x' = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2} \quad x'' = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{2}$$

(16) Falsa

$$p(x) = (-x^2 + x + 2)(-x - 1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x^2 + x + 2 = 0 \\ -x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 2; x_2 = x_3 = -1$$

45. a) Falsa, pois $P(1) = 2 \cdot 1^4 - 5 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 3 \neq 0$.

b) Verdadeira, pois as possíveis raízes inteiras são: $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ e as raízes dadas pertencem a esse conjunto de possibilidades.

c) Verdadeira, pois toda equação de grau ímpar e com coeficientes reais admite, pelo menos, uma raiz real.

- d) Falsa, pois, se fosse divisível, teríamos $f(3) = 0$ e $f(3) = 3^3 + 4 \cdot 3 - 5 = 34 \neq 0$.

$$46. p(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix} = x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$$

Através da pesquisa racional, obtemos as raízes: ± 3 e ± 4 . Dessas, apenas -4 não serve como resposta.

47. Pelas relações de Girard:

a) A soma de todas as raízes dessa equação é 4.

b) O produto é -13 .

c) A soma das raízes reais é 0, pois $(2 + i) + (2 - i) + m + p = 4 \Rightarrow m + p = 0$.

Foco na tecnologia – Calculadora (p. 219)

$$1. a) \operatorname{tg} 53^\circ = \frac{MN}{32,8} \Rightarrow MN \approx 32,8 \cdot 1,33 \Rightarrow MN \approx 43,53 \text{ m}$$

$$b) \operatorname{tg} 49^\circ = \frac{43,53}{BN} \Rightarrow BN \approx \frac{43,53}{1,15} \Rightarrow BN \approx 37,85 \text{ m}$$

$$c) \operatorname{sen} 49^\circ = \frac{43,53}{BM} \Rightarrow BM \approx \frac{43,53}{0,755} \Rightarrow BM \approx 57,65 \text{ m}$$

$$d) A_{\triangle ABN} = \frac{BN \cdot AN \cdot \operatorname{sen} 31^\circ}{2} \approx \frac{37,85 \cdot 32,8 \cdot 0,515}{2} \Rightarrow A_{\triangle ABN} \approx 319,68 \text{ m}^2$$

Gasto: $319,68 \cdot 9,30 \approx 2973$, ou seja, R\$ 2 973,00 por metro quadrado.

Aprender a aprender (p. 219)

1. (01) Falso. Os números deverão possuir o mesmo algarismo das unidades; como não temos esse par de valores, a diferença não será obtida.

(02) Verdadeiro. Representando os quadrados perfeitos múltiplos de 7: 49, 2 401, ..., o que indicam múltiplos de 49.

(04) Verdadeiro. Devemos ter: $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$, ou seja, sempre será um quadrado perfeito.

(08) Falso. Sejam $x = 4$ e $y = 9$ quadrados perfeitos. Observe que $x + y = 13$, o que não indica um quadrado perfeito.

(16) Falso. A decomposição em fatores primos não indica um quadrado perfeito.

$$2. \begin{cases} a^2 + b^2 = 7 \\ a^2 - b^2 = 3 \end{cases} \oplus$$

$$2a^2 = 10$$

$$a^2 = 5$$

3. Professor, este exercício pode ser resolvido de outras maneiras.

Dividindo o quadrilátero ABCD em dois triângulos, podemos calcular a área por determinante:

$$\triangle ABC \rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 16 \rightarrow A_{\triangle} = 8$$

$$\triangle ACD \rightarrow D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 20 \rightarrow A_{\triangle} = 10$$

$$A_T = 8 + 10 = 18$$

4. C_1 : centro (2, 1) e raio 2.

C_2 : centro (2, 1) e raio 3.

Sim, porque são concêntricas em (2, 1) com raios diferentes (2, 3).

5. $x > 4$

$$V = (x - 4)(x - 3) \left(\frac{2x + 3}{3} \right) = 30$$

$$(x^2 - 7x + 12)(2x + 3) = 90$$

$$x^3 - 11x^2 + 3x + 36 - 90 = 0$$

$$x^3 - 11x^2 + 3x - 54 = 0$$

Divisores de -54: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54$

Divisores de 2: $\pm 1, \pm 2$

Possíveis raízes racionais: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18, \pm 27, \pm 54, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{27}{2}$

$$\pm 54, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{9}{2}, \pm \frac{27}{2}$$

Por inspeção, 6 é raiz:

6	2	-11	3	-54
	2	-3	9	0

$$2x^2 + x + 9 = 0$$

$$\Delta = 1 - 72 < 0 \therefore \text{as demais raízes são complexas.}$$

Para $x = 6$, as dimensões do paralelepípedo são:

$$x - 4 = 6 - 4 = 2$$

$$x - 3 = 6 - 3 = 3$$

$$\frac{27x + 3}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

A área total é $(2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5)^2 = 62$, ou seja, 62 cm^2 .

6. x herdeiros: $\frac{6\,000\,000}{x}$ por herdeiro

$$(x + 2) \text{ herdeiros: } \frac{6\,000\,000}{(x + 2)} \text{ por herdeiro}$$

$$\frac{6\,000\,000}{(x + 2)} = \frac{6\,000\,000}{x} - 100\,000$$

$$\frac{6 \cdot 10^6}{x + 2} = \frac{6 \cdot 10^6 - 10^5 x}{x}$$

$$6 \cdot 10^6 x = 6 \cdot 10^6 x + 12 \cdot 10^6 - 10^5 x^2 - 2 \cdot 10^5 x$$

$$10^5 x^2 + 2 \cdot 10^5 x - 12 \cdot 10^6 = 0$$

$$x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$\Delta = 4 + 480 = 484$$

$$x = \frac{-2 \pm 22}{2} \begin{cases} x = 10 \\ x = -12 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, havia 10 herdeiros.

7. Na Europa, exceto na Finlândia, estavam liberados voos acima de $6\,000 \text{ m} = 6\,000 \cdot 3,3 \text{ pés} = 19\,800 \text{ pés}$; na Finlândia, necessitava-se uma altitude acima de $31\,000 \text{ pés}$. Assim, temos: $31\,000 \text{ pés} - 19\,800 \text{ pés} = 11\,200 \text{ pés}$. Alternativa c.

8. Considerando x tubos no comprimento, y tubos na largura, $(y + 1)$ o número de colunas e $(x + 1)$ o número de linhas, temos: $x \cdot (y + 1) + y \cdot (x + 1)$ tubos, o que resulta: $xy + x + xy + y = 2xy + x + y$.

Alternativa d.

9. $\frac{10}{x} = \frac{20}{24} \cdot \frac{40}{60} \cdot \frac{6}{7} \Rightarrow x = 21$ dias

Dessa maneira, o trabalho todo durou 31 dias, de forma que temos 28 semanas inteiras mais 3 dias: quarta-feira.

Alternativa d.

10. Venceu as $1^a, 5^a, 6^a, 8^a$ e 10^a partidas, acumulando 15 pontos.

Empatou as $3^a, 7^a$ e 9^a partidas, acumulando mais 3 pontos.

Perdeu as 2^a e 4^a partidas, não marcando pontos.

Total acumulado: 18 pontos.

Alternativa c.

Mundo plural (p. 221)

- Resposta pessoal.
- Resposta de acordo com a pesquisa realizada pelos estudantes.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 225)

1. Analisando as afirmações, temos:

(I) Verdadeiro. Se os coeficientes são reais, as raízes complexas estão com seus conjugados.

(II) Verdadeiro. Seus zeros estarão acompanhados dos respectivos conjugados.

(III) Falso. Seus conjugados também seriam zeros e, assim, o polinômio seria do 4^o grau, no mínimo.

Alternativa a.

2. Sabendo que, se $1 + i$ é raiz da equação, então $1 - i$ também é. Pelas relações de Girard para as raízes, temos:

Soma das raízes: $1 + i + 1 - i + x_3 = -m$, então $2 + x_3 = -m$

Produto das raízes: $(1 + i) \cdot (1 - i) \cdot x_3 = -n$ implica

$$(1 - i^2) \cdot x_3 = -n, \text{ então } 2x_3 = -n.$$

Soma dos produtos das raízes:

$$(1 + i)(1 - i) + (1 + i)x_3 + (1 - i)x_3 = 2$$

$$2 + x_3 + ix_3 + x_3 - ix_3 = 2$$

$$2 + 2x_3 = 2$$

$$x_3 = 0$$

Então, como $2 + x_3 = -m$, temos $m = -2$.

De $2x_3 = -n$, segue que $n = 0$.

Alternativa e.

3. Vamos chamar de **a**, **b** e **c** as três raízes da equação $x^3 + 5x^2 - 2 = 0$. Sabemos que pelo menos uma dessas raízes é um número real e pelas relações de Girard temos que:

$$a + b + c = -5$$

$$ab + ac + bc = 0$$

$$abc = 2$$

Como $abc = 2$ é um número positivo, então ou os três números são positivos ou apenas um deles é positivo.

Se a soma desses três números é igual a -5 , que é um número negativo, temos que **a**, **b** e **c** não podem ser todos números positivos.

Então, a única possibilidade é que apenas uma das raízes seja positiva.

Alternativa a.

4. Basta calcular cada expressão nos pontos $x = 0$, $x = 10$ e $x = 5$.

Alternativa a.

UNIDADE 4

CAPÍTULO 11

Fazer e aprender (p. 235)

1. $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$

$$\alpha \in 4^o Q$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{1}{16} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{15}{16}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Como } \alpha \in 4^o Q, \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

2. $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}, \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 \sin \alpha = 3 \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3 \cos \alpha}{4} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{3 \cos \alpha}{4} \right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{9 \cos^2 \alpha}{16} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\frac{25}{16} \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

$\alpha \in 3^{\text{a}}$ quadrante $\therefore \cos \alpha < 0$

$$\text{Assim, } \cos \alpha = -\frac{4}{5} \text{ e } \sin \alpha = \frac{3}{4} \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}.$$

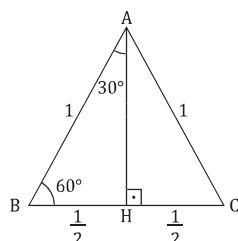
$$3. \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB}$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$1^2 = AH^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$1 - \frac{1}{4} = AH^2$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = AH$$



$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$4. (AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(AC)^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

$$AC = \sqrt{2}$$

$\triangle ABC$ é isósceles, então: $\alpha + \alpha + 90^\circ = 180^\circ$

$$\sin \alpha = \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos \alpha = \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5. \alpha \in 2^\circ \text{ Q, então: } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$a) \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x = \sin(\pi x)$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$b) \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos x = -\cos(\pi - x)$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = -\cos \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6}$$

$$c) \operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\pi - x)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = -\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$d) \sin \alpha = \cos \alpha$$

$\alpha \in 2^\circ \text{ Q, então: } \sin \alpha > 0 \text{ e } \cos \alpha < 0$

Assim, $\sin \alpha \neq \cos \alpha$.

$\nexists \alpha \in 2^\circ \text{ Q tal que } \sin \alpha = \cos \alpha$.

$$6. a) 4^\circ \text{ Q}$$

$$b) 3^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ Q}$$

$$c) 4^\circ \text{ Q}$$

$$d) 1^\circ \text{ Q}$$

$$e) 2^\circ \text{ e } 4^\circ \text{ Q}$$

$$f) 2^\circ \text{ Q}$$

$$g) 1^\circ \text{ Q}$$

$$h) 3^\circ \text{ Q}$$

$$i) 2^\circ \text{ e } 3^\circ \text{ Q}$$

7.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	Positivo Decrescente	Negativo Decrescente	Negativa Crescente
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	Negativo Decrescente	Negativo Crescente	Positiva Crescente
$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$	Negativo Crescente	Positivo Crescente	Negativa Crescente
$2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$	Positivo Crescente	Positivo Decrescente	Positiva Crescente

$$8. 3\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 90^\circ + \alpha = 120^\circ$$

$$\cos 120^\circ = -\cos(180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$d^2 = 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ$$

$$d^2 = 4 + 1 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \Rightarrow d = \sqrt{7} \text{ m}$$

$$9. a) f(t) = 21 - 4 \cdot \cos \frac{\pi}{12} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Máx.: } \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) = -1 \Rightarrow 21 + 4 = 25^\circ \\ \text{Mín.: } \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) = 1 \Rightarrow 21 - 4 = 17^\circ \end{cases}$$

Logo, $\Delta t = 8^\circ \text{ C}$

$$b) f(t) = 21 - 4 \cdot \cos \frac{\pi}{12} t = 23 \Rightarrow 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) = -2 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12} t\right) = -\frac{1}{2}$$

Logo:

$$\frac{\pi}{12} t = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{12} t = \frac{4\pi}{3}$$

$$t = 8h (+ 6h) = 14h$$

$$t = 16h (+ 6h) = 22h$$

$$10. r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot (-1)} = 6900 \text{ (máx.)}$$

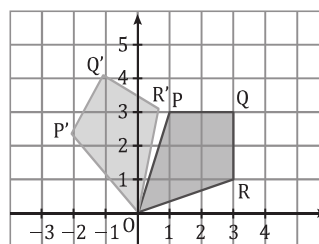
$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \cdot (1)} = 5100 \text{ (mín.)}$$

Adicionando os resultados, temos:

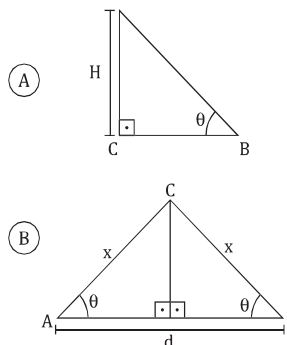
$$6900 + 5100 = 12000$$

Alternativa b.

Para complementar (p. 236)



Foco na leitura (p. 237)



Da figura (A), temos:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{H}{CB}$$

$$H = \operatorname{tg} \theta \cdot CB \quad (1)$$

Imagens: BIS

Da figura (B), temos:

$$\cos \theta = \frac{\frac{d}{2}}{CB} \Rightarrow CB = \frac{\frac{d}{2}}{\cos \theta} \Rightarrow CB = \frac{d}{2 \cos \theta} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$H = \operatorname{tg} \theta \cdot CB$$

$$H = \operatorname{tg} \theta \cdot \frac{d}{2 \cos \theta}$$

$$H = \frac{d}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \theta}{2 \cos \theta}$$

Alternativa d.

Fazer e aprender (p. 241)

11. a) $\sin 100^\circ = \sin (180^\circ - 100^\circ) = \sin 80^\circ$
 $\cos 100^\circ = -\cos (180^\circ - 100^\circ) = -\cos 80^\circ$
 $\operatorname{tg} 100^\circ = -\operatorname{tg} (180^\circ - 100^\circ) = -\operatorname{tg} 80^\circ$
- b) $\sin 200^\circ = -\sin (200^\circ - 180^\circ) = -\sin 20^\circ$
 $\cos 200^\circ = -\cos (200^\circ - 180^\circ) = -\cos 20^\circ$
 $\operatorname{tg} 200^\circ = \operatorname{tg} (200^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg} 20^\circ$
- c) $\sin 340^\circ = -\sin (360^\circ - 340^\circ) = -\sin 20^\circ$
 $\cos 340^\circ = \cos (360^\circ - 340^\circ) = \cos 20^\circ$
 $\operatorname{tg} 340^\circ = -\operatorname{tg} (360^\circ - 340^\circ) = -\operatorname{tg} 20^\circ$
- d) $\sin 1610^\circ = \sin 170^\circ = \sin (180^\circ - 170^\circ) = \sin 10^\circ$
 $\cos 1610^\circ = \cos 170^\circ = -\cos (180^\circ - 170^\circ) = -\cos 10^\circ$
 $\operatorname{tg} 1610^\circ = \operatorname{tg} 170^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 170^\circ) = -\operatorname{tg} 10^\circ$
- e) $\sin 3100^\circ = \sin 220^\circ = -\sin (220^\circ - 180^\circ) = -\sin 40^\circ$
 $\cos 3100^\circ = \cos 220^\circ = -\cos (220^\circ - 180^\circ) = -\cos 40^\circ$
 $\operatorname{tg} 3100^\circ = \operatorname{tg} 220^\circ = \operatorname{tg} (220^\circ - 180^\circ) = \operatorname{tg} 40^\circ$
- f) $\sin 2470^\circ = \sin 310^\circ = -\sin (360^\circ - 310^\circ) = -\sin 50^\circ$
 $\cos 2470^\circ = \cos 310^\circ = \cos (360^\circ - 310^\circ) = \cos 50^\circ$
 $\operatorname{tg} 2470^\circ = \operatorname{tg} 310^\circ = -\operatorname{tg} (360^\circ - 310^\circ) = -\operatorname{tg} 50^\circ$
12. a) $\frac{6\pi}{7}$ é arco de segundo quadrante e seu simétrico no primeiro quadrante é $\frac{\pi}{7}$; assim, $\sin \frac{6\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}$, $\cos \frac{6\pi}{7} = -\cos \frac{\pi}{7}$, $\operatorname{tg} \frac{6\pi}{7} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$
- b) $\frac{7\pi}{5}$ é arco de terceiro quadrante e seu simétrico no primeiro quadrante é $\frac{2\pi}{5}$; assim, $\sin \frac{7\pi}{5} = -\sin \frac{2\pi}{5}$, $\cos \frac{7\pi}{5} = -\cos \frac{2\pi}{5}$, $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{5} = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}$
- c) $\frac{15\pi}{8}$ é arco de quarto quadrante e seu simétrico no primeiro quadrante é $\frac{\pi}{8}$; assim, $\sin \frac{15\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{15\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg} \frac{15\pi}{8} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$
- d) $\frac{49\pi}{10}$ é arco de terceira volta com extremo no segundo quadrante e seu simétrico no primeiro quadrante é $\frac{\pi}{10}$; assim, $\sin \frac{49\pi}{10} = \sin \frac{\pi}{10}$, $\cos \frac{49\pi}{10} = -\cos \frac{\pi}{10}$, $\operatorname{tg} \frac{49\pi}{10} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$
- e) $\frac{57\pi}{8}$ é arco de terceira volta com extremo no terceiro quadrante e seu simétrico no primeiro quadrante é $\frac{\pi}{8}$; assim, $\sin \frac{57\pi}{8} = -\sin \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{57\pi}{8} = -\cos \frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tg} \frac{57\pi}{8} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$
- f) $\frac{39\pi}{5}$ é arco de terceira volta com extremo no quarto quadrante e seu simétrico no primeiro quadrante é $\frac{\pi}{5}$; assim, $\sin \frac{39\pi}{5} = -\sin \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{39\pi}{5} = \cos \frac{\pi}{5}$, $\operatorname{tg} \frac{39\pi}{5} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$
13. a) $78^\circ = 90^\circ - 12^\circ$
 $\cos (90^\circ - x) = \cos 90^\circ \cos x + \sin 90^\circ \sin x = \sin x$
 $\sin (90^\circ - x) = \sin 90^\circ \cos x - \cos 90^\circ \sin x = \cos x$
 $\sin 78^\circ = \cos 12^\circ$
 $\cos 78^\circ = \sin 12^\circ$
 $\operatorname{tg} 78^\circ = \frac{\sin 78^\circ}{\cos 78^\circ} = \frac{\cos 12^\circ}{\sin 12^\circ} = \frac{1}{\operatorname{tg} 12^\circ}$
- b) $\frac{7\pi}{18} = \frac{9\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}$
 $\cos (90^\circ - x) = \cos 90^\circ \cos x + \sin 90^\circ \sin x = \sin x$
 $\sin (90^\circ - x) = \sin 90^\circ \cos x - \cos 90^\circ \sin x = \cos x$

$$\cos \frac{7\pi}{18} = \sin \frac{\pi}{9}$$

$$\sin \frac{7\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{9}$$

$$\operatorname{tg} \frac{7\pi}{18} = \frac{\sin \frac{7\pi}{18}}{\cos \frac{7\pi}{18}} = \frac{\cos \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{\frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9}}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}$$

c) $162^\circ = 180^\circ - 18^\circ$

$$\sin (180^\circ - x) = \sin 180^\circ \cos x - \sin x \cos 180^\circ = \sin x$$

$$\cos (180^\circ - x) = \cos 180^\circ \cos x + \sin 180^\circ \sin x = -\cos x$$

$$\sin 162^\circ = \sin 18^\circ$$

$$\cos 162^\circ = -\cos 18^\circ$$

$$\operatorname{tg} 162^\circ = \frac{\sin 162^\circ}{\cos 162^\circ} = \frac{\sin 18^\circ}{-\cos 18^\circ} = -\operatorname{tg} 18^\circ$$

d) $\frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$

$$\sin (90^\circ + x) = \sin 90^\circ \cos x + \sin x \cos 90^\circ = \cos x$$

$$\cos (90^\circ + x) = \cos 90^\circ \cos x - \sin 90^\circ \sin x = -\sin x$$

$$\sin (90^\circ + x) = \cos x$$

$$\cos (90^\circ + x) = -\sin x$$

$$\sin \frac{3\pi}{5} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right) = \cos \frac{\pi}{10}$$

$$\cos \frac{3\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right) = -\sin \frac{\pi}{10}$$

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{5} = \frac{\sin \frac{3\pi}{5}}{\cos \frac{3\pi}{5}} = \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{-\sin \frac{\pi}{10}} = \frac{-1}{\frac{\sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{\pi}{10}}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}}$$

e) $260^\circ = 270^\circ - 10^\circ$

$$\sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = \sin 270^\circ \cos x - \sin x \cos 270^\circ = -\cos x$$

$$\cos \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = \cos 270^\circ \cos x + \sin 270^\circ \sin x = -\sin x$$

$$\sin 260^\circ = \sin (270^\circ - 10^\circ) = -\cos 10^\circ$$

$$\cos 260^\circ = \sin (270^\circ - 10^\circ) = -\sin 10^\circ$$

$$\operatorname{tg} 260^\circ = \frac{\sin 260^\circ}{\cos 260^\circ} = \frac{-\cos 10^\circ}{-\sin 10^\circ} = \frac{1}{\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}} = \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ}$$

f) $\frac{29\pi}{18} = \frac{36\pi}{18} - \frac{7\pi}{18}$

$$\sin (2\pi - x) = \sin 2\pi \cos x - \sin x \cos 2\pi = -\sin x$$

$$\cos (2\pi - x) = \cos 2\pi \cos x + \sin x \sin 2\pi = \cos x$$

$$\sin \left(\frac{29\pi}{18} \right) = \sin \left(2\pi - \frac{7\pi}{18} \right) = -\sin \frac{7\pi}{18}$$

$$\cos \left(\frac{29\pi}{18} \right) = \cos \left(2\pi - \frac{7\pi}{18} \right) = \cos \frac{7\pi}{18}$$

$$\frac{7\pi}{18} = \frac{\pi}{9} - a \rightarrow a = \frac{7\pi}{18} - \frac{\pi}{9} = \frac{14\pi - 9\pi}{36} = \frac{5\pi}{36}$$

$$\frac{7\pi}{18} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}$$

$$\sin \frac{7\pi}{18} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} \right) = \cos \frac{\pi}{9} \rightarrow \sin \frac{29\pi}{18} = -\cos \frac{\pi}{9}$$

$$\cos \frac{7\pi}{18} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{9} \rightarrow \cos \frac{29\pi}{18} = \sin \frac{\pi}{9}$$

$$\operatorname{tg} \frac{29\pi}{18} = \frac{\sin \frac{29\pi}{18}}{\cos \frac{29\pi}{18}} = \frac{-\cos \frac{\pi}{9}}{\sin \frac{\pi}{9}} = -\frac{1}{\frac{\sin \frac{\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9}}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{9}}$$

14. a) $-280^\circ = 80^\circ$

$$\sin (-280^\circ) = \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$$

$$\cos (-280^\circ) = \cos 80^\circ = \sin 10^\circ$$

$$\sin 80^\circ = \sin (90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$\cos 80^\circ = \cos (90^\circ - 10^\circ) = \sin 10^\circ$$

$$\operatorname{tg} (-280^\circ) = \frac{\sin (-280^\circ)}{\cos (-280^\circ)} = \frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} = \frac{1}{\frac{\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}} = \frac{1}{\operatorname{tg} 10^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } -\frac{7\pi}{5} &= -2\pi + \frac{3\pi}{5} \Rightarrow -\frac{7\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \\
 \sin(90^\circ + x) &= \cos x \Rightarrow \sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = \cos \frac{\pi}{10} \\
 \cos(90^\circ + x) &= -\sin x \Rightarrow \cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right) = -\sin \frac{\pi}{10} \\
 \operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{5}\right) &= \frac{\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)}{\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{10}}{-\sin \frac{\pi}{10}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } -162^\circ &= 180^\circ + 18^\circ \\
 \sin(-162^\circ) &= \sin(180^\circ + 18^\circ) = -\sin 18^\circ \\
 \cos(-162^\circ) &= \cos(180^\circ + 18^\circ) = -\cos 18^\circ \\
 \sin(180^\circ + x) &= \sin 180^\circ \cos x + \sin x \cos 180^\circ = -\sin x \\
 \cos(180^\circ + x) &= \cos 180^\circ \cos x - \sin 180^\circ \sin x = -\cos x \\
 \operatorname{tg}(-162^\circ) &= \frac{\sin(-162^\circ)}{\cos(-162^\circ)} = \frac{-\sin 18^\circ}{-\cos 18^\circ} = \operatorname{tg} 18^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } -\frac{4\pi}{9} &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18}, \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{18} \\
 \sin \frac{3\pi}{2} - x &= -\cos x \\
 \cos \frac{3\pi}{2} - x &= -\sin x \\
 \sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right) &= \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{18}\right) = -\cos \frac{\pi}{18} \\
 \cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{18}\right) = \sin \frac{\pi}{18} \\
 \operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{9}\right) &= \frac{\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)}{\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)} = \frac{-\cos \frac{\pi}{18}}{\sin \frac{\pi}{18}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{18}}
 \end{aligned}$$

$$15. \text{ a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\begin{aligned}
 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\
 \sin(\pi - x) &= \sin x \\
 \cos(\pi - x) &= -\cos x \\
 y &= \frac{\cos x \cdot \sin x}{\sin x \cdot (-\cos x)} = -1 \\
 \sin(\pi - x) &\neq 0 \\
 x &\neq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\
 \cos(\pi - x) &\neq 0 \\
 \pi - x &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
 x &\neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\
 x &\neq \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \\
 y &= -1
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } y = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} \cdot \cos(\pi + x) \cdot \sin(\pi + x)$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\pi + x) &= \cos \pi \cdot \cos x - \sin \pi \cdot \sin x = \cos x \\
 \sin(\pi + x) &= \sin \pi \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos \pi = -\sin x \\
 y &= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x (-\sin x) = -\cos^2 x \\
 y &= -\cos^2 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \text{ a) } y &= \sin 10^\circ \cos 80^\circ + \sin 80^\circ \cos 10^\circ \\
 \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\
 a &= 10^\circ \\
 b &= 80^\circ \\
 y &= \sin(10^\circ + 80^\circ) = \sin 90^\circ = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } y &= \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 89^\circ + \sin 181^\circ + \sin 182^\circ + \dots + \sin 269^\circ \\
 \sin(180^\circ + x) &= \sin 180^\circ \cos x + \sin x \cos 180^\circ = \\
 &= -\sin x \\
 \sin 181^\circ &= \sin(180^\circ + 1^\circ) = -\sin 1^\circ \\
 y &= \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 89^\circ - \sin 1^\circ - \sin 2^\circ - \dots - \sin 89^\circ = 0 \\
 y &= \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ + \cos 91^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 179^\circ = 0 \\
 y &= 0 \\
 \text{c) } y &= \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ + \cos 91^\circ + \cos 92^\circ + \dots + \cos 179^\circ \\
 \cos(180^\circ - x) &= -\cos x \\
 \cos 179^\circ &= \cos(180^\circ - 1^\circ) = -\cos 1^\circ \\
 \cos 91^\circ &= \cos(180^\circ - 89^\circ) = -\cos 89^\circ \\
 y &= \cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 89^\circ - \cos 89^\circ - \cos 88^\circ - \dots - \cos 1^\circ = 0 \\
 y &= 0 \\
 \text{d) } y &= \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 88^\circ \cdot \operatorname{tg} 89^\circ \\
 y &= \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \cdot \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \cdot \dots \cdot \frac{\sin 88^\circ}{\cos 88^\circ} \cdot \frac{\sin 89^\circ}{\cos 89^\circ} \\
 \sin(90^\circ - x) &= \cos x \Rightarrow \sin(90^\circ - 1^\circ) = \cos 1^\circ \\
 \cos(90^\circ - x) &= \sin x \Rightarrow \cos(90^\circ - 1^\circ) = \sin 1^\circ \\
 y &= 1
 \end{aligned}$$

$$17. 210^\circ \in 3^\circ \text{ Q}$$

No 3º quadrante, temos:

$$\sin \alpha < 0$$

$$\cos \alpha < 0$$

Provavelmente fez $\sin 210^\circ = \sin 30^\circ$ e $\cos 210^\circ = \cos 30^\circ$.

18. a) e b) Respostas pessoais. (Verificar o sinal do seno e do cosseno em cada um dos quadrantes.)

Fazer e aprender (p. 243)

$$19. \text{ a) } \frac{31\pi}{7} + \frac{18\pi}{7} = \frac{49\pi}{7} = 7\pi = 3 \cdot 2\pi + \pi$$

São suplementares.

$$\text{b) } -\frac{2\pi}{5} + \frac{37\pi}{5} = \frac{35\pi}{5} = 7\pi = 3 \cdot 2\pi + \pi$$

São suplementares.

$$\text{c) } \frac{4\pi}{9} + \frac{109\pi}{18} = \frac{8\pi + 109\pi}{18} = \frac{117\pi}{18} = 3 \cdot 2\pi + \frac{9\pi}{18} = \frac{\pi}{2} + 3 \cdot 2\pi$$

São complementares.

$$\text{d) } \frac{61\pi}{10} - \frac{8\pi}{5} = \frac{61\pi - 16\pi}{10} = \frac{45\pi}{10} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi$$

São complementares.

$$20. \alpha \text{ e } \beta \text{ são suplementares, então: } \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha \in 2^\circ \text{ Q} \begin{cases} \sin \beta > 0 \\ \cos \beta < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \beta &= \sin(180^\circ - \alpha) = \sin 180^\circ \cos \alpha - \sin \alpha \cos 180^\circ = \sin \alpha = m \\
 \cos \beta &= \cos(180^\circ - \alpha) = \cos 180^\circ \cos \alpha + \sin 180^\circ \sin \alpha = -\cos \alpha \\
 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - m^2 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - m^2}
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$$

$$21. \alpha \text{ e } \beta \text{ são complementares, então: } \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \sin \beta &= \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - m^2} \\
 \cos \beta &= \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = m
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \pm \frac{\sqrt{1 - m^2}}{m}$$

$$22. \alpha + \beta = 3060^\circ = 8 \cdot 360^\circ + 180^\circ \equiv 180^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \sin \alpha &= \sin(180^\circ - \beta) = \sin 180^\circ \cos \beta - \sin \beta \cos 180^\circ = \sin \beta \\
 \cos \alpha &= \cos(180^\circ - \beta) = \cos 180^\circ \cos \beta + \sin 180^\circ \sin \beta = -\cos \beta
 \end{aligned}$$

$$23. \alpha + \beta = 4410^\circ = 12 \cdot 360^\circ + 90^\circ \equiv 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \cos(90^\circ - \beta) = \cos 90^\circ \cos \beta + \sin 90^\circ \sin \beta = \sin \beta \\
 \sin \alpha &= \sin(90^\circ - \beta) = \sin 90^\circ \sin \beta - \cos 90^\circ \cos \beta = \cos \beta
 \end{aligned}$$

$$24. \text{ a) } y = \frac{\sin(61\pi + x) \cdot \cos(33\pi + x)}{\sin(101\pi - x) \cdot \cos(203\pi - x)}$$

$$y = \frac{\sin(60\pi + \pi + x) \cdot \cos(32\pi + \pi + x)}{\sin(100\pi + \pi - x) \cdot \cos(202\pi + \pi - x)}$$

$$y = \frac{\sin(\pi + x) \cdot \cos(\pi + x)}{\sin(\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}$$

$$y = \frac{-\sin x \cdot (-\cos x)}{\sin x \cdot (-\cos x)}$$

$$y = -1$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y &= \sin\left(\frac{13\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) \\ y &= \sin\left(\frac{13\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{20\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - x\right) \\ y &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ y &= \cos x \cdot \sin x \\ y &= \sin x \cdot \cos x \end{aligned}$$

Foco na tecnologia – Calculadora (p. 244)

1. a) $10 \cdot \sin 25^\circ = 10 \cdot 0,42262 = 4,2262$
b) $\sin 20^\circ + \sin 30^\circ = 0,34202 + 0,5 = 0,84202$
c) $20 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 20 \cdot 1 = 20$
d) $\sin (2 \cdot 25^\circ) = \sin 50^\circ = 0,76604$
2. a) $\operatorname{tg} \alpha = 0,542 \Rightarrow \alpha \approx 28,5^\circ$
b) $\cos \alpha = 0,785 \Rightarrow \alpha \approx 38,3^\circ$
c) $\sin \alpha = 0,055 \Rightarrow \alpha \approx 3,2^\circ$
d) $\operatorname{tg} \alpha = 22,453 \Rightarrow \alpha \approx 87,4^\circ$
3. a) $\sin 10^\circ \approx 0,1736$
b) $\sin 20^\circ \approx 0,3420$
c) $\sin 30^\circ = 0,5000$
d) $\sin 40^\circ \approx 0,6428$
e) $\sin 50^\circ \approx 0,7660$
f) $\sin 60^\circ \approx 0,8660$
g) $\sin 70^\circ \approx 0,9397$
h) $\sin 80^\circ \approx 0,9848$
i) $\sin 90^\circ = 1$
4. a) $\cos 10^\circ \approx 0,9848$
b) $\cos 20^\circ \approx 0,9397$
c) $\cos 30^\circ \approx 0,8660$
d) $\cos 40^\circ \approx 0,7660$
e) $\cos 50^\circ \approx 0,6428$
f) $\cos 60^\circ = 0,5000$
g) $\cos 70^\circ \approx 0,3420$
h) $\cos 80^\circ \approx 0,1736$
i) $\cos 90^\circ = 0$

Quando o ângulo aumenta, o cosseno diminui (para ângulos no 1º quadrante).

5. $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{5}{13} = 0,3846 \Rightarrow \alpha = 22,6^\circ$$

$$\widehat{BAC} = 90^\circ; \widehat{ABC} \simeq 22,6^\circ; \widehat{ACB} \simeq 67,4^\circ$$

Foco no raciocínio lógico (p. 244)

1. Se Antônio mente, Berta fala a verdade e, portanto, Carlos mente. Como Carlos diz que Antônio e Berta mentem, e ele está mentindo, ou Antônio não mente ou Berta não mente. A 2ª opção é a mais adequada e não gera contradições.
- Se Antônio não mente, então Berta mente e, portanto, Carlos diz a verdade, o que leva a uma contradição.
- Assim, Antônio e Carlos mentem, e Berta fala a verdade.

2. O ano possui 12 meses. Se 13 pessoas fizerem aniversário em meses distintos, teremos que pelo menos duas farão no mesmo mês.
- Alternativa *d*.

Aprender a aprender (p. 245)

$$1. P = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$P = (0,1)^3 - (0,2)^3 = -0,007$$

2. 8 jogadores, 2 contundidos

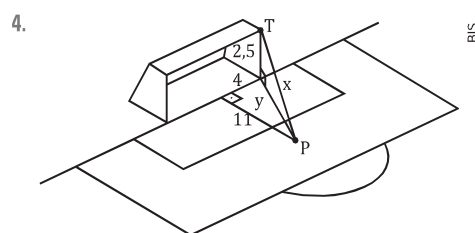
times: 5 jogadores

Pelo menos 1 contundido.

$$\frac{C_{6,4}C_{2,1} + C_{6,3}C_{2,2}}{C_{8,5}} = \frac{15 \cdot 2 + 20 \cdot 1}{56} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28}$$

3. Como x e y são inversamente proporcionais, $y = \frac{k}{x}$.

Assim, quando $k = 5$, a alternativa b é a correta.



Seja x a distância procurada, y a distância do ponto P à trave. Note que a distância entre P e o centro do gol é de 11 m.

Devemos ter:

$$y^2 = 4^2 + 11^2 \Rightarrow y^2 = 137$$

$$x^2 = y^2 + 2,5^2 \Rightarrow x^2 = 137 + 6,25$$

$$x^2 = 143,25 \Rightarrow x \approx \pm 12$$

Alternativa a.

5. A partir do triângulo ABC, temos que:

$$\operatorname{tg} \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{5}{\operatorname{tg} 60^\circ} \Rightarrow BC = \frac{5}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$$\text{sen } \widehat{BCA} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC = \frac{5}{\text{sen } 60^\circ} \Rightarrow AC = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

Logo, como $BD = 12$ cm, segue que:

$$CD = 12 - BC \left(12 - \frac{5}{\sqrt{3}} \right) \text{ cm}$$

Além disso, do triângulo CDE, temos:

$$\text{sen } \widehat{CDE} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow CE = CD \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow CE = 6 - \frac{5}{2\sqrt{3}} \text{ cm}$$

Dessa maneira, o inteiro mais próximo é:

$$AC + CE = \frac{10}{\sqrt{3}} + 6 - \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{15\sqrt{3}}{6} + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC + CE \approx 10$$

6. As faces laterais da pirâmide são triângulos equiláteros de lado 1. Planificando as faces que contêm como aresta comum o segmento que liga o ponto **A** ao vértice superior da pirâmide, tem-se um losango com a aranha (ponto **C**) e a formiga (ponto **D**) em lados opostos. O trajeto mais curto que a aranha deve percorrer para chegar até a formiga corresponde ao segmento **CD**. Como $AD = BC$ e lados opostos de um losango são paralelos, temos que **ABCD** é um paralelogramo. Logo, $CD = AB = 1$ m.
- Alternativa **a**.

7. t é a reta tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 8$ no ponto P .

A equação de t é dada por:

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)$$

Quando $P(2, 2)$, temos:

$$t: y - 2 = -\frac{2}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -x + 4$$

Q é o ponto de interseção das retas t e $r: y = 2x$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow 2x = -x + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow Q = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

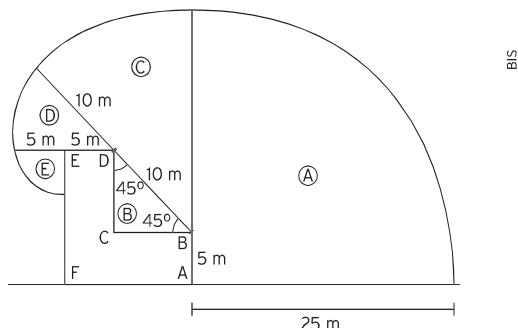
Assim, o ponto pedido é $Q = \left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

Alternativa d .

8. Se o peso de uma turmalina é o dobro do peso de outra, então seu preço é cinco vezes o preço da outra; isso equivale a dizer que, se uma turmalina pesa a metade de outra, então seu preço é um quinto do preço da outra. Zita dividiu sua turmalina em 4 pedras iguais, o que equivale a primeiro dividi-la em 2 turmalinas iguais e depois dividir cada uma dessas em 2 também iguais. No primeiro passo, Zita ficará com 2 turmalinas cada uma valendo 200 reais $\left(\frac{1000}{5} = 200\right)$. Depois do segundo passo, Zita terá 4 turmalinas, cada uma valendo 40 reais $\left(\frac{200}{5} = 40\right)$; essas 4 turmalinas juntas valem 160 reais $(4 \cdot 40 = 160)$. Podemos esquematizar a solução da seguinte forma, mostrando como calcular o preço de uma das quatro turmalinas menores:

$$\begin{array}{l} \text{peso inicial} \quad \text{peso : 2} \quad \frac{1}{2} \quad \text{do peso inicial} \quad \text{peso : 2} \quad \frac{1}{4} \quad \text{do peso inicial} \\ \text{valor: 1 000} \quad \text{valor : 5} \quad \text{valor: 1 000 : 5 = 200} \quad \text{valor : 5} \quad \text{valor: 200 : 5 = 40} \end{array}$$

9. a)



$$b) \quad 10^2 = BC^2 + CD^2$$

$$100 = 2BC^2$$

$$50 = BC^2$$

$$\sqrt{50} = BC$$

$$5\sqrt{2} = BC$$

$$A: \frac{1}{4} \pi \cdot 25^2 = \frac{625\pi}{4}$$

$$B: \frac{5\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}}{2} = 25$$

$$C: \frac{1}{8} \pi \cdot 20^2 = 50\pi$$

$$D: \frac{1}{8} \pi \cdot 10^2 = \frac{25\pi}{2}$$

$$E: \frac{1}{4} \pi \cdot 5^2 = \frac{25\pi}{4}$$

$$A + B + C + D + E = \frac{625\pi}{4} + 25 + 50\pi + \frac{25\pi}{2} + \frac{25\pi}{4} =$$

$$= (625 + 200 + 50 + 25) \frac{\pi}{4} + 25 = \frac{900\pi}{4} + 25 = 225\pi + 25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A + B + C + D + E = 732 \text{ m}^2$$

Cálculo rápido (p. 246)

1. e 2.

	Arco em graus	Arco em radianos	Senos	Cossenos
A	0°	0	0	1
E	30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
P	45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
F	60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
B	90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0
G	120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Q	135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
H	150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
C	180°	π	0	-1
I	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
R	225°	$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
J	240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
D	270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
K	300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
S	315°	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
L	330°	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Mundo plural (p. 247)

1. $\tan \theta = 0,35 \Rightarrow \theta \approx 19^\circ$

A inclinação da rua Baldwin é de aproximadamente 19° .

2. Incentive os estudantes a compartilharem os resultados da pesquisa.

CAPÍTULO 12

Fazer e aprender (p. 251)

1. $e(t) = 0,6t^2 + 1$ t em s
e em m

$$\begin{cases} [0, 2] e(0) = 1 \\ e(2) = 0,6 \cdot 4 + 1 = 3,44 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_m = \frac{e(2) - e(0)}{2 - 0} = \frac{2,4}{2} = 1,2 \text{ m/s}$$

$$[2, 4] e(4) = 0,6 \cdot 16 + 1 = 10,6 \Rightarrow V_m = \frac{e(4) - e(2)}{4 - 2} = \frac{10,6 - 3,4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_m = 3,6 \text{ m/s}$$

2. A maior rapidez corresponde à maior variação de $e(t)$ em um menor tempo, ou seja, entre os instantes $[0, A]$ e $[A, B]$.

3. $f(x) = C, x \in \mathbb{R}$

$$a) f(x_A) = C$$

$$f(x_B) = C$$

$$tvm = \frac{f(x_A) - f(x_B)}{x_B - x_A} = 0$$

- b) A função é uma constante, não há variação. Assim, a taxa de variação média é nula.

4. a) Resposta pessoal.

- b) Resposta pessoal.

- c) Resposta pessoal; exemplo:

$$f(x) = (x - 1) \cdot (x - 3)$$

$$tvm = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0 - 0}{2} = 0$$

Fazer e aprender (p. 257)

5. $f(x) = ax^2$

$P(a, a^3)$

$$m_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta t) - f(a)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(a + \Delta t)^2 - a \cdot a^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a(a^2 + 2a\Delta t + (\Delta t)^2) - a^3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{a^3 + 2a^2\Delta t + (\Delta t)^2 a - a^3}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2a^2 + \Delta t a = 2a^2$$

$$m = 2a^2$$

6. $f(-2) = (-2)^2 = 4$ $P(-2, 4)$

$$m_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(-2 + \Delta t) - f(-2)}{\Delta t}$$

$$m_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta t - 2)^2 - 4}{\Delta t}$$

$$m_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta t)^2 - 4\Delta t + 4 - 4}{\Delta t} = -4$$

$$(y - 4) = -4(x + 2) \Rightarrow y = -4x - 4$$

7. Nas proximidades de $x_0 = -1$, a função $y = x \cdot |x| = x \cdot (-x) = -x^2$, para todo $x \leq 0$.

Vamos calcular a inclinação da reta tangente em $x_0 = -1$, considerando a função $f(x) = -x^2$.

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

A equação da reta tangente em $x_0 = -1$ é $(y - (-1)) = 2(x - (-1)) \Rightarrow y = 2x + 1$

8. O coeficiente angular de $f(x) = x^2 + x$ em um ponto x_0 de seu domínio é

$$m_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 + x_0 + \Delta x - (x_0^2 + x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x + 1) =$$

$$m_t = 2x_0 + 1$$

A reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo x se $m_t = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$

Como $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, a resposta é dada pelo ponto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

Fazer e aprender (p. 259)

9. $s = \sqrt{t}$

$$v(4) = s'(4) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(4 + \Delta t) - s(4)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{4 + \Delta t} - \sqrt{4}}{\Delta t} \cdot \frac{\sqrt{4 + \Delta t} + \sqrt{4}}{\sqrt{4 + \Delta t} + \sqrt{4}} \right] =$$

$$= v(4) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{4 + \Delta t - 4}{\Delta t (\sqrt{4 + \Delta t} + \sqrt{4})} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{4 + \Delta t} + \sqrt{4})} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v(4) = 0,25 \text{ m/s}$$

10. $v = t^2 + 1$

$$a(5) = v'(5) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(5 + \Delta t) - v(5)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(5 + \Delta t)^2 + 1 - (5^2 + 1)}{\Delta t}$$

$$a(5) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{25 + 10\Delta t + \Delta t^2 + 1 - 25 - 1}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(10 + \Delta t)}{\Delta t}$$

$$a(5) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 10 + \Delta t = 10 \text{ m/s}^2$$

11. $s(t) = t^2 - t$

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$\bullet s(t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 - (t + \Delta t) = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t - \Delta t$$

$$\bullet s(t) = t^2 - t$$

$$\bullet s(t + \Delta t) - s(t) = t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 - t - \Delta t - t^2 + t =$$

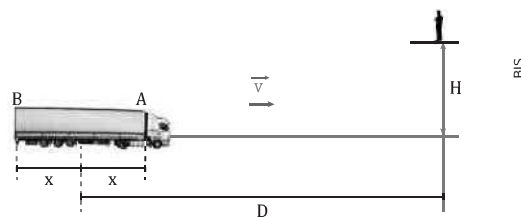
$$= 2t\Delta t + \Delta t^2 - \Delta t = \Delta t(2t + \Delta t - 1)$$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta t(2t + \Delta t - 1)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 2t - 1$$

$$v(t) = 2t - 1 = 25 \Rightarrow t = 13 \text{ s}$$

Foco na leitura (p. 259)

1.



2. Desprezando os efeitos de resistência do ar, a altura percorrida durante a queda é uma função do tempo $H(t)$, dada por:

$$H(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Do enunciado do problema, $H = 5 \text{ m}$ e iremos supor $g = 10 \text{ m/s}^2$. Substituindo esses valores na expressão, obtemos o tempo T :

$$S = \frac{1}{2} \cdot 10T^2 \Rightarrow S = 5T^2$$

$$T^2 = 1 \Rightarrow T = 1 \text{ s}$$

Como comentado no boxe, a diferença entre a velocidade ideal e a velocidade real do caminhão é:

$$\Delta v = \frac{3}{T} \Rightarrow \Delta v = \frac{3}{1} \Rightarrow \Delta v = 3 \text{ m/s}$$

A alternativa correta é a b.

Fazer e aprender (p. 262)

12. a) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 4$

$$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x$$

b) $f(x) = x^{-1} + x^2 \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x$

c) $f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f(x) = (6x + 1) \cdot (x^3 + 2) = 6x^4 + 12x + x^3 + 2$
 $f'(x) = 24x^3 + 3x^2 + 12$

e) $f(x) = 15x^4 \Rightarrow f'(x) = 60x^3$

f) $f(x) = -4x^3 + 7x^2 - 3x \Rightarrow f'(x) = -12x^2 + 14x - 3$

13. $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \frac{1}{x^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{x^2(x + \Delta x)^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x\Delta x - \Delta x^2}{x^2(x + \Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x - \Delta x}{x^2(x + \Delta x)^2} = \frac{-2x}{x^2 \cdot x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

14. $f(x) = x^3 - 3x^2$

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

b) $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

c) Coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, ou seja, são horizontais paralelas ao eixo Ox .

15. $g(x) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^2$

$$t // y = -3x + 5$$

$$m_t = -3$$

$$m_t = g'(x) = -2x^2 - x \quad \left. \vphantom{m_t = g'(x)} \right\} \text{Então: } -3 = -2x^2 - x$$

$$\text{Logo, } 2x^2 + x - 3 = 0.$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm 5}{4} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$$

$$\text{Para } x = 1: g(1) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{6}$$

$$\text{Para } x = -\frac{3}{2}: g\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - \frac{9}{8} = \frac{9}{8}$$

$$t: y + \frac{7}{6} = -3(x - 1)$$

$$18x + 6y - 11 = 0$$

ou

$$t: y - \frac{9}{8} = -3\left(x + \frac{3}{2}\right)$$

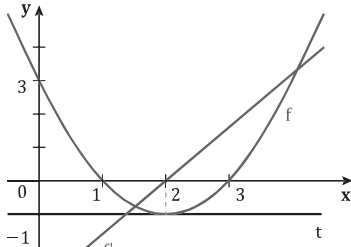
$$24x + 8y + 27 = 0$$

16. a) Verdadeira. Como $f'(x) = \tan \alpha$, em que α é o ângulo formado entre o eixo da abscissa e a reta tangente ao gráfico da função no ponto x , o gráfico que representa a função tal que $f'(x) = 0$ é uma reta paralela ao eixo.
- b) Falsa. Se $f'(a) = 0$, sabemos que a tangente do ângulo formado pelo eixo e pela reta tangente à função é ZERO. Nesses casos, o ponto pode ser de máximo ou de mínimo, local ou global.
- c) Verdadeira. Como $f'(a) = \tan \alpha$, sendo α o ângulo formado entre a reta tangente ao gráfico da função F no ponto $(a, f(a))$, $f'(a)$ é o coeficiente angular dessa reta.
- d) Falsa, porque f pode ser constante e, nesse caso, $f'(c) = 0$ para todo $c \in]a, b[$.

Fazer e aprender (p. 264)

17. a) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 4$
 $f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 24x + 45 = 0$
 $\Delta = 576 - 4 \cdot 3 \cdot 45 = 36$
 $x_1 = 5$ ou $x_2 = 3$
 f crescente $]-\infty, -3]$ e $[5, +\infty[$
 f decrescente $[3, 5]$
- b) $f(x) = x^3 - 3x$
 $f'(x) = 3x^2 - 3$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$
 $f(x)$ é crescente $]-\infty, -1]$ \cup $[1, +\infty[$
 $f(x)$ é decrescente $[-1, 1]$
- c) $f(x) = x^4 - 2x^2$
 $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0$
 $x_1 = 1$ ou $x_2 = -1$
 $f(x)$ é crescente $[-1, 0]$ \cup $[1, +\infty[$
 $f(x)$ é decrescente $]-\infty, -1]$ \cup $[0, 1]$
- d) $f'(x) = -x^4 + 4x^3$
 $f'(x) = -4x^3 + 12x^2$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow -4x^3 + 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(-x + 3) = 0$
 $x_1 = 0$ ou $x_2 = +3$
 $f(x)$ é crescente $]-\infty, 3]$
 $f(x)$ é decrescente $[3, +\infty[$
18. a) $f(x) = ax + b$
 $f'(x) = a$; então, se $a > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ é crescente
Se $a < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ é decrescente
- b) $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$
 $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{2a}$
 $f'(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{2a} \Rightarrow f(x)$ é crescente
 $f'(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{2a} \Rightarrow f(x)$ é decrescente
- c) $f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$
 $f'(x) = 2ax + b \Rightarrow f'(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{2a}$
 $f'(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{2a} \Rightarrow f(x)$ é crescente
 $f'(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{2a} \Rightarrow f(x)$ é decrescente

Fazer e aprender (p. 267)

19. a) 
 $f(x) = x^2 - 4x + 3$
 $x^2 - 4x + 3 = 0$

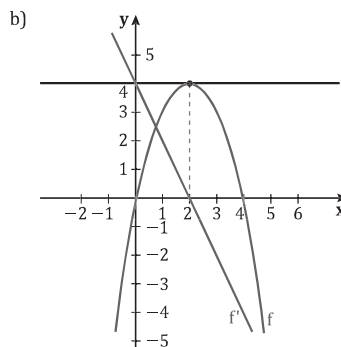
$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x_1 = 3 \text{ ou } x_2 = 1$$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 - 4 = 0$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow \text{é mínimo de } f(x)$$



$$f(x) = -x^2 + 4x$$

$$-x^2 + 4x = 0 \Rightarrow -x(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ ou } x_2 = 4$$

$$f'(x) = -2x + 4$$

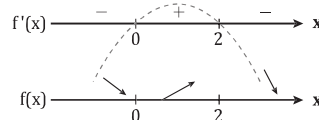
$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow -2x_0 + 4 = 0$$

$$x_0 = 2 \Rightarrow \text{é máximo de } f(x)$$

20. a) $f(x) = -x^3 + 3x - 1$
 $f'(x) = -3x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 3 = 0$
 $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
 $f(-1) = +1 - 3 - 1 = -3$
 $f(1) = -1 + 3 - 1 = 1$
Portanto, $(-1, -3)$ é o ponto de mínimo local e $(1, 1)$ é o ponto de máximo local.
- b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x - 2$
 $f'(x) = x^2 - 4$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$
 $f(-2) = -\frac{8}{3} + 8 - 2 = \frac{-8 + 24 - 6}{3} = \frac{10}{3}$
 $f(2) = \frac{8}{3} - 8 - 2 = \frac{8 - 24 - 6}{3} = -\frac{22}{3}$
Portanto, $(-2, \frac{10}{3})$ é o ponto de máximo local e $(2, -\frac{22}{3})$ é o ponto de mínimo local.
21. $f(x) = x^4 - 2x^3 = x^3(x - 2)$
 $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$
 $f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 6x^2 = 0 \Rightarrow 2x^2(2x - 3) = 0$
 $x_1 = 0$ ou $x_2 = \frac{3}{2}$
a) decrescente $]-\infty, \frac{3}{2} [$
crescente $[\frac{3}{2}, +\infty [$
b) $f(\frac{3}{2}) = (\frac{3}{2})^4 - 2(\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8} - \frac{27}{4} = -\frac{27}{8}$
mínimo local $(\frac{3}{2}, -\frac{27}{8})$
Não há ponto de máximo.
- c) $f(x) = ax + b$
 $f(0) = 0, f'(0) = 0 \Rightarrow$ tangente é o eixo x , mas $f(x)$ continua decrescente $y = 0$. Nesse ponto o eixo Ox é tangente ao gráfico de f , mas f é decrescente em torno de $(0, 0)$.

22. $f(x) = -x^3 + 3x^2, x \in [-3, 3]$

a) $f'(x) = -3x^2 + 6x = 0$
 $3x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$



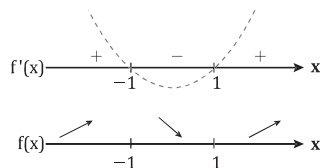
$$f(0) = 0 \Rightarrow (0, 0) \text{ é ponto de mínimo local.}$$

$$f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 = -8 + 12 = 4 \Rightarrow (2, 4) \text{ é ponto de máximo local.}$$

- b) $f(-3) = -(-3)^3 + 3(-3)^2 = 27 + 27 = 54$
 $(-3, 54)$ é o máximo absoluto.
 $f(3) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 = 0$
 $(0, 0)$ e $(3, 0)$ são mínimos absolutos.

23. $f(x) = x^3 - 3x$

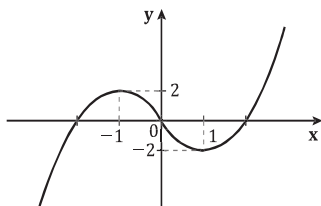
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$



$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = -1 + 3 = 2$ e $f(1) = 1 - 3 = -2$

$(-1, 2)$ é ponto de máximo local.

$(1, -2)$ é ponto de mínimo local.



24. $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b = 0$

$x = -\frac{b}{2a}$

$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c =$

$= \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$

$\therefore V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

25. $2p = 440$

Dimensões do retângulo: a e b

$b = 2r$

$2p = 2a + 2\pi r = 400$

$a + \pi r = 220 \Rightarrow a = 220 - \pi r$ ①

$A_{\text{retângulo}} = ab = a \cdot 2r = (220 - \pi r)2r \Rightarrow A_{\text{retângulo}} = 440r - 2\pi r^2$

$A'_{\text{retângulo}} = 440 - 4\pi r = 0 \Rightarrow r = \frac{440}{4\pi} \Rightarrow r = \frac{110}{\pi} \text{ m}$

$a = 220 - \pi \cdot \frac{110}{\pi} \Rightarrow a = 110 \text{ m}$

$b = 2r \Rightarrow b = 2 \cdot \frac{110}{\pi} \Rightarrow b = \frac{220}{\pi} \text{ m}$

26. a) $V(t) = \begin{cases} a(b-t)^2, & \text{para } 0 \leq t \leq 20 \\ 0, & \text{para } t \geq 20 \end{cases}$

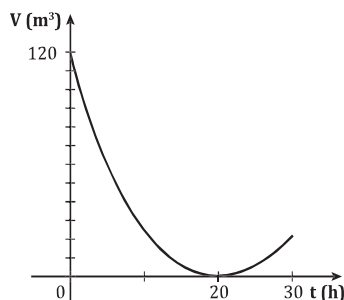
$V(0) = 120 = a(b-0)^2 \Rightarrow 120 = ab^2$ ①

$V(20) = 0 = a(b-20)^2 \Rightarrow a = 0$ (não convém)

ou $b - 20 = 0 \Rightarrow b = 20$

Em ①: $120 = a \cdot 20^2 \Rightarrow \frac{120}{400} = a \Rightarrow a = \frac{3}{10} = 0,3$

b) $V(t) = \begin{cases} 0,3(20-t)^2, & 0 \leq t \leq 20 \\ 0, & 20 \leq t \leq 30 \end{cases}$



27. $V = 100 \text{ m}^3$

$\pi r^2 h + \frac{1}{3} \pi r^2 h = 100$

$\pi r^2 \left(h + \frac{r}{3}\right) = 100 \Rightarrow 100 - \frac{\pi r^3}{3} =$

$= \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{300 - \pi r^3}{3\pi r^2}$

$g^2 = 2r^2 \Rightarrow g = r\sqrt{2}$

$A_{\text{lateral}} = 2\pi r h + \pi r g$

$A_{\text{lateral}} = 2\pi r h + \pi r r\sqrt{2}$

$A_{\text{lateral}} = 2\pi r \cdot \left(\frac{300 - \pi r^3}{3\pi r^2}\right) + \pi r^2 \sqrt{2} = \frac{600}{3r} - \frac{2\pi r^2}{3} + \sqrt{2} \pi r^2$

$A'_{\text{lateral}} = -\frac{200}{r^2} - \frac{4\pi}{3} r + 2\sqrt{2} \pi r = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{200}{r^2} = \pi \left(-\frac{4}{3} + 2\sqrt{2}\right)$

$\frac{200}{\left(-\frac{4}{3} + 2\sqrt{2}\right)\pi} = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{100}{\left(-\frac{2}{3} + \sqrt{2}\right)\pi}}$

$r \approx 3,5 \text{ m}$

28. Barco em $P_1: B_1(-100 + 20t, 0)$

Barco em $P_2: B_2(0, -60 + 40t)$

$d_{B_1 B_2} = \sqrt{(-100 + 20t)^2 + (60 - 40t)^2}$

$d_{B_1 B_2} = \sqrt{10000 - 4000t + 400t^2 + 3600 - 4800t + 1600t^2}$

$d_{B_1 B_2} = \sqrt{2000t^2 - 8800t + 13600}$

$d_{B_1 B_2}^2 = 2000t^2 - 8800t + 13600$

$t_v = \frac{8800}{4000} \Rightarrow t_v = 2,2 \text{ h ou } 2 \text{ h } 12 \text{ min}$

Foco na tecnologia – Calculadora (p. 269)

1. Em uma descarga, temos:

$\frac{1,2}{V} = 0,6 \Rightarrow V = 2 \text{ L}$. A economia por descarga será de 0,8 L; o total eco-

nomizado na situação do enunciado será:

$4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 0,8 = 256 \text{ L}$

Alternativa c.

2. Devemos ter: $23 = 58 = 1334$

Alternativa b.

Aprender a aprender (p. 269)

1. Resposta pessoal.

2. x trabalhadores na empresa.

$\frac{1}{3} x$ tem idade $I < 30$

$\frac{1}{4} x$ tem idade $30 \leq I < 40$

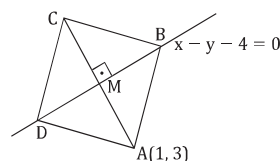
a) $x - \frac{1}{3} x - \frac{1}{4} x = 40$

$\frac{12x - 4x - 3x}{12} = 40 \Rightarrow \frac{5x}{12} = 40 \Rightarrow x = 96$ pessoas

b) Pelo menos 30: $\frac{1}{4} x + 40 = \frac{96}{4} + 40 = 64$

Ou seja, 64 pessoas.

3. $A(1, 3)$



B e **D** estão em $x - y - 4 = 0$.

$B(x, x - 4)$

$D(u, u - 4)$

$\overline{AC} \perp \overline{BD}$

$$m\overline{BD} = 1$$

$$m\overline{AC} = -1$$

$$\overline{AC}: y - 3 = -1(x - 1)$$

$$y = -x + 4$$

$$\overline{AC} \cap \overline{BD}: \begin{cases} y = -x + 4 \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$2y = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 4$$

$$\therefore M(4, 0)$$

$$AM^2 = (1 - 4)^2 + (3 - 0)^2$$

$$AM^2 = 9 + 9$$

$$AM^2 = 18$$

$$AM = 3\sqrt{2}$$

$$AM = \frac{d}{2} = \frac{\ell\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \ell = 6$$

$$A = 6^2 = 36$$

$$4. \begin{cases} r = 2 \\ (0, 0) \end{cases}$$

t: $y = ax + b$ é tangente a C em $P(1, \sqrt{3})$.

$$C: x^2 + y^2 = 4$$

$$a = \sqrt{3} - b$$

$$y = ax + b$$

$$y = (\sqrt{3} - b)x + b$$

$$\sqrt{3} = a + b$$

$$t: (\sqrt{3} - b)x - y + b = 0$$

$$d_{ct} = \frac{|b|}{\sqrt{(\sqrt{3} - b)^2 + 1}} = 2$$

$$b^2 = 4[(\sqrt{3} - b)^2 + 1]$$

$$b^2 = 4(3 - 2\sqrt{3}b + b^2 + 1)$$

$$b^2 = 12 - 8\sqrt{3}b + 4b^2 + 4$$

$$3b^2 - 8\sqrt{3}b + 16 = 0$$

$$\Delta = 64 \cdot 3 - 4 \cdot 3 \cdot 16$$

$$b = \frac{8\sqrt{3}}{6} \Rightarrow b = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$a = \sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$5. c = 40 \xrightarrow{+60\%}$$

$$c = 40 + \frac{60}{100} \cdot 40 = 64$$

$$c = 100 \xrightarrow{\quad} p' = ?$$

$$i = \frac{40}{100} \cdot p = \frac{40}{100} \cdot 100 = 40 \xrightarrow{\quad} i = \frac{30}{100} p'$$

$$\ell\% = 50\% \xrightarrow{\quad} \ell\% = 40\%$$

$$\frac{p' - 64 - \frac{30}{100} p'}{64} = \frac{40}{100}$$

$$\frac{\frac{70}{100} p' - 64}{64} = \frac{2}{5}$$

$$\left(\frac{70p'}{100} - 64\right)5 = 128$$

$$\frac{35}{10} p' - 320 = 128$$

$$\frac{35}{10} p' = 448$$

$$p' = 128$$

O novo preço é de R\$ 128,00.

6. a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Falsa, as retas podem ser reversas.
d) Falsa, ela pode ser reversa.
e) Verdadeira.

$$7. C = 2\pi \cdot r$$

$$\theta = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = 0,7 \cdot R$$

$$r = 0,7 \cdot 6400$$

$$r = 4480 \text{ km}$$

$$C = 2\pi \cdot 4480 \Rightarrow C \approx 28149 \text{ km}$$

Mundo plural (p. 270)

1. Incentive os estudantes a compartilharem os resultados obtidos na pesquisa.

Por dentro do Enem e dos vestibulares (p. 272)

1. I. Verdadeira. No instante $t = 3 \text{ h}$ a altura da maré é de 2 m .

$$\text{Porque } y = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6 \cdot t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(3) = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6 \cdot 3}\right) = 2 + 1,9 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y(3) = 2 \text{ m}$$

- II. Verdadeira. A maré baixa acontece no menor valor de y e isso só pode acontecer no menor valor de cosseno, ou seja, quando $\left(\frac{\pi}{6 \cdot t}\right) = \pi = \cos(\pi)$, e isso acontece quando $t = 6 \text{ h}$, e nesse ponto $y = 0,1 \text{ m}$.

- III. Verdadeira. A maré alta acontece no maior valor de y e isso acontece quando \cos tem seu maior valor, ou seja, quando $\cos\left(\frac{\pi}{6 \cdot t}\right) = 1 = \cos(2\pi)$, e isso acontece quando $t = 12 \text{ h}$, e nesse ponto $y = 3,9 \text{ m}$.

Assim, a alternativa a é a correta.

2. Os valores de $\sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (h - 12)\right)$ variam entre -1 e $+1$ e ocorrem quando:

$$\frac{\pi}{12} \cdot (h - 12) = \frac{\pi}{12} \text{ ou } \frac{\pi}{12} \cdot (h - 12) = -\frac{\pi}{12}, \text{ ou seja, quando:}$$

$$h = 18 \text{ ou } h = 6$$

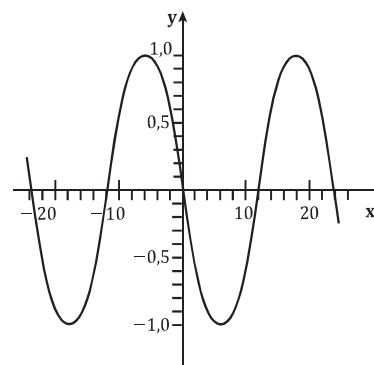


Gráfico de $y = \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (h - 12)\right)$

Para que a temperatura varie em um intervalo de amplitude 8°C ($26^\circ\text{C} - 18^\circ\text{C} = 8^\circ\text{C}$), é preciso multiplicar a função seno por 4, mas, como foi solicitado que as temperaturas à tarde fossem menores que as da manhã, é preciso multiplicar a função seno por -4 .

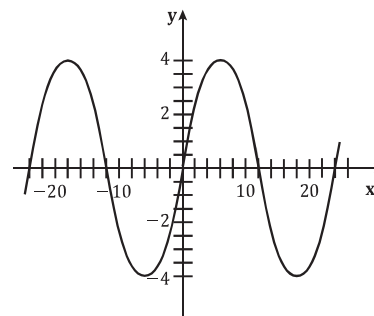


Gráfico de $y = -4 \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot (h - 12)\right)$

Basta, agora, adicionar 22 para que $T(h)$ varie de 26 a 18 graus como solicitado.

Alternativa b .

Referências bibliográficas

- ABREU, Maria Célia; MASETTO, Marcos T. *O professor universitário em aula: prática e princípios teóricos*. 11. ed. São Paulo: MG Editores Associados, 1990.
- BARBIER, Jean-Marie. *Elaboração de projectos de acção e planificação*. Porto: Porto Editora, 1996.
- BERLOQUIN, Pierre. *100 jogos lógicos*. Lisboa: Gradiva, 1991.
- BOUTINET, Jean-Pierre. *Antropologia do projeto*. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.
- BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 3.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 1999.
- _____. *PCN + Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2006. Volume 2.
- _____. Diretoria de concepção e orientações curriculares para a Educação Básica/Coordenação geral de Ensino Médio. *Ensino Médio Inovador, 2009*. Disponível em: <www.mec.gov.br>. Acesso em: 24 maio 2016.
- BUSHAW, Donald et al. *Aplicações da Matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.
- CLEGG, Frances. *Estatística para todos*. Lisboa: Gradiva, 1995.
- COSTA, Sérgio Francisco. *Introdução ilustrada à Estatística*. São Paulo: Harbra, 2013.
- COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). *As ideias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1994.
- GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas: a teoria na prática*. Porto Alegre: Artmed, 1995.
- KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (Org.). *A resolução de problemas na Matemática escolar*. São Paulo: Atual, 1997.
- LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Albert P. (Org.). *Aprendendo e ensinando Geometria*. São Paulo: Atual, 1994.
- NEVES, Iara C. B. et al. (Org.). *Ler e escrever, compromisso de todas as áreas*. 9. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2011.
- PERRENOUD, Philippe. *As 10 novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2001.
- PIRES, Célia M. C. *Currículos de Matemática: da organização linear à ideia de rede*. São Paulo: FTD, 2000.
- POZO, Juan Ignacio (Org.). *A solução de problemas*. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- SACRISTÁN, J. G.; GÓMEZ, A. I. *Compreender e transformar o ensino*. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- SMOLE, Kátia C. S. *Avaliação: da ideia de medida à ideia de projeto* (Tese de doutorado). São Paulo: FE/USP, 2001.
- _____; DINIZ, Maria Ignez de S. V. (Org.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender Matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2001.



